Функциональные ряды

Основные понятия

<u>Определение 1:</u>

Функциональным называется ряд, члены которого есть непрерывные функции от аргумента ***x*:**

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

При ***x*=*n*** функциональный ряд становится числовым, который либо сходится, либо расходится.

Основные понятия

Определение 2:

Совокупность значений $\boldsymbol{x}$, при которых ФР сходится, называется *областью сходимости* ряда.

Сумма ФР может быть представлена:

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

Основные понятия

Определение 3:

ФР называется равномерно сходящимся в некоторой области X, если для каждого сколь угодно малого ε>0 найдется такое N(ε)>0, что при n>N выполняется неравенство:

$$\left|S(x)-S_n(x)\right| = \left|R_n(x)\right| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

S(x) – непрерывная функция

Основные понятия

Определение 4:

Пусть даны: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *функциональный ряд*

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *знакоположительный числовой ряд*

причем в некоторой области выполняется условие:

$$|u_1(x)| \le a_1, \ |u_2(x)| \le a_2, \ldots, |u_n(x)| \le a_n, \ldots$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ является мажорантой для } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

Признак Вейерштраса

- Если *мажоранта* функционального ряда сходится, то сходится и функциональный ряд <u>абсолютно и равномерно.</u>

Свойства абсолютно и равномерно сходящихся рядов

Пусть даны функциональные ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \quad \textit{равномерносходящийся на } [a;b]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = S_1(x), \ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = S_2(x) \ \textit{равномерносходящиеся, причем}:$$

$$v_n(x) = u_n^{\backslash}(x) \ \textit{и} \ \ \varphi_n(x) = \int_a^b u_n(x)dx \ \ \textit{тогда}:$$

$$S_1(x) = S^{\backslash}(x) \qquad S_2(x) = \int_a^b S(x)dx$$

Степенные ряды

<u>Определение 5:</u>

Функциональный ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + ..$$

$$a_0, a_1, \ldots a_n - \textit{вещественные числа}$$

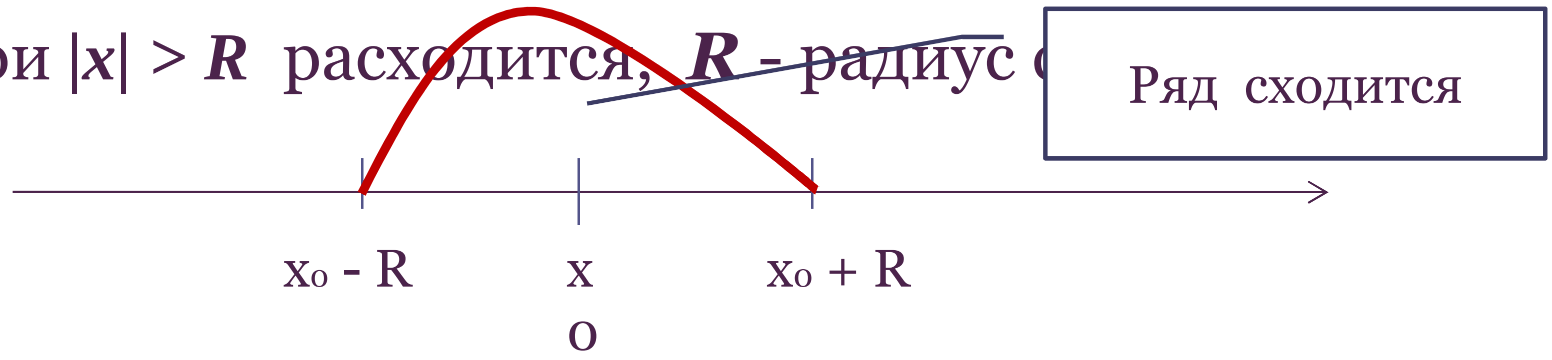
называется степенным рядом.

Теорема Абеля

1. Если степенной ряд сходится при $\boldsymbol{x = x1}$, то он сходится для всех $|\boldsymbol{x}| < |\boldsymbol{x1}|$.
2. Если степенной ряд расходится при $\boldsymbol{x = x2}$, то он расходится для всех $|\boldsymbol{x}| > |\boldsymbol{x2}|$.

Из теоремы следует, что существует такое положительное значение $\boldsymbol{x = R}$, что при $|\boldsymbol{x}| < \boldsymbol{R}$ степенной ряд сходится,

а при $|\boldsymbol{x}| > \boldsymbol{R}$ расходится, $\boldsymbol{R}$ - радиус с



Нахождение радиуса сходимости

1. По признаку Даламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Нахождение радиуса сходимости

2. По радикальному признаку Коши:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}$$

Ряд Тейлора

Определение 6:

Рядом Тейлора функции ***f(x)*** называется степенной ряд вида:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{\backslash}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{\backslash\backslash}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

это есть разложение функции в окрестности точки x_0.

Коэффициентами являются производные высших порядков в точке x_0, т.е. Для разложения в ряд Тейлора необходимо, чтобы ***f(x)*** существовала в x_0 вместе со своими производными.

Достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора

<u>Определение 6:</u>

Всякая функция ***f(x)*** бесконечно дифференцируемая в интервале $|x-x_o|<r$ может быть разложена в степенной ряд Тейлора, если в этом интервале остаток ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Ряд Маклорена

Определение 7:

Рядом Маклорена функции ***f(x)*** называется степенной ряд вида:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{\backslash}(0)}{1!}x + \frac{f^{\backslash\backslash}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

это есть разложение функции в окрестности точки ***x=0***.

Коэффициентами являются производные высших порядков в точке $x_{=0}$, т.е. Для разложения в ряд Маклорена необходимо, чтобы ***f(x)*** существовала в ***x=0*** вместе со своими производными.

Использование степенных рядов в приближенных вычислениях

Вычислить *sin10º* с точностью до $\delta=10^{-5}$

Используем разложение в ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$10^\circ = \frac{\pi}{18} \approx 0{,}174533$$

$$\delta = 10^{-5} < \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^5}{5!}$$

Понятие ряда Фурье

Для функций, которые не являются непрерывными на исследуемом интервале, используют разложение в ряд Фурье.

Определение 1. Рядом Фурье для функции с периодом $T=2\pi$, определенной на отрезке [-π; π] называется тригонометрический ряд:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

Коэффициенты ряда Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

Понятие ряда Фурье

Для функций, которые не являются непрерывными на исследуемом интервале, используют разложение в ряд Фурье.

Определение 2. Рядом Фурье для функции с периодом $T = 2l$, определенной на отрезке $[-l; l]$ называется тригонометрический ряд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

Коэффициенты ряда Фурье

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$