Глава 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Понятие. Свойства

1.1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Неопределенное интегрирование есть операция обратная дифференцированию и состоит в нахождению функции по известной ее производной. Приведем понятия первообразной и неопределенного интеграла.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной по отношению к функции $f(x)$ в данном интервале, если во всех точках интервала верно равенство $F'(x) = f(x)$.

Теорема (о первообразных). Все первообразные для данной функции отличаются на постоянное слагаемое.

Это значит, что если $F(x)$ есть какая-либо первообразная для функции $f(x)$, то все бесконечное множество ее первообразных можно записать одним выражением $F(x) + C$.

Определение. Неопределенным интегралом от данной функции называется совокупность всех ее первообразных.

Неопределенный интеграл обозначается символом $\int f(x)\ dx$. Таким образом, если если $F(x)$ есть какая-либо первообразная для функции $f(x)$, то

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C,$$

где $\int$ – символ интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)\,dx$ – подынтегральное выражение,

x – переменная интегрирования.

Геометрическим представлением неопределенного интеграла является семейство интегральных кривых.

1.1.2. Свойства неопределенного интеграла

1. Вынесение постоянного множителя

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx.$$

2. Почленное интегрирование
Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых

$$\int[f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

3. Дифференцирование интеграла
Производная неопределенного интеграла по переменной интегрирования равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x = f(x)$$

Это свойство является единственным критерием проверки правильности результата интегрирования

4. Символы неопределенного интегрирования и дифференциала, стоящие рядом, взаимно уничтожаются

$$d\ \left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\ dx, \qquad \int d\ F(x) = F(x) + C.$$

5. Инвариантность формы
Форма результата интегрирования не зависит от того, что является переменной интегрирования – независимая переменная, или функция $U(x)$ (свойство инвариантности формулы интегрирования). Т.е., если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad \text{то} \quad \int f(U)\,dU = F(U) + C.$$

Неопределенное интегрирование, или, что то же самое, нахождение первообразной, является операцией обратной дифференцированию, но намного сложнее его. При неопределенном интегрировании используются свойства неопределенного интеграла, набор табличных интегралов, методы и приемы интегрирования некоторых классов функций.

Различают следующие методы интегрирования:

1) Непосредственное интегрирование.
2) Интегрирование подведением под знак дифференциала.
3) Интегрирование по частям.
4) Метод подстановки (замены переменной).

В данном пособии кроме методов интегрирования также рассматриваются приемы интегрирование основных классов интегрируемых функций, таких как рациональные дроби, простейшие иррациональности, дифференциальные биномы и тригонометрические функции.

Основные неопределённые интегралы **Таблица** 1.1.

1. $\int x^k\,dx = \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + C,$ $(k \neq -1)$	**12.** $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left\|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right\| + C$
	13. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left\|\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
2. $\int dx = x + C$	**14.** $\int \mathrm{tg}\ x\,dx = -\ln\|\cos x\| + C$
3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	**15.** $\int \mathrm{ctg}\ x\,dx = \ln\|\sin x\| + C$
4. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$	**16.** $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C$
5. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	**17.** $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{x-a}{x+a}\right\| + C$
6. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	**18.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$
7. $\int e^x\,dx = e^x + C$	**19.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
8. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	**20.** $\int \mathrm{sh}\ x\,dx = \mathrm{ch}\ x + C$
9. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$	**21.** $\int \mathrm{ch}\ x\,dx = \mathrm{sh}\ x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\ x + C$	**22.** $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2\ x} = \mathrm{th}\ x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\ x + C$	**23.** $\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2\ x} = -\mathrm{cth}\ x + C$

Основные неопределённые интегралы **Таблица** 1.2

1. $\int u^k\,du = \dfrac{u^{k+1}}{k+1} + c,\quad (k \neq -1)$	**12**. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\ \mathrm{tg}\dfrac{u}{2}\ \right| + c$
	13. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{u}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + c$
2. $\int du = u + c$	**14**. $\int \mathrm{tg}\ u\,du = -\ln\|\cos u\| + c$
3. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$	**15**. $\int \mathrm{ctg}\ u\,du = \ln\|\sin u\| + c$
4. $\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + c$	**16**. $\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\dfrac{u}{a} + c$
5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln\|u\| + c$	**17**. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{u-a}{u+a}\right\| + c$
6. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$	**18**. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + c$
7. $\int e^u\,du = e^u + c$	**19**. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\| + c$
8. $\int \sin u\,du = -\cos u + c$	**20**. $\int \mathrm{sh}\ u\,du = \mathrm{ch}\ u + c$
9. $\int \cos u\,du = \sin u + c$	**21**. $\int \mathrm{ch}\ u\,du = \mathrm{sh}\ u + c$
10. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\ u + c$	**22**. $\int \dfrac{du}{\mathrm{ch}^2\ u} = \mathrm{th}\ u + c$
11. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\ u + c$	**23**. $\int \dfrac{du}{\mathrm{sh}^2\ u} = -\mathrm{cth}\ u + c$

24. $\int \ln u\,du = u\ \ln u - u + c$

25. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \dfrac{1}{2}\left(u\ \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2\ \ln\left|U + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\ \right) + c$

26. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \dfrac{1}{2}\left(u\ \sqrt{a^2-u^2} + a^2 \arcsin\dfrac{u}{a}\right) + c$

27. $\int e^{\alpha u}\sin\beta u\ du = \dfrac{e^{\alpha u}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta u - \beta\cos\beta u) + c$

28. $\int \mathrm{arctg}\ u\ du = u\ \mathrm{arctg}\ u - \dfrac{1}{2}\ln(1+u^2) + c$

29. $\int \arcsin u\ du = u\arcsin u + \sqrt{1-u^2} + c$

30. $\int e^{\alpha u}\cos\beta u\,du = \dfrac{e^{\alpha u}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta u + \beta\sin\beta u) + c$

1.2. Основные методы интегрирования

1.2.1. Непосредственное интегрирование

Этот прием интегрирования применяется в том случае, если интеграл табличный или легко может быть сведен к табличному путем таких простых приемов, как вынесение постоянного множителя за знак интеграла, прием почленного интегрирования.

Основные неопределенные интегралы приведены в таблицах 1.1 и 1.2. Таблица 1.2 позволяет расширить возможности использования таблицы неопределенных интегралов для тех случаев, когда переменной интегрирования является некоторая функция, что будет проиллюстрировано далее при рассмотрении метода подведения под знак дифференциала. Рассмотрим примеры.

- **1.** $$\int(5x-3\sqrt[4]{x})\,dx = 5\int x\,dx - 3\int\sqrt[4]{x}\,dx = \left|\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\right| =$$ $$= 5\int x\,dx - 3\int x^{1/4}\,dx = \frac{5}{2}\,x^2 - 3\cdot\frac{4}{5}x^{5/4} = \frac{5}{2}\,x^2 - \frac{12}{5}\sqrt[4]{x^5} + C.$$

- **2.** $$\int(1-x)(2+3x)\,dx = \int(2+x-3x^2)\,dx = \left|\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\right| =$$ $$= 2\int dx + \int x\,dx - 3\int x^2\,dx = 2x + \frac{x^2}{2} - x^3 + C.$$

- **3.** $$\int(2+x^3)^2\,dx = \int(4+4x^3+x^6)\,dx =$$ $$= 4\int dx + 4\int x^3\,dx + \int x^6\,dx = 4x + 4\frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} = 4x + x^4 + \frac{x^7}{7} + C.$$

- **4.** $$\int\frac{\sqrt[3]{x}-x}{x^5}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{используем прием почленного}\\ \text{деления числителя на знаменатель}\end{array}\right| =$$

$$=\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x^5}dx - \int\frac{x}{x^5}dx = \int x^{-14/3}\,dx - \int x^{-4}\,dx = -\frac{3}{11}x^{-11/3} + \frac{1}{3x^3} + C.$$

- **5.** $$\int\frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{6^x}dx = 3\int\left(\frac{2}{6}\right)^x dx - 2\int\left(\frac{3}{6}\right)^x dx = \left|\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}\right| =$$ $$= 3\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\frac{1}{3}} - 2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C.$$

• **6**. $\int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\ dx\ =\ \int \frac{1-\cos x}{2}\ dx\ =\ \int \frac{1}{2}\ dx - \int \frac{\cos x}{2}\ dx =$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos x\, dx\ =\ \ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C.$$

• **7**. $\int \mathrm{tg}^2 x\ dx\ =\ \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\ dx\ =\ \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\ dx =$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)\ dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\ dx\ =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg} x - x + C.$$

• **8**. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\ dx\ =\ \int \frac{(1+x^2)+2x}{x(1+x^2)}\ dx =$

$$= \int \frac{(1+x^2)}{x(1+x^2)}\ dx\ +\ \int \frac{2x}{x(1+x^2)}\ dx = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \ln|x|\ +\ 2\mathrm{arctg} x + C.$$

• **9**. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx\ =\ \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}\, dx =$

$$= \int \frac{x^2+1}{1+x^2}\, dx\ -\ \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= x - \mathrm{arctg} x + C.$$

1.2.2. Интегрирование подведением под знак дифференциала

Данный метод, очень простой в своей основе, позволяет приводить интеграл к табличному, используя свойство инвариантности формул интегрирования. Таблица 1.2 неопределенных интегралов записана для случая, когда переменной интегрирования является функция $U(x)$.

Рассмотрим несколько табличных интегралов.

1. $\int U^n dU = \dfrac{U^{n+1}}{n+1} + C$:

$$\int \cos^3 x \; d(\cos x) = \frac{\cos^4 x}{4} + C,$$
$$\int (2x+5)^{15} \; d(2x+5) = \frac{(2x+5)^{16}}{16} + C,$$
$$\int (\ln x+3)^{1/2} d(\ln x+3) = \frac{(\ln x+3)^{3/2}}{3/2} + C.$$

2. $\int \dfrac{dU}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C$:

$$\int \frac{d(\cos 2x+1)}{\sqrt{\cos 2x+1}} = 2\sqrt{\cos 2x+1} + C,$$
$$\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2} + C,$$
$$\int \frac{d(\mathrm{arctg} x)}{\sqrt{\mathrm{arctg} x}} = 2\sqrt{\mathrm{arctg} x} + C.$$

3. $\int \dfrac{dU}{U} = \ln |\, U \,| + C$:

$$\int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x} = \ln |\arcsin x| + C,$$
$$\int \frac{d(3-2x)}{3-2x} = \ln |3-2x| + C,$$
$$\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \ln |1+x^2| + C.$$

4. $\int e^U dU = e^U + C$:

$$\int e^{x^2} d(x^2) = e^{x^2} + C,$$
$$\int e^{\mathrm{tg} x} d(\mathrm{tg} x) = e^{\mathrm{tg} x} + C,$$
$$\int e^{2-3x} d(2-3x) = e^{2-3x} + C.$$

5. $\int \dfrac{dU}{U^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{U-a}{U+a} \right| + C$:

$$\int \frac{d(5x)}{(5x)^2-9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{5x-3}{5x+3} \right| + C,$$
$$\int \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} \right| + C,$$
$$\int \frac{d(e^{3x})}{4-e^{6x}} = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{e^{3x}-2}{e^{3x}+2} \right| + C.$$

Таких примеров для каждого табличного интеграла можно привести сколько угодно. Все их объединяет то, что под знаком дифференциала в подынтегральном выражении стоит не просто переменная x, а такая функция $U(x)$, относительно которой данный интеграл является табличным.

