Теории функций комплексного переменного

Понятие комплексного числа

- Определение 1:

Комплексным числом называется выражение вида:

$$z = x + iy$$

x, y – действительные числа

i - мнимая единица

$x = \mathrm{Re}\, z$ - вещественная часть комплексного числа

$y = \mathrm{Im}\, z$ – мнимая часть комплексного числа

- Определение 2:

$$i^2 = -1$$

Понятие комплексного числа

Определение 3:

- Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительная и мнимая части:

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2=x_2+iy_2$$

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

- Комплексное число равно нулю $z = x+iy =0$ если его вещественная и мнимая части равны нулю:

$$x = 0 \qquad y = 0$$

Понятие комплексного числа

Определение 4:

- Выражения: $z = x + iy \quad z^* = x - iy$

Называются комплексно сопряженными числами.

- На множестве комплексных чисел любое квадратное уравнение имеет решение, в том числе при $D<0$.

Алгебраическая форма записи комплексного числа

$$\boldsymbol{z = x + iy}$$

- Определение 5:

Модулем комплексного числа называется выражение:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Сложение комплексных чисел

$z_1 = x_1 + iy_1$ $\qquad$ $z_2=x_2+iy_2$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$$

Умножение комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1^* = x_1 - iy_1$$

$$z_1 \,.\, z_2 = (x_1 + iy_1) \,.\, (x_2 + i\, y_2) =$$

$$z_1 \,.\, z^*_1 = (x_1 + iy_1) \,.\, (x_1 - i\, y_1) =$$

Свойства операций сложения и умножение комплексных чисел

1. ***Коммутативности:***

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 \,.\, z_2 = z_2 \,.\, z_1$$

1. ***Ассоциативности:***

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$(z_1 \,.\, z_2) \,.\, z_3 = z_1 \,.\, (z_2 \,.\, z_3)$$

1. ***Дистрибутивности:***

$$(z_1 + z_2) \,.\, z_3 = (z_1 \,.\, z_3) + (z_2 \,.\, z_3)$$

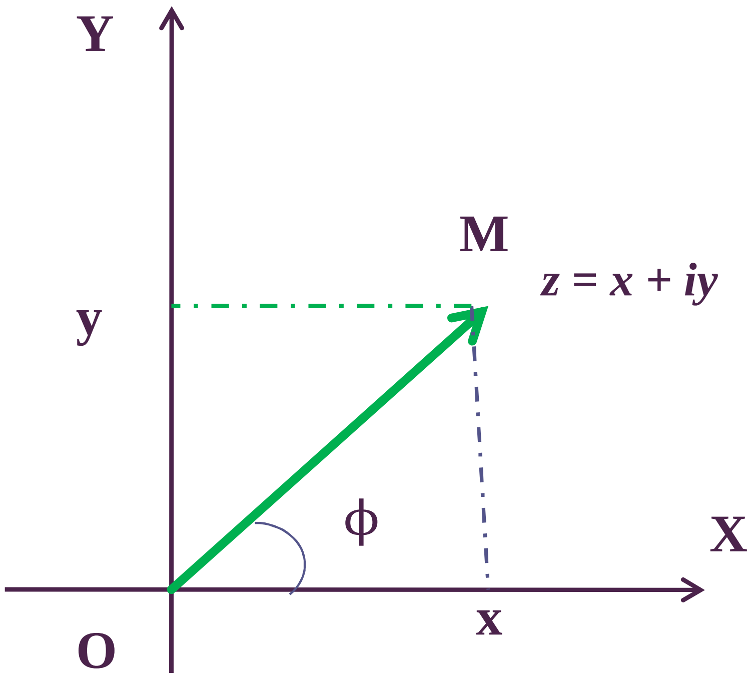
Деление комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_2^* = x_2 - iy_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*}$$

