Числовые ряды

Ряды с положительными членами.

Основные понятия

Определение 1:

Пусть задана бесконечная последовательность чисел:

$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

Выражение:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называется числовым рядом.

Основные понятия

Определение 2:

Суммой конечного числа ***n*** первых членов ряда называется выражение:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_n$$

Основные понятия

Определение 2:

- Если существует предел:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

это значит, что ряд сходится и его сумма равна ***S***.

- Если предел равен бесконечности

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$$

это значит, что ряд расходится и суммы не имеет.

Основные понятия

Числовой ряд может быть задан:

1. Перечислением членов:

$$1+3+5+7+\ldots..$$

2. Заданием общего члена ряда:

$$u_n = \frac{2n}{3n-1}$$

Основные понятия

Определение 3:

- *Остатком ряда* после ***n*** члена называется ряд, полученный из данного путем отбрасывания его ***n*** первых членов:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = R_n$$

- Сумма ряда может быть записана так:

$$S = S_n + R_n$$

Свойства сходящихся рядов

1. Ряд и его остаток одновременно сходятся или расходятся. Остаток сходящегося ряда стремится к нулю.
2. Сходящиеся ряды можно почленно складывать:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum a_n \pm b_n = A \pm B$$

Свойства сходящихся рядов

3. Сходящиеся ряды можно почленно перемножать:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$$

Свойства сходящихся рядов

4. Сходящиеся ряды можно почленно умножать на константу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

$$k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot A$$

Необходимый признак сходимости числовых рядов

Теорема: Если ряд сходится, то его ***n***-член стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Доказательство:

Пусть ряд: $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ сходится, т.е.:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

Достаточные признаки сходимости числовых рядов

<u>Признак сравнения 1 (теорема).</u>

Пусть даны 2 знакоположительных числовых ряда:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (2)$$

При этом выполняется условие: $u_n \le v_n$, тогда:

1. Если ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1);
2. Если ряд (1) расходится, то расходится и ряд (2).

Достаточные признаки сходимости числовых рядов

Предельный признак сравнения 2.

Если существует конечный, отличный от нуля предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A\neq 0$$

то оба ряда одновременно сходятся или расходятся.

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \ (1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}v_n \ (2)$$

При применении предельного признака сравнения данный ряд сопоставляется с эталонным, сходимость которого установлена.

Эталонные ряды

1. Геометрический ряд: $$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} |q| < 1 & \textit{сходится} \\ |q| > 1 & \textit{расходится} \end{cases}$$

2. Гармонический ряд: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \textit{расходится}$$

3. Обобщенный гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \begin{cases} k > 1 & \textit{сходится} \\ k \le 1 & \textit{расходится} \end{cases}$$

Достаточные признаки сходимости числовых рядов

Признак Даламбера:

Если для ряда с положительными членами существует предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$$

То:

1. Ряд сходится при $l<1$;
2. Ряд расходится при $l>1$;
3. При $l=1$ вопрос сходимости не решается.

Достаточные признаки сходимости числовых рядов

Радикальный признак Коши:

Если для ряда с положительными членами существует предел:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$$

То:

1. Ряд сходится при $l<1$;
2. Ряд расходится при $l>1$;
3. При $l=1$ вопрос сходимости не решается.

Достаточные признаки сходимости числовых рядов

Интегральный признак Коши:

Пусть дан числовой ряд с положительными членами, при этом:

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots \geq u_n$$

Пусть дана непрерывная и невозрастающая функция ***f(x)*** такая, что:

$$f(1)=u_1, \quad f(2)=u_2, \ldots \quad f(n)=u_n$$

Тогда:

1. Если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$
2. Если несобственный интеграл расходится, то расходится и ряд.