Существует большой класс интегралов, в которых можно под знаком дифференциала сформировать нужное выражение и свести интеграл к табличному.

Подведение под знак дифференциала – это внесение под знак дифференциала либо постоянного слагаемого, либо постоянного множителя, либо функции, либо и того и другого вместе.

Напомним, что дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал независимой переменной

$$d\ f(x) = f'(x)\ dx,$$

а также, что свойства дифференциалов аналогичны свойствам производных функций.

Внесение под знак дифференциала постоянного слагаемого

По свойству дифференциала функции имеем:

$d(x+a) = (x+a)'\ dx = x' \cdot dx = dx \implies dx = d(x+a).$

Это значит, что *под знаком дифференциала к переменной интегрирования можно прибавить любое, нужное в данной ситуации, число* a

$$dx = d(x-1) = d(x+3) = d(x-\frac{1}{2}) = d(x+a).$$

Так, например:

1) $\int (x+3)^4 dx = \int (x+3)^4 d(x+3) = \dfrac{(x+3)^5}{5} + C,$

2) $\int \dfrac{dx}{x-3} = \int \dfrac{d(x-3)}{x-3} = \ln|x-3| + C,$

3) $\int \sqrt{x+5}\ dx = \int (x+5)^{1/2} d(x+5) = \dfrac{2}{3}(x+5)^{3/2} + C,$

4) $\int \sin(x+1)\, dx = \int \sin(x+1)\ d(x+1) = -\cos(x+1) + C,$

5) $\int \dfrac{dx}{\cos^2(x-6)} = \int \dfrac{d(x-6)}{\cos^2(x-6)} = \mathrm{tg}(x-6) + C.$

Внесение под знак дифференциала постоянного множителя

Так как $d(Cx) = (Cx)'\,dx = C \cdot dx$, то $dx = \dfrac{1}{C} \cdot d(Cx)$.

Это значит, что, *при введении под знак дифференциала множителя C перед знаком интеграла необходимо поставить поправочный коэффициент* $\dfrac{1}{C}$. Итак:

$$dx = \frac{1}{3}d(3x) = -d(-x) = 2d\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{5}{4}d\left(-\frac{4x}{5}\right) = \ldots.$$

Например:

1) $\displaystyle\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x\,d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C,$

2) $\displaystyle\int e^{-x/2}\,dx = -2\int e^{-x/2}\,d(-x/2) = -2 \cdot e^{-x/2} + C,$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+9x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d\ (3x)}{2^2+(3x)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\ \mathrm{arctg}\frac{3x}{2} + C.$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+7x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{d\ (\sqrt{7}x)}{\sqrt{4+(\sqrt{7}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \ln|\sqrt{7}x + \sqrt{4+7x^2}| + C.$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\ (\sqrt{2}x)}{\sqrt{3^2-(\sqrt{2}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arcsin\frac{\sqrt{2}x}{3} + C.$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{6x^2-4} = \frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{d\ (\sqrt{6}x)}{(\sqrt{6}x)^2-2^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2}\ln|\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}| + C.$

Можно объединить два предыдущих случая в один общий

$$d(Cx+a) = C\ dx \implies dx = \frac{1}{C} \cdot d(Cx+a)$$

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{6x-1} = \frac{1}{6}\int \frac{d(6x)}{6x-1} = \frac{1}{6}\int \frac{d(6x-1)}{6x-1} = \frac{1}{6}\ln|6x-1| + C,$

2) $\displaystyle\int (3-7x)^8\,dx = -\frac{1}{7}\int (3-7x)^8\ d\ (-7x) =$

$\displaystyle = -\frac{1}{7}\int (3-7x)^8\ d\ (3-7x) = -\frac{1}{7}\frac{(3-7x)^9}{9} = -\frac{(3-7x)^9}{63} + C.$

Внесение под знак дифференциала функций

Так как $d(x^2) = (x^2)'\,dx = 2xdx$, то $x\ dx = \dfrac{1}{2}d(x^2)$.

Аналогично: $d(e^x) = (e^x)'\,dx = e^x dx \implies e^x dx = d(e^x)$.
$d(\cos x) = (\cos x)'\,dx = -\sin x\ dx \implies \sin x dx = -d(\cos x)$ и т. д.

В таблице 1.3 приведены варианты подведения под знак дифференциала, которые используются при решении интегралов. В одном и том же интеграле могут использоваться последовательно несколько формул из этой таблицы.

Подведение под знак дифференциала **Таблица** 1.3.

1. $dx = d(x+a)$	12. $\cos x\, dx = d(\sin x)$
2. $dx = \frac{1}{c}\, d(cx)$	13. $\sin x\, dx = -d(\cos x)$
3. $dx = \frac{1}{c}\, d(cx+a)$	14. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\mathrm{tg}\ x)$
4. $x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1})$	15. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\mathrm{ctg}\ x)$
5. $x\ dx = \frac{1}{2} d(x^2)$	16. $\sin 2x dx = d(\sin^2 x)$
6. $x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3)$	17. $\sin 2x dx = -d(\cos^2 x)$
7. $\frac{dx}{x^2} = -d(\frac{1}{x})$	18. $\sin 2x dx = -\frac{1}{2} d(\cos 2x)$
8. $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$	19. $\frac{dx}{1+x^2} = d(\mathrm{arctg}\ x)$
9. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$	20. $\frac{dx}{1+x^2} = -d(\mathrm{arcctg}\ x)$
10. $a^x dx = \frac{d(a^x)}{\ln a}$	21. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$
11. $e^x dx = d(e^x)$	22. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d(\arccos x)$

После выполнения операции подведения под знак дифференциала нужно сопоставить полученный интеграл с табличным, обозначив мысленно все выражение, стоящее под знаком дифференциала, одной буквой (новой переменной интегрирования U.)

• **1**. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{3+x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}\ d(x^2)}{3+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{3+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(3+x^2)}{3+x^2} =$

$$= \left| \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, \quad \text{где} \quad u = (3+x^2) \right| = \frac{1}{2}\ln|x^2+3| + C.$$

• **2**. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{3+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{3+(x^2)^2} = \left| \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C, \right.$

$$\left. \text{где} \quad u = x^2 \right| = \frac{1}{2}\int\frac{du}{(\sqrt{3})^2+u^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{u}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{3}} + C.$$

• **3**. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x}} = -\frac{1}{5}\int \frac{d(-5x)}{\sqrt{3-5x}} = -\frac{1}{5}\int \frac{d\ (3-5x)}{\sqrt{3-5x}} =$

$$= \left| \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\ \sqrt{u} + C, \quad \text{где} \quad u = (3-5x) \right| = -\frac{2}{5}\sqrt{3-5x} + C.$$

• **4**. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{5-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{(\sqrt{5})^2-u^2}} = \left| \quad u = (2x), \right.$

$$\left. \int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C, \right| = \frac{1}{2}\arcsin\frac{u}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{5}} + C.$$

• **5**. $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt[5]{3-5x^3}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\sqrt[5]{3-5x^3}} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\int \frac{d(3-5x^3)}{\sqrt[5]{3-5x^3}} =$

$$= -\frac{1}{15}\int(3-5x^3)^{-1/5}\ d(3-5x^3) \ = \left| \int u^{-1/5}\ du = \frac{5}{4}(u)^{4/5} + C, \quad = \right.$$

$$\left. \text{где} \quad u = (3-5x^3) \right| = -\frac{1}{15}\cdot\frac{5}{4}(3-5x^3)^{4/5} = -\frac{1}{12}\sqrt[5]{(3-5x^3)^4} + C.$$

• **6**. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\ (1+4\sqrt{x})^2} = \int \frac{1}{(1+4\sqrt{x})^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{2\ d(\sqrt{x})}{(1+4\sqrt{x})^2} =$

$$= 2\cdot\frac{1}{4}\int\frac{d\ (4\sqrt{x}+1)}{(1+4\sqrt{x})^2} = \left| \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C, \quad \text{где} \quad u = (1+4\sqrt{x}) \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+4\sqrt{x}} + C.$$

• **7**. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int e^{\sqrt{x}}\cdot 2\ d(\sqrt{x}) = 2\int e^{\sqrt{x}}d(\sqrt{x}) =$

$$= \Big|\ \int e^{u}\ du = e^{u} + C, \quad \text{где} \quad u = \sqrt{x}\ \ \Big| = 2\ e^{\sqrt{x}} + C.$$

• **8**. $\displaystyle\int x^3 e^{1-x^4}\,dx = \int e^{1-x^4}\cdot x^3\ dx = \frac{1}{4}\int e^{1-x^4}\cdot d(x^4) =$

$$= -\frac{1}{4}\int e^{1-x^4}d(-x^4) = -\frac{1}{4}\int e^{1-x^4}d(1-x^4) = -\frac{1}{4}e^{1-x^4} + C.$$

• **9**. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2\ln x+5}}{x}\,dx = \int \sqrt{2\ln x+5}\cdot\frac{dx}{x} = \int (2\ln x+5)^{1/2}\ d(\ln x) =$

$$= \frac{1}{2}\int (2\ln x+5)^{1/2}\ d(2\ln x+5) = \Big|\ \int (u)^{1/2}\,d(u) = \frac{2}{3}(u)^{3/2} + C,$$

$$\text{где} \quad u = (2\ln x + 5)\ \ \Big| = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\ (2\ln x+5)^{3/2} = \frac{1}{3}(2\ln x+5)^{3/2} + C.$$

• **10**. $\displaystyle\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x - 4}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\sin 3x\cdot d(3x)}{\cos^2 3x - 4} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(\cos 3x)}{\cos^2 3x - 2^2} =$

$$= \Big|\ \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C\ \ \Big| = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos 3x - 2}{\cos 3x + 2}\right| + C.$$

• **11**. $\displaystyle\int \frac{\sin(2/x)}{x^2}\,dx = \int \sin(2/x)\cdot\frac{dx}{x^2} = \int \sin(2/x)\cdot d\left(-\frac{1}{x}\right) =$

$$= -\frac{1}{2}\int \sin(2/x)\cdot d\left(\frac{2}{x}\right) = \Big|\int \sin u\ du = -\cos u + C\Big| = \frac{1}{2}\cdot\cos(2/x) + C.$$

• **12**. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x} = \int \frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x} =$

$$= |\ \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, \quad \text{где} \quad u = \arcsin x\ \ | = \ln|\arcsin x| + C.$$

• **13**. $\displaystyle\int \frac{e^x\ dx}{\sqrt{4e^{2x}+3}} = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{(2e^x)^2+3}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2e^x)}{\sqrt{(2e^x)^2+(\sqrt{3})^2}} =$

$$= \left| \int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2+a^2}| + C \right| = \frac{1}{2}\ln|2e^x+\sqrt{4e^{2x}+3}\ | + C.$$

• **14**. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos 3x} = \int \frac{dx}{2\sin^2\frac{3x}{2}} = \frac{1}{2}\ \int \frac{dx}{\sin^2\frac{3x}{2}} = \frac{1}{2}\ \int \frac{\frac{2}{3}\ d(3x/2)}{\sin^2\frac{3x}{2}} =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\ \int \frac{d(3x/2)}{\sin^2\frac{3x}{2}} = \left|\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C\right| = -\frac{1}{3}\cdot \mathrm{ctg}\frac{3x}{2} + C.$$