Геометрическая интерпретация комплексного числа



OX – ось действительной части **z**

OY – ось мнимой части **z**

$$|z| = r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$$ *модуль комплексного числа*

$$\varphi = arctg\frac{y}{x} = Arg\,z$$ *аргумент комплексного числа*

Аргумент комплексного числа

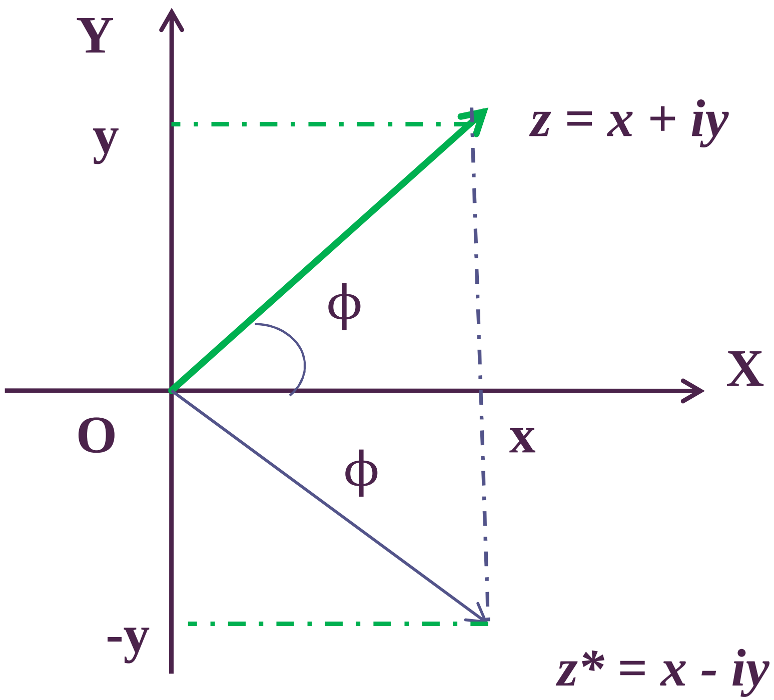
$$\varphi = arctg\,\frac{y}{x} = Arg\,z$$

Аргумент комплексного числа определяется с точностью до 2π, $\boldsymbol{k}$=1, 2, ... - целое число.

Главное значение аргумента:

$$-\pi \le \mathbf{Arg\ z} \le \pi$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа



$$x = |z| \cdot \cos\varphi$$

$$y = |z| \cdot \sin\varphi$$

$$z = x + iy = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z^* = x - iy = |z| \cdot (\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

Комплексное число в показательной форме

$$\textit{Формула Эйлера}: \quad \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

$$z = x + iy = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\cdot e^{i\varphi}$$

$$z^{*} = x - iy = |z|\cdot(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z|\cdot e^{-i\varphi}$$

Алгебраические действия с комплексными числами в показательной форме

$$z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi 1} \qquad z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi 2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot e^{i\varphi 1} \cdot |z_2| \cdot e^{i\varphi 2} = |z_1 \cdot z_2| \cdot e^{i(\varphi 1 + \varphi 2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \cdot e^{i\varphi 1}}{|z_2| \cdot e^{i\varphi 2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi 1 - \varphi 2)}$$

Перевод комплексного числа из одной формы записи в другую

$$z = x + iy \qquad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = arctg\frac{y}{x}$$

$$x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{i\varphi}$$

Переход от показательной к алгебраической форме

$$\textit{Формула Эйлера}: \quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = x + iy$$

Возведение в степень, извлечение корня (формулы Муавра)

