Теория функций комплексного переменного

Дифференцирование и интегрирование

Понятие производной ФКП

Пусть ФКП ***w = f(z)*** определена в некоторой точке z_0 и её окрестности, тогда:

$$w'_{z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u(x;y) + i\Delta v(x;y)}{\Delta z}$$

$$w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -i \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Условие существования производной ФКП (Коши-Римана)

- Выполнение условий Коши-Римана означает дифференцируемость ФКП в каждой точке области.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Таблица производных

$$\left(z^{n}\right)^{\backslash} = nz^{n-1}$$

$$\left(a^{z}\right)^{\backslash} = a^{z}\ln a$$

$$\left(\log_{a} z\right)^{\backslash} = \frac{1}{z\ln a}$$

$$\left(\sin z\right)^{\backslash} = \cos z$$

$$\left(\cos z\right)^{\backslash} = -\sin z$$

$$\left(\arcsin z\right)^{\backslash} = \frac{1}{\sqrt{1-z^{2}}}$$

$$\left(\arccos z\right)^{\backslash} = -\frac{1}{\sqrt{1-z^{2}}}$$

$$\left(arctgz\right)^{\backslash} = \frac{1}{1+z^{2}}$$

$$\left(arcctgz\right)^{\backslash} = -\frac{1}{1+z^{2}}$$

$$\left(shz\right)^{\backslash} = chz \qquad \left(chz\right)^{\backslash} = shz$$

Понятие аналитической функции комплексной переменной

Определение :

Однозначная функци *w=f(z)* называется аналитической в данной точке, если она дифференцируема в этой точке и её окрестности.

Функция, дифференцируемая во всех точках области является аналитической во всей области.

Связь аналитической функции с гармонической

Если выполняются условия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

то функция называется гармонической и может быть восстановлена.

Геометрический смысл производной

W = f(z) – отображает множество *E* на *G*

$$\left| f^{\backslash}(z_0) \right| = \left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right| = k$$

$$\alpha = Arg\,(f^{\backslash|}(z_0))$$

k – коэффициент растяжения плоскости при отображении

α - угол поворота плоскости при отображении

Непосредственное интегрирование

w=***f(z)*** непрерывна в области E линия интегрирования L принадлежит области интегрирования

$$\int_{(L)} f(z)dz = \int (u+iv)(dx+idy) =$$

$$= \int udx + i\int udy + i\int vdx - \int vdy$$

Есть криволинейный интеграл

Интегрирование аналитических функций

Если функция аналитическая, то выполняется условие Коши-Римана, следовательно интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точек интегрирования. В этом случае справедлива формула:

$$\int\limits_{(L)} f(z)dz = F(z)\Big|_{z1}^{z2} = F(z2) - F(z1)$$

Интегральная теорема Коши

Пусть контур интегрирования L - замкнутая линия. В этом случае выбор начальной точки значения не имеет.

Теорема: **Интеграл по замкнутому контуру от аналитической функции в замкнутой области равен нулю.**

$$\oint\limits_{(L)} f(z)dz = 0$$

При этом:

1. Интеграл от аналитической функции не зависит от пути интегрирования.
2. При смене направления интеграл меняет знак.

Интегральная формула Коши

Если ***f(z)*** – аналитическая функция в замкнутой односвязной области D, то справедливо:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(L)} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

L – замкнутый контур, проходимый против часовой стрелки (+); удобно использовать окружность с центром в z0;

z0 - особая точка внутри контура.

Рабочие формулы Коши

$$\oint\limits_{(L)} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

$$\oint\limits_{(L)} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2} = 2\pi i \cdot \frac{f'(z_0)}{1!}$$

$$\oint\limits_{(L)} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^3} = 2\pi i \cdot \frac{f''(z_0)}{2!}$$

$$\oint\limits_{(L)} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^n} = 2\pi i \cdot \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$$