• **15**. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x\ (2+5\mathrm{tg}x)} = \int \frac{1}{2+5\mathrm{tg}x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\mathrm{tg}x)}{2+5\mathrm{tg}x} =$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{d(5\mathrm{tg}x+2)}{2+5\mathrm{tg}x} = \left|\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C\right| = \frac{1}{5}\ln|2+5\mathrm{tg}x| + C.$$

• **16**. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+9x^2)\ \mathrm{arctg}^5 3x} = \int \frac{1}{\mathrm{arctg}^5 3x}\cdot\frac{dx}{(1+9x^2)} =$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\mathrm{arctg}^5 3x}\cdot\frac{d(3x)}{(1+(3x)^2)} = \frac{1}{3}\int \frac{d(\mathrm{arctg}3x)}{\mathrm{arctg}^5 3x} =$$

$$= \left|\int \frac{du}{u^5} = \int (u)^{-5}\ du = \frac{u^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4u^4} + C\right| = -\frac{1}{12\ \mathrm{arctg}^4(3x)} + C.$$

• **17**. $\displaystyle\int\frac{(x+3)\ dx}{2-7x^2} = \int\frac{x\ dx}{2-7x^2} + \int\frac{3\ dx}{2-7x^2}\ dx = \int\frac{\frac{1}{2}d(x^2)}{2-7x^2} - 3\int\frac{dx}{7x^2-2} =$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\int\frac{d(2-7x^2)}{2-7x^2} - \frac{3}{\sqrt{7}}\int\frac{d(\sqrt{7}x)}{(\sqrt{7}x)^2-(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \left|\ \int\frac{du}{u} = \ln|u| + C, \quad \int\frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C\right| =$$

$$= -\frac{1}{14}\ln|2-7x^2| - \frac{3}{2\sqrt{14}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}x-\sqrt{2}}{\sqrt{7}x+\sqrt{2}}\right| + C.$$

1.2.3. Интегрирование по частям

В основе метода интегрирования по частям лежит формула–схема

$$\boxed{\int U\,dV = UV - \int V\,dU.}$$

Метод используется при интегрировании некоторых трансцендентных функций и произведения разнородных функций. Только по частям берутся интегралы следующих типов

Тип I $\int P_n(x)\ e^{\alpha x}\ dx$, $\int P_n(x)\ a^{\alpha x}\ dx$,
$\int P_n(x)\ \cos\beta x\ dx$, $\int P_n(x)\ \sin\beta x\ dx$.

Тип II $\int \ln x\ dx$, $\int Q_r(x)\ln^n x\ dx$, $\int \arcsin x\ dx$,
$\int \mathrm{arctg} x\ dx$, $\int Q_r(x)\ \arcsin x\ dx$, $\int Q_r(x)\ \mathrm{arctg} x\ dx$.

Тип III $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\ dx$, $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\ dx$.

Здесь $P_n(x)$ – многочлен целой степени относительно x для интегралов I-ой группы. Для интегралов II-ой группы $Q_r(x)$ может быть как целой так и иррациональной алгебраической функцией.

Схема интегрирования по частям предполагает предварительное разбиение подынтегрального выражения на произведение двух сомножителей U и dV. При этом основным критерием правильности разбиения служит то, что интеграл в правой части схемы $\int U\,dV$ должен быть проще или, по крайней мере, не сложнее исходного интеграла $\int V\,dU$, а функция V по ее дифференциалу dV определялась достаточно легко.

Применяя метод интегрирования по частям, следует руководствоваться следующим правилом:

1. Если в подынтегральное выражение входит произведение многочлена на показательную или тригонометрическую функцию, то в качестве функции U берется многочлен (интегралы I-го типа.)

2. За U всегда берутся логарифмическая и обратные тригонометрическме функции (интегралы II-го типа.)

В интегралах III-его типа, которые называются циклическими, все равно, что взять за U– показательную или тригонометрическую функцию. Следует учесть, что при необходимости схему интегрирования по частям можно применять повторно.

Рекомендации по разбиению подынтегрального выражения на множители приведены в таблице 1.4.

Реализация схемы интегрирования по частям Таблица 1.4.

1	$\int (x+2)\sin 3x dx$	$u = x+2 \quad du = dx$ $dv = \sin 3x\, dx \quad v = -\frac{1}{3}\cos 3x$
	$\int (5x-1)e^{-x/2}\, dx$	$u = 5x-1 \quad du = 5dx$ $dv = e^{-x/2}\, dx \quad v = -2e^{-x/2}$
	$\int x^2 \cos\frac{x}{3} dx$	$u = x^2 \quad du = 2xdx$ $dv = \cos\frac{x}{3}\, dx \quad v = 3\sin\frac{x}{3}$
2	$\int \ln x dx$	$u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x}$ $dv = dx \quad v = x$
	$\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx$	$u = \ln^2 x \quad du = \frac{2\ln x}{x} dx$ $dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad v = 2\sqrt{x}$
	$\int \ln(x^2+5) dx$	$u = \ln(x^2+5) \quad du = \frac{2x}{x^2+5} dx$ $dv = dx \quad v = x$
	$\int \arcsin x\, dx$	$u = \arcsin x \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $dv = dx \quad v = x$
	$\int x \cdot \mathrm{arctg}\ x\, dx$	$u = \mathrm{arctg}\ x \quad du = \frac{dx}{1+x^2}$ $dv = xdx \quad v = \frac{x^2}{2}$

• **1**. $\int(2x+3)\cos 5x\,dx = \left|\begin{array}{ll} U=2x+3 & dV=\cos 5x\,dx \\ dU=2\cdot dx & V=\int\cos 5x\,dx=\dfrac{1}{5}\sin 5x \end{array}\right| =$

$$= (2x+3)\frac{1}{5}\sin 5x - \frac{2}{5}\int \sin 5x\,dx = \frac{2x+3}{5}\sin 5x + \frac{2}{25}\cos 5x + C.$$

• **2**. $\int x\ \sin^2 x\,dx = \dfrac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)\,dx = \dfrac{1}{2}\int x\,dx - \dfrac{1}{2}\int x\ \cos 2x\,dx =$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\int x\ \cos 2x\,dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\left(x\ \sin 2x + \frac{1}{2}\ \cos 2x\right) + C.$$

Второй интеграл вычислялся по частям аналогично примеру 1.

• **3**. $\int \dfrac{x\,dx}{\sin^2 x} = \left|\begin{array}{cc} U=x & dU=dx \\ dV=\dfrac{dx}{\sin^2 x} & V=\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}x \end{array}\right| =$

$$= -x\cdot\mathrm{ctg}x + \int \mathrm{ctg}x\,dx = -x\cdot\mathrm{ctg}x + \ln|\sin x| + C.$$

• **4**. $\int \dfrac{x\ \sin x\,dx}{\cos^3 x} = \left|\begin{array}{cc} U=x & dU=dx \\ dV=\dfrac{\sin x\ dx}{\cos^3 x} & V=\int\dfrac{\sin x\ dx}{\cos^3 x}= \\ & =\int\dfrac{-d(\cos x)}{\cos^3 x}=\dfrac{1}{2\cos^2 x} \end{array}\right| =$

$$= x\ \frac{1}{2\cos^2 x} - \int\frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\ \mathrm{tg}x + C.$$

• **5**. $\int x\ \mathrm{tg}^2x\,dx = \left|\begin{array}{cc} U=x & dU=dx \\ dV=\mathrm{tg}^2x\,dx & V=\int\mathrm{tg}^2x\,dx=\mathrm{tg}x-x \end{array}\right| =$

(Интеграл $\int \mathrm{tg}^2x\,dx$ уже был решен ранее.)

$$= x\ (\mathrm{tg}x - x) - \int(\mathrm{tg}x - x)\ dx = x\ (\mathrm{tg}x - x) + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + C.$$

• **6**. $\int x\cdot e^{-x}\,dx = \left|\begin{array}{cc} U=x & dU=dx \\ dV=e^{-x}\ dx & V=\int e^{-x}\ dx=-e^{-x} \end{array}\right| =$

$$= -x\cdot e^{-x} - \int\left(-e^{-x}\right)\cdot dx = -x\cdot e^{-x} - \int e^{-x}\cdot d(-x) = -x\cdot e^{-x} - e^{-x} + C.$$

• **7**. $\int x^3 \cdot e^{x^2}\, dx = \int x^2 \cdot e^{x^2}\, x\ dx = \frac{1}{2}\int x^2 \cdot e^{x^2}\, d(x^2) =$

$$= \left| \begin{array}{cc} U = x^2 & dU = 2x\ dx \\ dV = e^{x^2}\, d(x^2) & V = \int e^{x^2}\, dx^2 = e^{x^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot e^{x^2} - \int e^{x^2} \cdot 2x\ dx\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot e^{x^2} - \int e^{x^2} \cdot d(x^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot e^{x^2} - e^{x^2}\right) = \frac{1}{2}\, e^{x^2}\,(x^2 - 1) + C.$$

• **8**. $\int (x^2+2x-1)\, e^{3x}\, dx = \left| \begin{array}{cc} U = x^2+2x-1 & dU = (2x+2)\, dx \\ dV = e^{3x}\, dx & V = \frac{1}{3}\, e^{3x} \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{3}(x^2+2x-1)\, e^{3x} - \frac{2}{3}\int (x+1) e^{3x}\ dx = \left| \begin{array}{cc} U = x+1 & dU = dx \\ dV = e^{3x} dx & V = \frac{1}{3}\, e^{3x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+2x-1)\, e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\,(x+1)\, e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\, dx\right) =$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}\,(x^2+2x-1) - \frac{2e^{3x}}{9}\,(x+1) + \frac{2e^{3x}}{27} = \frac{e^{3x}}{27}\,(9x^2+12x-13) + C.$$

• **9**. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = \left| \begin{array}{cc} U = \ln x & dU = \frac{dx}{x} \\ dV = \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} & V = \int (x)^{-2/3}\ dx = 3\ x^{1/3} \end{array} \right| =$

$$= 3\ x^{1/3} \ln x - 3\int x^{1/3} \cdot \frac{dx}{x} = 3\ x^{1/3} \ln x - 3\int (x)^{-2/3}\, dx =$$

$$= 3\ x^{1/3} \ln x - 9x^{1/3}\, dx = 3\sqrt[3]{x}\ (\ln x - 3) + C.$$

• **10**. $\int x^2 \ln^2 x\ dx = \left| \begin{array}{cc} U = \ln^2 x & dU = \frac{2\ln x\ dx}{x} \\ dV = x^2\ dx & V = \frac{1}{3}\, x^3 \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln^2 x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{2\ln x\ dx}{x} = \frac{1}{3}x^3 \ln^2 x - \frac{2}{3}\int x^2 \ln x\ dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} U = \ln x & dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = x^2\ dx & V = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x}\right) =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\ dx\right) = \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2x^3}{9}\ln x + \frac{2x^3}{27} =$$

$$= \frac{x^3}{27}\big(9\ln^2 x - 6\ln x + 2\big) + C.$$

• **11**. $\int x^2 \cdot \ln(1+x^3)\, dx = \int \ln(1+x^3)\cdot x^2 \cdot dx =$

$$= \frac{1}{3}\int \ln(1+x^3)\, d(x^3+1) = \frac{1}{3}\int \ln t\, dt = \left| \begin{array}{ll} U = \ln t & dU = \dfrac{dt}{t} \\ dV = dt & V = t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\left(t\cdot\ln t - \int t\cdot\frac{dt}{t}\right) = \frac{1}{3}\left(t\cdot\ln t - \int dt\right) = \frac{1}{3}\,(t\cdot\ln t - t) =$$

$$= \frac{t}{3}\,(\ln t - 1) = \frac{1+x^3}{3}\,\big(\ln(1+x^3) - 1\big) + C.$$

• **12**. $\int \operatorname{arctg}\, 2x\, dx = \left| \begin{array}{ll} U = \operatorname{arctg}\, 2x & dU = \dfrac{2dx}{1+4x^2} \\ dV = dx & V = x \end{array} \right| =$

$$= x\ \operatorname{arctg}\ 2x - \int \frac{2x\ dx}{1+4x^2} = x\ \operatorname{arctg}\ 2x - \int \frac{d(x^2)}{1+4x^2} =$$

$$= x\ \operatorname{arctg}\ 2x - \frac{1}{4}\int \frac{d(4x^2+1)}{1+4x^2} = x\cdot\operatorname{arctg}\ 2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2) + C.$$