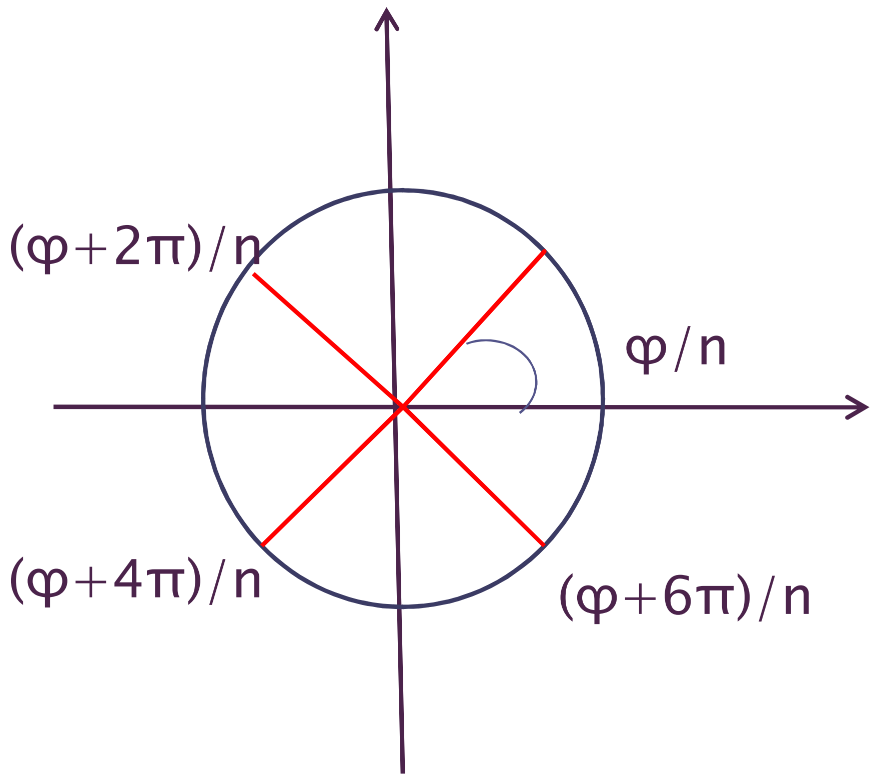
$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

$$z^n = \left(|z| \cdot e^{i(\varphi+2\pi k)}\right)^n = |z|^n \cdot e^{in(\varphi+2\pi k)}$$

$$\sqrt[n]{z} = \left(|z| \cdot e^{i(\varphi+2\pi k)}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$$

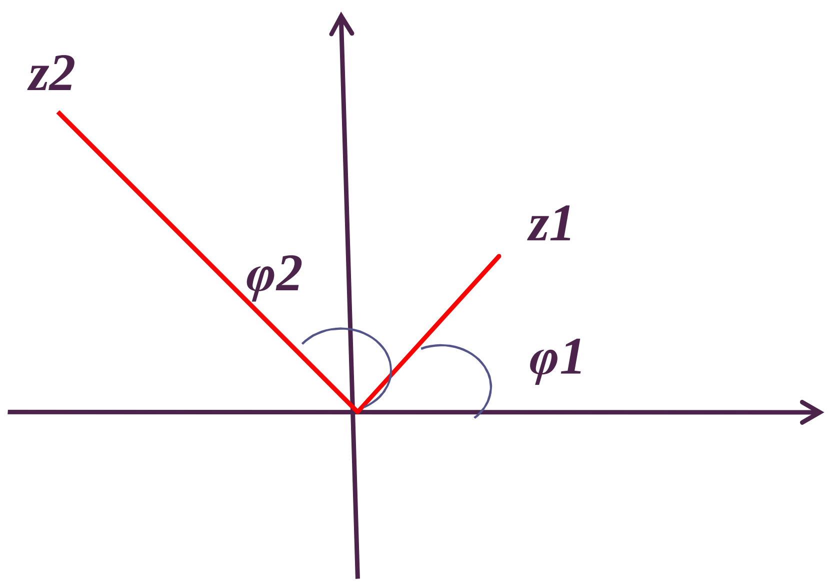
$$k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Геометрическая интерпретация извлечения корня (формулы Муавра)



- При извлечении корня из комплесного числа может существовать несколько главных значений, которые лежат в интервале: [-π; π].
- Можно посторооить окружность, радиус которой равен новому модулю, отметить на ней точку соответствующую углу ***φ/n***, а затем отметить на этой окружности остальные корни с шагом ***2π/n***

Геометрическая интерпретация возведения в степень (формулы Муавра)



- При возведении в степень комплесного числа его модуль увеличивается, а угол изменяется.