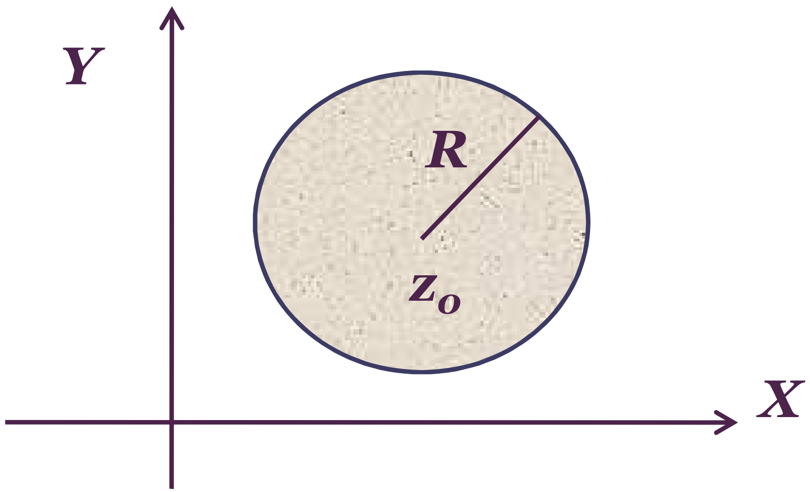
Теория функций комплексного переменного

Предел последовательности комплексных чисел

- Определение 6:

Окрестностью точки z_0 называется внутренность круга радиуса R с центром в этой точке, т.е. множество точек, которые подчиняются неравенству: $|z-z_0|<R$



Предел последовательности комплексных чисел

Определение 7:

- Число $\boldsymbol{z_0}$ называется пределом числовой последовательности $\{z_n\}$, если для любого сколь угодно малого действительного числа ε > 0 можно указать такое действительное число N > 0, что для всех номеров n > N будет выполняться неравенство: $|\boldsymbol{z_0} - \boldsymbol{z}| < \varepsilon$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$$

Предел последовательности комплексных чисел

Определение 8:

- Если последовательность имеет предел, то она называется сходящейся, если не имеет предела, то расходящейся.
- Если:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$$

то говорят, что последовательность сходится к бесконечно удаленной точке.

- Комплексная плоскость называется расширенной, если:

$$z \to \infty \Rightarrow \begin{cases} x \to \infty \\ y \to \infty \end{cases}$$

Понятие функции комплексной переменной

Определение 9:

Если каждому значению комплексной плоскости $z=x+iy$ соответствует определенное значение $w=u+iv$, то говорят, что $w=f(z)$ является функцией комплексной переменной (ФКП):

$$f(z)=u(x;y)+iv(x;y) \qquad u(x;y)=Ref(z) \qquad v(x;y)=Imf(z)$$

В геометрическом смысле ФКП это закон отображения множества точек z на множество точек w на комплексной плоскости.

Понятие функции комплексной переменной

Рассмотрим множество ***E*** на плоскости ***z*** и множество *G* на плоскости ***w.***

E – область определения ФКП

G – множество значений ФКП

- Если каждому значению ***z*** соответствует только одно значение ***w***, ФКП – однозначная или *однолистная*.
- Если каждому значению ***z*** соответствует несколько значений ***w***, ФКП – многозначная или *многолистная*.

Предел функции комплексной переменной

Определение 10:

Комплексное число ***a*** называется пределом ФКП в точке $\boldsymbol{z_0}$,

если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > o, \ \text{что}:$$

$$\left|\Delta z\right| = \left|z - z_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(z) - a\right| < \varepsilon$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a$$

Непрерывность функции комплексной переменной

Определение 11:

ФКП ***f(z)*** непрерывна в точке z_0 если выполняется равенство:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} u(x;y) = u(x_0;y_0) \\ \lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} v(x;y) = v(x_0;y_0) \end{cases}$$

Непрерывность функции комплексной переменной

Определение 12:

- ФКП называется непрерывной на множестве ***E***, если она непрерывна в каждой точке этого множества.
- Если ФКП непрерывная на множестве ***E*** однозначно отображается на множество ***G***, то обратная функция также является непрерывной.

Линии и области на комплексной плоскости

При геометрической иллюстрации области определения и множества значений ФКП строят линии и области на комплексной плоскости.

Примеры:

1. $|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{i}| < 1$
2. $Re\ \boldsymbol{z} = 2$
3. $Im\ (\boldsymbol{z}^2 - \boldsymbol{3z}) = 1$