• **13**. $\int \frac{x\cdot\operatorname{arctg}\, x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \left| \begin{array}{ll} U = \operatorname{arctg}\, x & dU = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dV = \dfrac{x\cdot dx}{\sqrt{1+x^2}} & V = \displaystyle\int \frac{x\cdot dx}{\sqrt{1+x^2}} = \\ & = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{x^2+1} \end{array} \right| =$

$$= \sqrt{x^2+1}\ \operatorname{arctg}\ x - \int \frac{\sqrt{x^2+1}\ dx}{1+x^2} = \sqrt{x^2+1}\ \operatorname{arctg}\ x - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \sqrt{x^2+1}\ \operatorname{arctg}\ x - \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C.$$

$$\bullet\ \mathbf{14.}\quad \int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\,dx = \left|\begin{array}{ll} U=\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} & dV=dx \\ dU=\dfrac{1}{1+2x-1}\cdot\dfrac{2\ dx}{2\sqrt{2x-1}}= & \\ \quad =\dfrac{dx}{2x\cdot\sqrt{2x-1}} & V=x \end{array}\right| =$$

$$= x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} - \int\frac{x\ dx}{2x\ \sqrt{2x-1}} = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}} =$$

$$= x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} - \frac{1}{4}\int\frac{d(2x-1)}{\sqrt{2x-1}} =$$

$$= x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} - \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{2x-1} = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\ \sqrt{2x-1} + C.$$

$$\bullet\ \mathbf{15.}\quad \int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \left|\begin{array}{ll} U=\arcsin x & dU=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dV=\dfrac{dx}{\sqrt{1+x}} & V=\displaystyle\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+x}}= \\ & =\displaystyle\int\dfrac{d(x+1)}{\sqrt{1+x}}=2\sqrt{1+x} \end{array}\right| =$$

$$= 2\sqrt{1+x}\ \arcsin x - 2\int\sqrt{1+x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 2\sqrt{1+x}\ \arcsin x - 2\int\sqrt{1+x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} =$$

$$= 2\sqrt{1+x}\ \arcsin x - 2\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{1+x}\ \arcsin x + 2\int\frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= 2\sqrt{1+x}\ \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C.$$

Циклические интегралы

$$\bullet\ \mathbf{16.}\quad \int e^{2x}\sin 3x\,dx = \left|\begin{array}{ll} U=e^{2x} & dU=2e^{2x} \\ dV=\sin 3x\,dx & V=-\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx =$$

к интегралу $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ также применим формулу интегрирования по частям

$$= \left| \begin{array}{ll} U = e^{2x} & dU = 2e^{2x} \\ dV = \cos 3x\, dx & V = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\, dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x\, dx$$

Таким образом, мы вновь пришли к исходному интегралу и, если отбросить все промежуточные выкладки, то можно записать равенство

$$\int e^{2x}\sin 3x\, dx = \frac{e^{2x}}{9}(2\sin 3x - 3\cos 3x) - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x\, dx,$$

которое можно рассматривать как уравнение относительно искомого интеграла. Решаем это уравнение

$$\left(1 + \frac{4}{9}\right)\int e^{2x}\sin 3x\, dx = \frac{e^{2x}}{9}(2\sin 3x - 3\cos 3x).$$

Отсюда получаем $\quad \dfrac{13}{9}\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\, dx = \dfrac{e^{2x}}{9}(2\sin 3x - 3\cos 3x),$

$$\int e^{2x}\sin 3x\, dx = \frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C.$$

• **17**. $\displaystyle\int \cos(\ln x)\, dx = \left| \begin{array}{ll} U = \cos(\ln x) & dU = -\sin(\ln x)\dfrac{dx}{x} \\ dV = dx & V = x \end{array} \right| =$

$$= x\cos(\ln x) + \int x\sin(\ln x)\frac{dx}{x} = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx =$$

к интегралу $\int \sin(\ln x)\, dx$ также применим формулу интегрирования по частям

$$= \left| \begin{array}{ll} U = \sin(\ln x) & dU = \cos(\ln x)\dfrac{dx}{x} \\ dV = dx & V = x \end{array} \right| =$$

$$= x\cos(\ln x) + \left(x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\frac{dx}{x}\right) =$$

$$= x\,[(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] - \int \cos(\ln x)\,dx.$$

Таким образом, мы вновь пришли к исходному интегралу и, если отбросить все промежуточные выкладки, то можно записать равенство

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\,[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] - \int \cos(\ln x)\,dx,$$

которое можно рассматривать как уравнение относительно искомого интеграла. Решаем это уравнение

$$2\int \cos(\ln x)dx = x\,[\ \cos(\ln x) + \sin(\ln x)\ ]\,.$$

Отсюда получаем $\quad \displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}[\ \cos(\ln x) + \sin(\ln x)\ ] + C.$

• **18**. $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \left|\begin{array}{ll} U = \sqrt{1+x^2} & dU = \dfrac{x\ dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dV = dx & V = x \end{array}\right| =$

$$= x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int x\cdot\frac{x\ dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int\frac{x^2\ dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int\frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int\frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx +$$

$$+ \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}\,dx + \ln|x+\sqrt{1+x^2}\ |.$$

Таким образом, мы в процессе решения получили выражение, содержащее исходный интеграл, и, если отбросить все промежуточные выкладки, то можно записать равенство

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx = x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}\,dx + \ln|x+\sqrt{1+x^2}\ |,$$

которое можно рассматривать как уравнение относительно искомого интеграла. Решаем это уравнение

$$2\int\sqrt{1+x^2}\,dx = x\cdot\sqrt{1+x^2} + \ln|x+\sqrt{1+x^2}\ |.$$

Откуда получаем

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}\ | + C.$$

З а м е ч а н и е. В заключение рассмотрения метода интегрирования по частям отметим, что при решении интегралов этим методом можно получить такие интегралы, решение которых требует знания метода замены переменной или, например, умения интегрировать такие классы функций, как рациональные дроби, иррациональные и тригонометрические функции. Если такая ситуация возникла, то можно на время оставить решение интеграла и вернуться к нему после того, как будут изучены необходимые разделы. Приведем несколько примеров.

• **19**. $$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} U = \operatorname{arctg}\sqrt{x} & dU = \dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \\ dV = dx & V = x \end{array} \right| =$$

$$= x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}\,dx = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx.$$

Мы получили интеграл, содержащий иррациональность. Решение интеграла требует применения метода подстановки, который будет рассмотрен в следующем параграфе.

• **20**. $$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} U = \arcsin x & dU = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dV = \dfrac{dx}{x^2} & V = -\dfrac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{x}\cdot\arcsin x + \int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-x^2}}.$$

Мы также получили интеграл от иррациональной функции, для нахождения которого применяется тригонометрическая подстановка.

• **21**. $$\int \frac{\ln x}{(x-1)^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} U = \ln x & dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = \dfrac{dx}{(x-1)^2} & V = -\dfrac{1}{x-1} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{x-1}\cdot\ln x + \int\frac{dx}{x\cdot(x-1)}.$$

• **22**. $$\int x^3\cdot\operatorname{arctg}\,x\,dx = \left| \begin{array}{ll} U = \operatorname{arctg}\,x & dU = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dV = x^3\,dx & V = \dfrac{1}{4}\,x^4 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^4}{4}\cdot\operatorname{arctg}\,x - \int\frac{x^4\,dx}{4\cdot(1+x^2)}.$$

В этих примерах после интегрирования по частям получаются интегралы от рациональных дробей. Интегрирование этого класса функций будет рассмотрено ниже.

1.2.4. Метод подстановки. Замена переменной

Метод подстановки или метод замены переменной является одним из самых сильных методов интегрирования.

Метод основан на использовании формулы

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f\,[\,\varphi(t)\,]\,\varphi_t'(t)\,dt,}$$

которую называют формулой подстановки или замены переменной.

При проведении замены переменной в интеграле $\int f(x)\,dx$ необходимо:

1) выбрать подстановку $\phi(x) = t$ или замену переменной $x = \varphi(t)$,

2) преобразовать подынтегральную функцию $f(x)$ с учетом выбранной подстановки или замены переменной,

3) найти $dx = \varphi_t'(t)dt$,

4) подставить все в исходный интеграл и найти его,

5) вернуться в ответе к старой переменной x.

При выборе подстановки необходимо руководствоваться одним единственным критерием, что хороша только та подстановка, которая приводит к более простому интегралу, чем исходный.

Метод замены переменной применяется при решении интегралов от иррациональных, тригонометрических, трансцендентных функций.

З а м е ч а н и е. Рассмотренный нами ранее как самостоятельный метод подведения под знак дифференциала по сути дела является иллюстрацией метода замены переменной, так как вместо некоторого выражения, стоящего под знаком дифференциала, мы записывали новую переменную U.

Проиллюстрируем на примерах применение метода подстановки.

• **1**. $\int x^2 \cdot \sqrt{x+7}\,dx =$

1) Применим подстановку $\sqrt{x+7} = t$.

2) Найдем $x + 7 = t^2$, $x = t^2 - 7$, $dx = (t^2 - 7)'dt = 2t\,dt$.

