Теория функций комплексного переменного

Ряды комплексных чисел

Понятие ряда комплексных чисел

Рассмотрим некоторую последовательность комплексных чисел:

$$\{z_n\} = z_1; z_2; \ldots\ldots z_n$$

$$z_n = x_n + iy_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

Ряд сходится только в том случае, если сходятся оба ряда одновременно.

Свойства рядов комплексных чисел

- Свойства сходящихся вещественных рядов являются свойствами и рядов комплексных чисел.
- Ряд комплексных чисел называется *абсолютно* сходящимся, если сходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots$$

Исследование на сходимость

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|z_{n+1}\right|}{\left|z_n\right|}<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|z_n\right|}<1$$

Степенные ряды аналитических функций

- Всякую аналитическую функцию можно представить в виде сходящего ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$$

$$c_n - \textit{комплексные коэффициенты}$$

- Областью сходимости такого ряда является множество точек комплексной плоскости, в которых ряд сходится.

Теорема Абеля

- Если степенной ряд сходится при z = z1, то он сходится абсолютно внутри круга |z| < |z1|
- Если степенной ряд расходится при z = z2, то он расходится во всех точках внешности круга |z| > |z2|
- Т.о. для степенного ряда существует положительное вещественное число R, что в круге |z| < R ряд сходится, а при |z| > R расходится.

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Степенные ряды общего вида – ряд Лорана

Ряд вида:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot z^n \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$$

$$c_n - \text{комплексные коэффициенты}$$

$$z_0 - \text{фиксированная точка}$$

называется рядом Лорана

Ряд Лорана

Ряд Лорана можно записать в виде:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n \qquad \psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^{-n}$$

$$\varphi(z) - \textit{правильная часть}$$

$$\psi(z) - \textit{главная часть}$$

Область сходимости ряда Лорана

- Для правильной части областью сходимости является круг радиуса:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

- Для главной части областью сходимости является круг радиуса:

$$r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{=n}|}$$

Разложение функции в ряд Лорана

Пусть функция ***f(z)*** аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ представляется в этом кольце рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - \xi_0)^{n+1}}$$

$L -$ *произвольная окружность с центромв* z_0

в кольце $r < |z - z_0| < R$

Изолированные особые точки аналитических функций

- Определение 1:

1. Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$, но не определена в самой точке z_0 ($z0 \neq \infty$), то эта точка называется изолированной особой точкой для $f(z)$.
2. Бесконечно удаленная точка $z_0 = \infty$ называется изолированной особой точкой для $f(z)$, если функция является аналитической вне круга некоторого радиуса за исключением самой точки z_0, т.е. в кольце $R < |z| < \infty$

Классификация изолированных особых точек

1. Устранимая особая точка
2. Полюс
3. Существенно особая точка

- Определение 2:

1. Изолированная особая точка (ИОТ) z_0 функции ***f(z)*** называется устранимой (УОТ), если:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = const$$

Классификация изолированных особых точек

- <u>Определение 3</u>:

1. Изолированная особая точка (ИОТ) $\boldsymbol{z_0}$ функции $\boldsymbol{f(z)}$ называется ***полюсом***, если:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

Полюс может иметь порядок (кратность).

Если порядок полюса равен 1, он называется простым полюсом.

Классификация изолированных особых точек

- Пусть функцию ***f(z)*** можно представить в виде:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \ \textit{причем}:$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

Возможны 2 варианта:

1. $\boldsymbol{z = z_0 \ \ \varphi(z_0) \neq 0, \ \ \psi(z_0) = 0}$, тогда порядок полюса равен порядку нуля.
2. $\boldsymbol{z = z_0 \ \ \varphi(z_0)=0, \ \ \psi(z_0)=0}$, тогда порядок полюса равен разности порядков нулей числителя и знаменателя.