Теория вычетов

Теория функции комплексного переменного

Основная теорема теории вычетов

Пусть функция ***f(z)*** является аналитической в ограниченной односвязной области ***G***, за исключением конечного числа ИОТ. ***L*** - замкнутый контур, целиком принадлежащий.

Тогда справедливо:

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} res[f(z); z_k]$$

Следствия теоремы

1. Если внутри контура нет ИОТ, либо есть только УОТ, то интеграл равен нулю.

2. $$\sum_{k=1}^{n} res[f(z);z_k]+res[f(z);\infty=0$$

3. $$rez[f(z);\infty]=-\sum_{k=1}^{n} rez[f(z);z_k]$$

Схема вычисления интеграла по замкнутому контуру.

1. Обход контура против часовой стрелки. На комплексной плоскости изобразить контур интегрирования.
2. Установить все изолированные особые точки и изобразить их.
3. Определить тип особых точек, найти вычеты в них.
4. Записать результат.

Вычисление интегралов вида $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$

R(cost, sint) - рациональная функция по замкнутому контуру $0 \le t \le 2\pi$.

Используется подстановка:

$$z = e^{it} \quad |z| = 1 \quad t = \frac{\ln z}{i} \quad dt = -i\frac{dz}{z}$$

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$$

Вычисление интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$

R(x) - рациональная функция по бесконечному незамкнутому контуру.

Вводится вспомогательный замкнутый контур [-b; b] – полуокружность по ***x***, т.е. L: {|z|=b 0 ≤ Arg(z) ≤ π, тогда:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = \lim_{b \to \infty} \oint\limits_{L} R(z)dz$$

В этом случае можно использовать теорему о вычетах:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} res[R(z); z_k]$$

Вычисление интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cdot e^{i\alpha x}dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cdot \cos(\alpha x)dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cdot \sin(\alpha x)dx$$

R(x) – правильная рациональная дробь, знаменатель которой не имеет действительных корней.

Лемма Жордана Если:

1. Функция по любому замкнутому контуру подчиняется условию:
   $$f(z) = e^{i\alpha z}\cdot F(z),\ \alpha > 0,\ \ F(z)\underset{z\to\infty}{\to} 0,\ \operatorname{Im} z \ge 0$$
2. Функция аналитична на действительной оси, а в верхней полуплоскости имеет конечное число ИОТ, то справедливо:
   $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\cdot F(x)dx = 2\pi i\cdot \sum_{k=1}^{n} res[e^{i\alpha z}\cdot F(z); z_k]$$

Вычисление интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cdot e^{i\alpha x}dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cdot \cos(\alpha x)dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cdot \sin(\alpha x)dx$$

$$e^{i\alpha x} = \cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(\alpha x)dx = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} R(z)\cdot e^{i\alpha z}dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin(\alpha x)dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} R(z)\cdot e^{i\alpha z}dz$$

При этом вычеты берутся только в **верхней** полуплоскости.

Вычисление интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cdot e^{i\alpha x}dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cdot \cos(\alpha x)dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cdot \sin(\alpha x)dx$$

Если $f(z) = e^{i\alpha z}\cdot F(z),\ \alpha < 0,\ \ F(z)\underset{z\to\infty}{\to} 0,\ \operatorname{Im} z \le 0$

Контур замыкается в **нижней** полуплоскости, и тогда:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\cdot F(x)dx = -2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res[e^{i\alpha z}\cdot F(z); z_k]$$

вычеты находятся в особых точках **нижней** полуплоскости

Вычисление интегралов вида

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} R(x)\cdot e^{i\alpha x}dx$$

Если $f(z)=e^{i\alpha z}\cdot F(z),\ \alpha<0,\ \underset{z\to\infty}{F(z)\to 0},\ \operatorname{Re} z>\sigma$

Контур замыкается в **правой** полуплоскости, и тогда:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\cdot F(x)dx=-2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res[e^{i\alpha z}\cdot F(z);z_k]$$

вычеты находятся в особых точках **правой** полуплоскости

Вычисление интегралов вида

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} R(x)\cdot e^{i\alpha x}dx$$

Если $\quad f(z)=e^{i\alpha z}\cdot F(z),\ \alpha>0,\ \ F(z)\underset{z\to\infty}{\to}0,\ \operatorname{Re} z<\sigma$

Контур замыкается в **левой** полуплоскости, и тогда:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\cdot F(x)dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res[e^{i\alpha z}\cdot F(z);z_k]$$

вычеты находятся в особых точках **левой** полуплоскости