3) Подставим в исходный интеграл и проинтегрируем

$$= \int (t^2-7)^2 \cdot t \cdot 2t\,dt = 2\int t^2\ (t^2-7)^2\,dt = 2\int t^2\ (t^4-14t^2+49)\,dt =$$

$$= 2\int (t^6-14t^4+49t^2)\,dt = 2\left(\frac{t^7}{7} - 14\frac{t^5}{5} + 49\frac{t^3}{3}\right).$$

4) Возвращаемся к старой переменной x с помощью обратной замены: $t = \sqrt{x+7}$

$$\int x^2\sqrt{x+7}\,dx = \frac{2}{7}\sqrt{(x+7)^7} - \frac{28}{5}\sqrt{(x+7)^5} + \frac{98}{3}\sqrt{(x+7)^3} + C.$$

• **2**. $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}} = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{t} \\ dx = -\dfrac{1}{t^2}dt = -\dfrac{dt}{t^2} \end{array} \right| = -\int \frac{\dfrac{dt}{t^2}}{(1/t^3)\sqrt[3]{2-(1/t^3)}} =$$

$$= -\int \frac{\dfrac{dt}{t^2}}{(1/t^3)(1/t)\sqrt[3]{2t^3-1}} = -\int \frac{\dfrac{dt}{t^2}\cdot t^4}{\sqrt[3]{2t^3-1}} = -\int \frac{t^2\cdot dt}{\sqrt[3]{2t^3-1}} =$$

Выполняем подведение под знак дифференциала

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{d(t^3)}{\sqrt[3]{2t^3-1}} = -\frac{1}{6}\int \frac{d(2t^3-1)}{\sqrt[3]{2t^3-1}} = -\frac{1}{6}\int \frac{d(U)}{\sqrt[3]{U}} = -\frac{1}{6}\int U^{-1/3}\,dU =$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}U^{2/3} = -\frac{1}{4}(2t^3-1)^{2/3} = \left|\ t = \frac{1}{x}\ \right| = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{x^2} + C.$$

• **3**. $$\int \sqrt{e^x+2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{e^x+2} = t, \quad e^x+2 = t^2,\ e^x = t^2-2, \\ x = \ln(t^2-2), \quad dx = (\ln(t^2-2))'\cdot dt = \dfrac{2t\,dt}{t^2-2} \end{array} \right| =$$

$$= \int t\cdot\frac{2t\,dt}{t^2-2} = 2\int \frac{t^2\,dt}{t^2-2} =$$

Прибавим и отнимем в числителе число 2, сгруппируем и почленно разделим

$$= 2\int \frac{(t^2-2)+2}{t^2-2}\,dt = 2\left(\int \frac{t^2-2}{t^2-2}\,dt + \int \frac{2}{t^2-2}\,dt\right) =$$

$$= 2\int dt + 4\int \frac{dt}{t^2-2} = 2t + 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| =$$

$$= \left|\ t = \sqrt{e^x+2}\ \right| = 2\sqrt{e^x+2} + \sqrt{2}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{e^x+2}+\sqrt{2}}\right| + C.$$

• **4**. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)^5} = \left| \begin{array}{ll} x+1=t, & x=t-1, \\ dx=(t-1)'dt=dt & \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{(t-1)^2}{t^5}\,dt = \int \frac{t^2-2t+1}{t^5}\,dt = \int \left(\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t^4} + \frac{1}{t^5}\right)\,dt =$$

$$= \int (t^{-3} - 2t^{-4} + t^{-5})\,dt = \frac{t^{-2}}{-2} - 2\frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-4}}{-4} =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + \frac{2}{3t^3} - \frac{1}{4t^4} = \left|\ t = x+1\ \right| =$$

$$= -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{2}{3(x+1)^3} - \frac{1}{4(x+1)^4} + C.$$

• **5**. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \left| \begin{array}{l} x = \mathrm{tg}\ t, \\ dx = (\mathrm{tg}\ t)'dt = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{dt}{\cos^2 t}}{(\mathrm{tg}^2 t+1)^2} =$

Воспользовавшись известной формулой $(1+\mathrm{tg}^2 t) = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, получим

$$= \int \frac{\dfrac{dt}{\cos^2 t}}{(1/\cos^2 t)^2} = \int \frac{\cos^4 t}{\cos^2 t}\,dt = \int \cos^2 t\,dt =$$

Применим формулу понижения степени $\quad \cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot t + \frac{1}{4}\int \cos 2t\,d(2t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t =$$

Возвращаемся к старой переменной x с помощью обратной замены: $t = \mathrm{arctg}\ x$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\mathrm{arctg}\ x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2(\mathrm{arctg}\ x) = \frac{\mathrm{arctg}\ x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + C.$$

З а м е ч а н и е. В некоторых интегралах, содержащих иррациональности, после замены переменной получается интеграл, который следует брать по частям. Например:

• **6**. $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx = \left|\ x = t^2, \quad dx = 2t\cdot dt\right| = 2\int t\cdot\cos t\ \cdot dt = \ldots$

• **7**. $\displaystyle\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx = \left|\ x = t^3, \quad dx = 3t^2\cdot dt\right| = 3\int t^2\cdot e^t\ \cdot dt = \ldots$

1.3. Классы интегрируемых функций

Перейдем к вопросу об использовании рассмотренных методов при интегрировании основных классов функций.

1.3.1. Интегралы вида $\int \frac{(Ax+B)\,dx}{ax^2+bx+c}$, $\quad \int \frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Рассмотрим вопрос об интегрировании функций, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе дроби. При этом, независимо от того, стоит ли квадратный трехчлен под знаком квадратного корня или нет, интегрирование проводится по следующей схеме:

1) в квадратном трехчлене выделяется полный квадрат
$ax^2+bx+c = a(x+b/2a)^2 + c - (b/2a)^2$;

2) вводится новая переменная $\quad a + b/2a = t$;

3) полученный интеграл, при необходимости, разбивается на два интеграла, один из которых – всегда табличный, а другой приводится к табличному подведением под знак дифференциала;

4) возвращаются к старой переменной.

$$\bullet\ \mathbf{1}.\quad \int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \left| \begin{array}{l} 3+2x-x^2 = 3-(x^2-2x) = \\ = 3-[(x^2-2\cdot x\cdot 1+1)-1] = \\ = 3-[(x-1)^2-1] = 4-(x-1)^2, \\ \quad x-1=t; \quad x=t+1; \quad dx=dt \\ \ 3+2x-x^2 = 4-t^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \ \arcsin\frac{t}{2} = \arcsin\frac{(x-1)}{2} + C.$$

$$\bullet\ \mathbf{2}.\quad \int \frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \left| \begin{array}{l} x^2+x+1 = \left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 1 = \\ = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \\ x+1/2=t; \quad x=t-1/2; \quad dx=dt \\ x^2+x+1 = t^2+3/4 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2(t-1/2)-1}{\sqrt{t^2+3/4}}dt = \int \frac{2t-2}{\sqrt{t^2+3/4}}\,dt = \int \frac{2t\,dt}{\sqrt{t^2+3/4}} - \int \frac{2\,dt}{\sqrt{t^2+3/4}} =$$

$$= \int \frac{d(t^2+3/4)}{\sqrt{t^2+3/4}} - \int \frac{2\,dt}{\sqrt{t^2+3/4}} = 2\sqrt{t^2+3/4} - 2\ln\left|\ t + \sqrt{t^2+3/4}\ \right| =$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1} - 2\ \ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\ \right| + C.$$

• **3**. $$\int\frac{dx}{x^2+4x+10}=\left|\begin{array}{l}x^2+4x+10=(x^2+2\cdot x\cdot 2+4)-4+10=(x+2)^2+6\\ x+2=t;\quad x=t-2;\quad dx=dt\\ x^2+4x+10=t^2+6\end{array}\right|=$$
$$=\int\frac{dt}{t^2+6}=\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.$$

• **4**. $$\int\frac{(3x+5)\,dx}{x^2+6x-7}=\left|\begin{array}{l}x^2+6x-7=(x^2+2\cdot x\cdot 3+9)-9-7=(x+3)^2-16\\ x+3=t;\quad x=t-3;\quad dx=dt\\ x^2+6x-7=t^2-16\end{array}\right|=$$
$$=\int\frac{(3(t-3)+5)dt}{t^2-16}=\int\frac{(3t-4)dt}{t^2-16}=\int\frac{3t\,dt}{t^2-16}-\int\frac{4\,dt}{t^2-16}=$$
$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(t^2-16)}{t^2-16}-4\int\frac{dt}{t^2-4^2}=\frac{3}{2}\ln|\ t^2-16\ |-4\frac{1}{8}\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right|=$$
$$=\frac{3}{2}\ln|x^2+6x-7|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+3)-4}{(x+3)+4}\right|=$$
$$=\frac{3}{2}\ \ln|x^2+6x-7|-\frac{1}{2}\ \ln\left|\frac{x-1}{x+7}\right|+C.$$

• **5**. $$\int\frac{(x+2)\,dx}{x^2+x+1}=\left|\begin{array}{l}x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\\ x+1/2=t;\quad x=t-1/2;\quad dx=dt\\ x^2+x+1=t^2+3/4\end{array}\right|=$$
$$=\int\frac{(t-1/2)+2}{t^2+3/4}\,dt=\int\frac{t+3/2}{t^2+3/4}\,dt=\int\frac{t\,dt}{t^2+3/4}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+3/4}=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+3/4)}{t^2+3/4}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+3/4}=\frac{1}{2}\ \ln|t^2+3/4|+\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3/2}}\ \mathrm{arctg}\ \frac{t}{\sqrt{3/2}}=$$
$$=\frac{1}{2}\ \ln|x^2+x+1|+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

З а м е ч а н и е. Если квадратный трехчлен в знаменателе дроби имеет коэффициент при x^2, то имеет смысл вынести этот коэффициент из знаменателя за знак интеграла и далее проводить вычисления так, как было показано в предыдущих примерах. Например:

• $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4x-9x^2+1}}=\int\frac{x\,dx}{3\cdot\sqrt{\frac{4}{9}x-x^2+\frac{1}{9}}}=\frac{1}{3}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\frac{4}{9}x-x^2+\frac{1}{9}}}=\ldots$$

• $$\int\frac{(4-3x)\,dx}{5x^2+6x+18}=\int\frac{(4-3x)\,dx}{5(x^2+\frac{6}{5}x+\frac{18}{5})}=\frac{1}{5}\int\frac{(4-3x)\,dx}{x^2+\frac{6}{5}x+\frac{18}{5}}=\ldots$$

1.3.2. Интегрирование рациональных дробей

Рациональная дробь есть отношение двух многочленов целой степени

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}.$$

Если $n < m$, то дробь называется правильной. Если $n \geq m$, то дробь называется неправильной.

Прежде, чем интегрировать неправильные дроби, следует обязательно выделить целую часть дроби путем деления многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$. Эта операция подобна выделению целой части неправильной числовой дроби. Например,

- $\dfrac{3x+5}{2x-1} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{13}{2(2x-1)}.$

В данном примере $\dfrac{3}{2}$ –целая часть, $\dfrac{13}{2(2x-1)}$ – правильная дробь.

- $\dfrac{3x^3-4x^2+x-5}{x^2-2x-1} = \underbrace{(3x+2)+}_{\text{целая часть}} \underbrace{\dfrac{8x-3}{x^2-2x-1}}_{\text{правильная дробь}}.$

- $\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = \underbrace{(x^2+x+4)+}_{\text{целая часть}} \underbrace{\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}}_{\text{правильная дробь}}.$

Дробь, таким образом, представится в виде суммы целой части (многочлена целой степени), интегрирование которой не представляет труда, и правильной дроби. Остановимся подробно на вопросе интегрирования правильных рациональных дробей.

Из курса алгебры известна теорема. *Каждая правильная дробь* $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *может быть представлена в виде суммы конечного числа простых дробей.*

При этом разложение правильной дроби на простые дроби связано с разложением знаменателя этой дроби на простые множители.

В связи с этим можно предложить следующую схему интегрирования правильных рациональных дробей.

Схема интегрирования правильной рациональной дроби.

1. Знаменатель дроби раскладываем на простые множители, которых существует четыре типа:

$I -\ (x-a);\ \ II -\ (x-a)^k;\ \ III -\ (x^2+px+q);\ \ IV -\ (x^2+px+q)^k,$

(квадратные трехчлены предполагаются не имеющими действительных корней, т.е. неразложимыми на вещественные линейные множители.) Частным случаем квадратичных множителей могут быть множители вида (x^2+a^2) или $(x^2+a^2)^k$.

При разложении используются формулы сокращенного умножения:

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a), \qquad x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2),$$
$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2), \qquad x^4-a^4=(x-a)(x+a)(x^2+a^2).$$

Приведем несколько примеров расложения на множители

- $x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$.
- $(x^2-25)(x^2-4x-5)=(x-5)(x+5)(x+1)(x-5)=(x+5)(x+1)(x-5)^2$.

Последний пример показывает, что после разложение на множители возможно объединение нескольких одинаковых множителей I-го типа в один множитель II-типа, что существенно при дальнейшем разложении дроби.

2. Рациональную дробь представляем в виде суммы простейших дробей, причем, как извесно из алгебры, каждому из четырех простейших сомножителей в разложении знаменателя соответствует определенный набор простейших дробей, что показано в таблице 1.5. В таблице 1.6 приведены примеры разложения на простейшие слагаемые конкретных правильных рациональных дробей. Все буквенные коэффициенты, входящие в таблицу, называются неопределенными коэффициентами, вопрос о нахождении которых рассмотрим ниже на конкретных примерах.

Таким образом, интегрирование правильной рациональнй дроби сводится к интегрированию суммы простейших дробей. Затем

3. Находим неопределенные коэффициенты.

4. Проводим интегрирование каждого слагаемого.

Если исходная дробь была неправильной, то к результату интегрирования правильной дроби добавится результат интегрирования целой части.

Таблица 1.5.

Тип сомножителя в знаменателе	Простейшие дроби в разложении дроби на слагаемые
I. $(x-a)$	$\dfrac{A}{x-a}$
II. $(x-a)^k$	$\dfrac{A_k}{(x-a)^k}+\dfrac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\dfrac{A_1}{x-a}$
III. x^2+px+q	$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$
IV. $(x^2+px+q)^r$	$\dfrac{A_rx+B_r}{(x^2+px+q)^r}+\dfrac{A_{r-1}x+B_{r-1}}{(x^2+px+q)^{r-1}}+\ldots+\dfrac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}$

Таблица 1.6.

	Исходная дробь	Вид её разложения на слагаемые
1	$\dfrac{3x+4}{x\,(x+5)(x-7)}$	$\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+5}+\dfrac{C}{x-7}$
2	$\dfrac{1}{(x-3)(x+2)^3}$	$\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{(x+2)^3}+\dfrac{C}{(x+2)^2}+\dfrac{D}{x+2}$
3	$\dfrac{x^2+3x}{(x^2-3x+5)(x^2+4)}$	$\dfrac{Ax+B}{x^2-3x+5}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$
4	$\dfrac{2x+3}{x^2(x+2)(x^2+3)}$	$\dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x}+\dfrac{C}{x+2}+\dfrac{Dx+E}{x^2+3}$
5	$\dfrac{3x}{x^3-8}$	$\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+4}$
6	$\dfrac{x^2+4}{(x-1)(x^2+x+2)^2}$	$\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{(x^2+x+2)^2}+\dfrac{Dx+E}{x^2+x+2}$

• **1**. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx.$

Подынтегральная дробь является неправильной, поэтому прежде всего необходимо выделить целую часть и представить дробь в виде суммы целой части и правильной дроби. Такое разложение для данной дроби мы уже записывали выше, поэтому воспользуемся полученным результатом

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = (x^2+x+4)\ + \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$$

Поэтому исходный интеграл будет равен сумме

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \int (x^2+x+4)\ dx + \int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\ dx.$$

Первый интеграл $\quad \int (x^2+x+4)\ dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+C_1.$

Находим второй интеграл, для чего :

1) Раскладываем знаменатель на простые сомножители

$$x^3-4x = x(x^2-4) = x\cdot(x-2)\cdot(x+2).$$

2) Выписываем подынтегральную дробь и раскладываем ее на сумму простейших дробей

$$\frac{4x^2+16x-8}{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2} \qquad (\star)$$

В данном случае мы имеем сомножители I-го типа и каждому сомножителю в разложении знаменателя соответствует одна простейшая дробь I-го типа (см. табл. 1.5, 1.6)

3) Находим неопределенные коэффициенты $A,\ B,\ C$. Для этого приводим к общему знаменателю дроби в правой части равенства

$$\frac{4x^2+16x-8}{x\ (x-2)\ (x+2)} = \frac{A(x-2)(x+2)+B\ x\ (x+2)+C\ x\ (x-2)}{x\ (x-2)\ (x+2)}.$$

Из равенства двух дробей с равными знаменателями следует и равенство их числителей

$$4x^2+16x-8 = A(x-2)(x+2)+B\ x\ (x+2)+C\ x\ (x-2) \qquad (\star\star)$$

Это равенство справедливо для любых значений x. Для нахождения трех неопределенных коэффициентов можно в полученное равенство подставить любые три значения x и получить три соотношения для нахождения коэффициентов $A,\ B,\ C$.

Отметим, что наиболее рационально использовать те значения x, которые являются корнями знаменателя, в нашем случае это числа $0, \ \ 2, \ \ -2$.

Подставляем поочередно эти значения в равенство $(\star\,\star)$ и получаем

$$\begin{array}{llll}
\text{при} \ \ x=0: & -8=A(-2)(2) & \Longrightarrow & A=2, \\
\text{при} \ \ x=2: & 40=B(2)(4) & \Longrightarrow & B=5, \\
\text{при} \ \ x=-2: & -24=C(-2)(-4) & \Longrightarrow & C=-3.
\end{array}$$

Найденные коэффициенты подставляем в разложение дроби $(\star)$

$$\frac{4x^2+16x-8}{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}+\frac{-3}{x+2}.$$

4) Интегрируем простейшие слагаемые

$$\int\frac{4x^2+16x-8}{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}\,dx=\int\frac{2}{x}\,dx+\int\frac{5}{x-2}\,dx+\int\frac{-3}{x+2}\,dx=$$

$$=2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{d(x-2)}{x-2}-3\int\frac{d(x+2)}{x+2}=$$

$$=2\ln|\ x\ |+5\ln|\ x-2\ |-3\ln|\ x+2\ |+C_2=\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C_2.$$

Суммируем этот результат с результатом интегрирования целой части исходной дроби и получаем окончательно

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$$

(константы $C_1, \ \ C_2$ объединены в одну константу С).

• **2**. $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}\,dx.$

Подынтегральная дробь является правильной, поэтому интегрирование проводим по схеме:

1) Раскладываем знаменатель на простые сомножители

$$(x^2-3x+2)^2=\left((x-1)(x-2)\right)^2=(x-1)^2(x-2)^2.$$

2) Выписываем подынтегральную дробь и раскладываем ее на сумму простейших дробей (см. табл. 1.5, 1.6)

$$\frac{x^2}{(x-1)^2\cdot(x-2)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{x-2} \qquad (\star)$$

3) Находим неопределенные коэффициенты A, B, C, D. Для этого приводим к общему знаменателю дроби в правой части равенства (причем,очевидно, общим знаменателем является знаменатель дроби в левой равенства) и выписываем равенство числителей

$$x^2 = A(x-2)^2 + B\,(x-1)\,(x-2)^2 + C\,(x-1)^2 + D\,(x-1)^2\,(x-2) \qquad (\star\star)$$

Это равенство справедливо для любых значений x. Используем сначала те значения x, которые являются корнями знаменателя, в нашем случае это числа 1 и 2. Подставляем поочередно эти значения в равенство $(\star\,\star)$ и получаем

$$\begin{array}{llll} \text{при } x=1: \text{ имеем} & 1 = A(-1)^2 & \Longrightarrow & A = 1, \\ \text{при } x=2: & 4 = C(1)^2 & \Longrightarrow & C = 4. \end{array}$$

Так как больше действительных корней у знаменателя нет, возьмем любое значенние x и подставим в равенство $(\star\,\star)$

$$\text{при } x=0: \quad \text{имеем} \;\; 0 = 4A - 4B + C - 2D.$$

Подставим полученные ранее значения A и C и получим

$$0 = 4 - 4B + 4 - 2D \quad \Longrightarrow \quad 2B + D = 4.$$

Требуется составить еще одно уравнение, связывающее коэффициенты B и D. Можно снова взять какое-либо значение x и подставить в равенство $(\star\,\star)$, но можно использовать и такой прием: приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства $(\star\,\star)$. В нашем случае легко увидеть, что при раскрытии скобок в правой части равенства членов с x^3 будет два: Bx^3 и Dx^3, а слева члена с x^3 нет вообще, поэтому уравнивая коэффициенты при x^3 в левой и правой частях равенства, получим $0 = B + D$. Итак, для нахождения B и D имеем простую систему

$$\begin{cases} 2B + D = 4 \\ B + D = 0 \end{cases} \Longrightarrow \; B = 4, \quad D = -4.$$

Таким образом, подынтегральная дробь запишется в виде суммы простейших дробей

$$\frac{x^2}{(x-1)^2 \cdot (x-2)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{-4}{x-2}.$$

4) Интегрируя почленно, получим

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^2 \cdot (x-2)^2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{4\;dx}{x-1} + \int \frac{4\;dx}{(x-2)^2} + \int \frac{-4\;dx}{x-2} =$$

$$= -\frac{1}{x-1} + 4\;\ln|\,x-1\,| + -\frac{4}{x-2} - 4\;\ln|\,x-2\,| + C.$$

• **3**. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x)(x^2+1)}$.

1) Раскладываем знаменатель на простые сомножители

$$(x^2+x)(x^2+1) = x(x+1)(x^2+1).$$

2) Выписываем подынтегральную дробь и раскладываем ее на сумму простейших дробей

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \qquad (\star)$$

В данном случае мы имеем сомножители I-го и III-го типов, и каждому сомножителю в разложении знаменателя соответствуют свои простейшие дроби (см. табл. 1.5, 1.6). Приводим к общему знаменателю и приравниваем числители

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B\ x\ (x^2+1) + Cx^2\ (x+1) + D\ x\ (x+1) \quad (\star\star)$$

Имеем два действительных корня $x = 0$, $\ x = -1$. Подставляем эти значения в равенство $(\star\star)$ и находим два неопределенных коэффициента

$$\begin{array}{llll} \text{при } x=0: & \text{имеем } \quad 1 = A\cdot 1\cdot 1 & \Longrightarrow & A = 1, \\ \text{при } x=-1: & \qquad\qquad\; 1 = B(-1)(2) & \Longrightarrow & B = -1/2. \end{array}$$

Чтобы найти остальные коэффициенты, можно либо придать переменной x два произвольных значения, либо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства $(\star\star)$ и использовать уже найденные коэффициенты.

$$\begin{array}{llll} \text{при } x^3: & \text{имеем } \quad 0 = A+B+C & \Longrightarrow & C = -1/2, \\ \text{при } x^2: & \qquad\qquad\; 0 = A+C+D & \Longrightarrow & D = -1/2. \end{array}$$

Подставляем эти значения в разложение исходной дроби $(\star)$

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)} = \int\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{x\ dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \ln|\ x\ | - \frac{1}{2}\ \ln|\ x+1\ | - \frac{1}{4}\ \ln|\ x^2+1\ | - \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg} x + C.$$

• 4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$

1) Раскладываем знаменатель на простые сомножители

$$(x^3-1) = (x-1)(x^2+x+1).$$

В данном случае мы имеем сомножители I-го и III-го типов, и каждому сомножителю в разложении знаменателя соответствуют свои простейшие дроби (см. табл. 1.5, 1.6).

2) Выписываем подынтегральную дробь и раскладываем ее на сумму простейших дробей

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \qquad (\star)$$

3) Приводим к общему знаменателю и приравниваем числители

$$1 = A(x^2+x+1) + B\ x\ (x-1) + C(x-1) \qquad (\star\star)$$

Имеем один действительный корень $x=1$. Подставляем это значение в равенство $(\star\star)$ и находим один неопределенный коэффициент

$$\text{при}\ \ x=1:\ \ 1 = A\cdot 3 \implies A = 1/3.$$

Чтобы найти коэффициенты B и C, можно сначала придать переменной x значение, равное нулю, а затем приравнять коэффициенты, например, при x^2 в левой и правой частях равенства $(\star\star)$.

$$\text{при}\ \ x=0:\ \ \text{имеем}\quad 1 = A\cdot 1 + C\cdot(-1) \implies C = -2/3,$$

$$\text{при}\ \ x^2:\ \ \text{имеем}\quad 0 = A + B \implies B = -1/3.$$

Подставляем эти значения в разложение исходной дроби $(\star)$

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1/3}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}\cdot x - \frac{2}{3}}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

4) Исходный интеграл разобьется на сумму двух интегралов

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\ln|x-1| - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ \ln|x^2+x+1| + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Интегрирование первого слагаемого не представляет труда, а второй интеграл относится к классу интегралов, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе дроби (см. пример 5, п.1.3.1.).

1.3.3. Интегрирование простейших иррациональностей

Интегралы от иррациональных функций уже рассматривались при изложении методов интегрирования. Есть интегралы от иррациональных функций, которые можно решить непосредственным интегрированием или подведением под знак дифференциала. Но особо эффективным методом интегрирования иррациональностей является метод подстановки (см. п.1.2.4). При интегрировании выражений, содержащих иррациональности, выбор подстановки диктуется тем, что необходимо избавиться от иррациональности и новой иррациональности в ходе преобразования подынтегрального выражения появиться не должно. При этом используются как алгебраические, так и тригонометрические подстановки.

Простейшие иррациональности

К простейшим иррациональностям относятся функции, в которые входят радикалы различных степеней

$$\text{от} \quad x, \qquad \text{или} \quad (ax+b) \qquad \text{или} \quad \frac{ax+b}{cx+d}.$$

В подобных интегралах избавиться от иррациональности можно, введя вместо x, или $(ax+b)$, или $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ новую переменную t^p, причем степень p должна быть такой, чтобы извлекались корни всех степеней, входящих в данную подынтегральную функцию.

• **1**. $$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{ll} x=t^{12}, & t=\sqrt[12]{x} \\ dx=12t^{11}\,dt & \end{array} \right| = \int \frac{t^6\cdot 12t^{11}}{t^8+t^3}\,dt =$$

$$= 12\int \frac{t^{17}\,dt}{t^3(t^5+1)} = 12\int \frac{t^{14}\,dt}{t^5+1} = 12\int \left(t^9 - t^4 + \frac{t^4}{t^5+1}\right)\,dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^{10}}{10} - \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\ln|t^5+1|\right) = 12\left(\frac{\sqrt[12]{x^{10}}}{10} - \frac{\sqrt[12]{x^5}}{5} + \frac{1}{5}\ln|\sqrt[12]{x^5}+1|\right) + C$$

• **2**. $$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx = \left| \begin{array}{ll} x=t^6, & t=\sqrt[6]{x} \\ dx=6t^5\,dt & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}\cdot 6t^5\,dt = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 6\int (t^3 + \frac{1}{1+t^2})\,dt = 6(t^4/4 + \mathrm{arctg}\,t) = 6(\sqrt[6]{x^4}/4 + \mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}) + C$$

• **3**. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}\ dx = \left| \begin{array}{l} x = t^{12}, \quad t = \sqrt[12]{x} \\ dx = 12t^{11}\ dt \end{array} \right| =$

$\displaystyle = \int \frac{t^6+t^4}{t^{15}-t^{14}} \cdot 12t^{11}\ dt = 12\int \frac{t^3+t}{t-1}\ dt =$

$\displaystyle = 12\int (t^2+t-2-\frac{2}{t-1})\ dt = 12(t^3/3+t^2/2-2t-2\ln|t-1|) =$

$\displaystyle = 12(\sqrt[12]{x^3}/3+\sqrt[12]{x^2}/2-2\sqrt[12]{x}-2\ln|\sqrt[12]{x}-1|)+C$

• **4**. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})} = \left| \begin{array}{l} x = t^{10}, \\ dx = 10t^9\ dt \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{10t^9\ dt}{t^{10}(t^5+t^4)} = 10\int \frac{dt}{t^5(t+1)} = \ldots$$

• **5**. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2}+\sqrt[3]{3x+2}}\ dx = \left| \begin{array}{l} 3x+2 = t^6, \quad x = \frac{1}{3}(t^6-2) \\ dx = 2t^5\ dt \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{2t^5\ dt}{t^3+t^2} = 2\int \frac{t^3\ dt}{t+1} = \ldots$$

• **6**. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{x+1+\sqrt[3]{x+1}}\ dx = \left| \begin{array}{l} x+1 = t^6, \quad x = t^6-1 \\ dx = 6t^5\ dt \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{1-t^3}{t^6+t^2}\ 6t^5\ dt = 6\int \frac{t^3-t^6}{t^4+1}\ dt = \ldots$$

• **7**. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x-3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1}\ dx = \left| \begin{array}{l} x-3 = t^4, \quad x = t^4+3 \\ dx = 4t^3\ dt \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{t+t^2}{t^2+1}\ 4t^3\ dt = 4\int \frac{t^4+t^5}{t^2+1}\ dt = \ldots$$

• **8**. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x} = \left| \begin{array}{l} \frac{1-x}{1+x} = t^2 \\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{-4t\ dt}{(1+t^2)^2} \end{array} \right| =$

$$= \int t \cdot \frac{-4t\ (1+t^2)}{(1+t^2)^2\ (1-t^2)}\ dt = -4\int \frac{t^2\ dt}{(1+t^2)\ (1-t^2)} = \ldots$$

• **9**. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{ll} x = t^6 & dx = 6t^5 dt \\ t = \sqrt[6]{x} & \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^2+t^3} =$

$$= 6\int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1} dt = 6\int \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1} dt - 6\int \frac{dt}{t+1} = \ldots$$

• **10**. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}+4} = \left| \begin{matrix} x-2=t^2 & dx=2tdt \\ x=t^2+2 & \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{t+4} =$

$$= 2\int \frac{(t+4)-4}{t+4}dt = 2\int dt - 8\int \frac{dt}{t+4} = 2t - 8\ln|t+4| =$$
$$= |\ t=\sqrt{x-2}\ | = 2\sqrt{x-2} - 8\ \ln|\sqrt{x-2}+4| + C.$$

Основой целью приведенных выше примеров было убедиться в том,что при удачной замене интегралы от иррациональных функций приводятся к интегралам от рациональных дробей (в некоторых случаях может получиться и целая рациональная функция), интегрирование которых мы рассматривали в предыдущем параграфе.

1.3.4. Интегрирование дифференциальных биномов

Интегрирование дифференциальных биномов, т.е. интегралов вида

$$\int x^m \cdot (\ a\ x^n\ +\ b)^p\ dx,$$

возможно только в трех случаях с помощью подстановок Чебышева. Если числа m, n, p и их указанные комбинации не удовлетворяют ни одному из случаев, то интеграл от данного дифференциального бинома является неберущимся, т.е. не выражается в элементарных функциях.

Случаи	Подстановка
1) p – целое число	$x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей n и m
2) $\frac{m+1}{n}$–целое число	$ax^n + b = t^s$, где s – знаменатель дроби p
3) $\frac{m+1}{n}+p$– целое число	$\frac{ax^n+b}{x^n} = t^s$, где s– знаменатель дроби p

Ниже приведены примеры, иллюстрирующие то, что дифференциальный бином с помощью подстановок Чебышева приводится к рациональной функции, в частности к рациональной дроби.

• **11**. $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx = \int x^{1/2}\left(1+x^{1/3}\right)^4 dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} m = 1/2, \quad n = 1/3, \quad p = 4 - \text{целое;} \\ x = t^6; \quad dx = 6t^5 dt \end{array} \right| =$$

$$= \int t^3\left(1+t^2\right)^4 6t^5\,dt = 6\int t^8\left(1+t^2\right)^4\,dt = \ldots$$

• **12**. $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^3} = \int x^{-1}\,\left(1+x^{1/3}\right)^{-3}\,dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} m = -1, \quad n = 1/3, \quad p = -3 - \text{целое;} \\ x = t^3; \quad dx = 3t^2 dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3t^2\,dt}{t^3\,(1+t)^3} = 3\int \frac{dt}{t\,(1+t)^3} = \ldots$$

• **13**. $\int \frac{dx}{x\,\sqrt[3]{8-x^2}} = \int\; x^{-1}(8-x^2)^{-1/3}dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} m = -1, \quad n = 2, \quad p = -1/3 \\ \dfrac{m+1}{n} = \dfrac{-1+1}{2} = 0 - \text{целое;} \\ \;\; 8 - x^2 = t^3; \quad x = (8-t^3)^{1/2}, \\ \;\; dx = \dfrac{-3}{2}t^2(8-t^3)^{-1/2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{t^2\,(8-t^3)^{-1/2}\,dt}{(8-t^3)^{1/2}\,t} = -\frac{3}{2}\int \frac{t\,dt}{(8-t^3)} =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{t\,dt}{(2-t)\,(4+2t+t^2)} = \ldots$$

• **14**. $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt[3]{(1+x^3)^5}} = \int x^{-2}\,\left(1+x^3\right)^{-5/3}\,dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} m = -2, \quad n = 3, \quad p = -5/3, \\ \dfrac{m+1}{n} + p = \dfrac{-2+1}{3} - \dfrac{-5}{3} = -2 - \text{целое;} \\ 1 + x^3 = t^3\,x^3; \quad x = \left(t^3-1\right)^{-1/3}; \\ dx = -t^2(t^3-1)^{-4/3}dt, \\ (1+x^3)^{-5/3} = \left(t^3\,x^3\right)^{-5/3} = t^{-5}\,x^{-5} \\ = t^{-5}\,\left(t^3-1\right)^{5/3} \end{array} \right| =$$

$$= -\int (t^3-1)^{2/3}\,t^{-5}\,\left(t^3-1\right)^{5/3}\cdot t^2\,\left(t^3-1\right)^{-4/3}\,dt =$$

$$= -\int (t^3-1)\,t^{-3}\,dt = -\int\left(1-t^{-3}\right)dt = \ldots$$

$$\bullet\ \mathbf{15}.\ \int \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x^2})^2\,dx = \left|\begin{array}{l} p - \text{целое},\quad x = t^6, \\ dx = 6t^5dt \end{array}\right| = 6\int t^3(1+t^4)^2t^5dt =$$

$$= 6\int t^8(1+2t^4+t^8)dt = 6\int(t^8+2t^{12}+t^{16})dt = 6\frac{t^9}{9} + \frac{12}{13}t^{13} + \frac{6}{17}t^{17} =$$

$$= \left|\ t = \sqrt[6]{x}\ \right| = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{12}{13}\sqrt[6]{x^{13}} + \frac{6}{17}\sqrt[6]{x^{17}} + C.$$

$$\bullet\ \mathbf{16}.\ \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{\sqrt{x^3}+4}} = \int x^{1/2}(x^{3/2}+4)^{-1/2}dx =$$

$$= \left|\begin{array}{c} m = \frac{1}{2};\quad n = \frac{3}{2}\qquad p = -\frac{1}{2};\quad \frac{m+1}{n} = 1 - \text{целое}; \\ x^{3/2}+4 = t^2 \qquad x = (t^2-4)^{2/3},\quad t = \sqrt{\sqrt{x^3}+4}, \\ dx = \frac{2}{3}(t^2-4)^{-1/3}\cdot 2tdt = \frac{4}{3}t(t^2-4)^{-1/3}dt \end{array}\right| =$$

$$= \int(t^2-4)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}\cdot t^{-1}\cdot\frac{4}{3}t\cdot(t^2-4)^{-\frac{1}{3}}\cdot dt = \int\frac{4}{3}dt = \frac{4}{3}t = \frac{4}{3}\sqrt{\sqrt{x^3}+4} + C.$$

$$\bullet\ \mathbf{17}.\ \int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}} = \int x^{-3}(2-x^3)^{-\frac{1}{3}}\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{c} m = -3;\quad n = 3\qquad p = -\frac{1}{3};\quad \frac{m+1}{n}+p = -1 - \text{целое}, \\ 2-x^3 = t^3x^3, \qquad\qquad x^3 = 2(t^3+1)^{-1}, \\ x = \sqrt[3]{2}(t^3+1)^{-\frac{1}{3}}, \qquad dx = -\sqrt[3]{2}\cdot t^2\cdot(t^3+1)^{-\frac{4}{3}}\cdot dt, \\ (2-x^3)^{-\frac{1}{3}} = t^{-1}x^{-1} = t^{-1}(\sqrt[3]{2})^{-1}\,(t^3+1)^{\frac{1}{3}} \end{array}\right| =$$

$$= -\int\sqrt[3]{2}\cdot t^2\cdot(t^3+1)^{-\frac{4}{3}}\cdot 2^{-1}\cdot(t^3+1)\cdot t^{-1}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\cdot(t^3+1)^{\frac{1}{3}}\cdot dt = -\int\frac{t}{2}dt =$$

$$= -\frac{t^2}{4} = \left|\ t = \frac{\sqrt[3]{2-x^3}}{x}\ \right| = -\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2} + C.$$

Напомним еще раз, что после получения первообразной нужно обязательно вернуться к старой переменной x.

1.3.5. Интегралы, содержащие радикалы вида:

$$\sqrt{a^2-x^2}, \qquad \sqrt{x^2-a^2}, \qquad \sqrt{x^2+a^2}.$$

Отметим, что ряд интегралов, которые можно решить как дифференциальный бином, легче решаются с помощью тригонометрических подстановок. При этом используются известные формулы тригонометрии

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \qquad 1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Ниже в таблице приведены три случая использования тригонометрических подстановок в таких интегралах.

Таблица 1.7.

	Интеграл	Указания к подстановке
I	$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$, $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$,	$x=a\sin t, \quad dx=a\cos t dt$, $a^2-x^2=a^2\cos^2 t$, $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$, $t=\arcsin\frac{x}{a}$.
II	$\int\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^4}\,dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}$	$x=a\cdot\mathrm{tg}\ t; \quad dx=\frac{a\cdot dt}{\cos^2 t}$, $a^2+x^2=\frac{a^2}{\cos^2 t}, \quad t=\mathrm{arctg}\frac{x}{a}$, $\sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\cos t}$.
III	$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$, $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^6}dx$	$x=\frac{a}{\sin t}; \quad dx=-\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt$, $x^2-a^2=\frac{a^2\cos^2 t}{\sin^2 t}, \quad t=\arcsin\frac{a}{x}$, $\sqrt{x^2-a^2}=\frac{a\cos t}{\sin t}$.

$$\bullet\ \mathbf{18}.\quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{array}{c} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\, dt \end{array} \right| = \int \frac{4\sin^2 t \cdot 2\cos t\, dt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} =$$

$$= 4\int \frac{\sin^2 t\ \cos t}{\cos t} dt = 4\int \sin^2 t\ dt = 2\int (1-\cos 2t)\, dt = 2t - \sin 2t =$$

$$= \left|\ t = \arcsin\frac{x}{2}\ \right| = 2\ \arcsin\frac{x}{2} - \sin(2\ \arcsin\frac{x}{2}) + C.$$

$$\bullet\ \mathbf{19}.\quad \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}} = \left| \begin{array}{c} x = \operatorname{tg}\ t \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{\operatorname{tg}^2 t\, dt}{\sqrt{(\operatorname{tg}^2 t+1)^5}\cos^2 t}$$

$$= \int \frac{\sin^2 t\, dt}{\cos^4 t\sqrt{\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)^5}} = \int \frac{\sin^2 t\ \cos^5 t\, dt}{\cos^4 t} = \int \sin^2 t\ \cos t\, dt =$$

$$= \int \sin^2 t\, d(\sin t) = \frac{1}{3}\sin^3 t = |\ t = \operatorname{arctg}\ x\ | = \frac{1}{3}\sin^3(\operatorname{arctg}\ x) + C.$$

$$\bullet\ \mathbf{20}.\quad \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\ dx = \left| \begin{array}{c} x = \dfrac{2}{\sin t}, \qquad dx = \dfrac{-2\cos t}{\sin^2 t}\ dt \\ x^2 - 4 = \dfrac{4}{\sin^2 t} - 4 = \dfrac{4(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t} = \dfrac{4\cos^2 t}{\sin^2 t} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\sqrt{\dfrac{4\cos^2 t}{\sin^2 t}}}{\dfrac{4}{\sin^2 t}} \left(\frac{-2\cos t}{\sin^2 t}\right)\ dt = \int \frac{\dfrac{2\cos t}{\sin t}\left(-\dfrac{2\cos t}{\sin^2 t}\right)}{\dfrac{4}{\sin^2 t}}\ dt = -\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\ dt =$$

$$= -\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t} dt = -\int \frac{1}{\sin t}\ dt + \int \sin t\ dt = -\ln\left|\ \operatorname{tg}\frac{t}{2}\ \right| - \cos t =$$

$$= \left|\ t = \arcsin\frac{2}{x}\ \right| = -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\arcsin\frac{2}{x}}{2}\ \right| - \cos\left(\ \arcsin\tfrac{2}{x}\right) + C.$$

В заключение отметим, что в ряде интегралов бывает эффективна подстановка $x = 1/t$. Например,

$$\bullet\ \mathbf{21}.\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \left| x = \frac{1}{t};\quad dx = -\frac{dt}{t^2};\quad t = \frac{1}{x} \right| =$$

$$= \int \frac{-dt/t^2}{(1/t)\sqrt{1/t^2+1/t+1}} = -\int \frac{dt/t^2}{(1/t^2)\sqrt{1+t+t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}} =$$

$$= -\int \frac{d(t+1/2)}{\sqrt{(t+1/2)^2+3/4}} = -\ln\left|t + \frac{1}{2} + \sqrt{(t+1/2)^2+3/4}\right| =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\right| = -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{2x}\right| + C.$$

1.3.6. Интегралы от тригонометрических функций

При интегрировании обширного класса тригонометрических функций применяются практически все методы интегрирования. В таблице 1.8 интегралы от тригонометрических функций разбиты на пять основных групп. В первых трех группах при нахождении интегралов применяется непосредственное интегрирование в сочетании с методом подведения под знак дифференциала, когда происходит предварительное преобразование тригонометрического выражения с использованием различных формул тригонометрии.

В интегралах четвертой и пятой групп использование подходящих подстановок позволяет свести интегрирование рациональных тригонометрических функций к интегрированию рациональных алгебраических дробей.

Универсальная тригонометрическая подстановка

Легко показать, что использование, так называемой универсальной тригонометрической подстановки

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$$

сводит интеграл от любой рациональной тригонометрической функции $\int R(\cos x, \quad \sin x)\, dx$ к интегралу от рациональной алгебраической дроби. Действительно:

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \quad \Longrightarrow \quad x = 2\mathrm{arctg}\ t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt;$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Тогда получаем, что

$$\int R(\cos x, \quad \sin x)\, dx = \int R_1\left(\frac{1-t^2}{1+t^2};\ \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

С помощью универсальной подстановки находятся интегралы вида:

$$\int\frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}, \qquad \int\frac{dx}{\cos x}, \qquad \int\frac{dx}{2\cos x + 5}, \qquad \int\frac{\sin x\ dx}{(3\sin x - 2)^2}.$$

Интегрирование тригонометрических функций. Таблица 1.8.

	Интеграл	Краткие указания
1.	$\int \cos^2 x\ dx$, $\int \cos^2 x\ \sin^6 x\ dx$, $\int \sin^4 2x\ dx$.	$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.
2.	$\int \cos^3 x\ dx$, $\int \sin^5 x\ dx$ $\int \cos^4 x\ \sin^3 x\ dx$, $\int \sqrt{\cos x}\ \sin^3 x\ dx$, $\int \dfrac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\ dx$,	$\cos x\, dx = d(\sin x)$ $\sin x\, dx = -d(\cos x)$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\sin^4 x = (1-\cos^2 x)^2$.
3.	$\int \cos 2x\ \cos 3x\ dx$, $\int \sin 3x\ \cos 5x\ dx$, $\int \sin 4x\ \sin 2x\ dx$,	$\cos\alpha\ \cos\beta = \dfrac{1}{2}\ [\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ $\sin\alpha\ \cos\beta = \dfrac{1}{2}\ [\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ $\sin\alpha\ \sin\beta = \dfrac{1}{2}\ [\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$
4.	$\int \dfrac{dx}{3+2\cos x}$, $\int \dfrac{dx}{\cos^3 x}$, $\int \dfrac{dx}{\sin x - 3\cos x}$, $\int \dfrac{dx}{\sin x}$, $\int \dfrac{dx}{3-\sin x+\cos x}$.	$\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$, $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
5.	$\int \dfrac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$, $\int \operatorname{tg}^5 x\ dx$, $\int \dfrac{dx}{4+3\sin^2 x}$, $\int \dfrac{dx}{\cos^4 x}$, $\int \dfrac{\sin^2 x\ dx}{2-\sin^2 x+3\cos^2 x}$.	$\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$.

• **1**. $$\int \frac{dx}{3-5\sin x+2\cos x} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t & \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} & \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{3-5\frac{2t}{1+t^2}+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3(1+t^2)-10t+2(1-t^2)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2-10t+5} = 2\int \frac{dt}{(t-5)^2-20} = 2\frac{1}{2\sqrt{20}} \ln\left|\frac{(t-5)-\sqrt{20}}{(t-5)+\sqrt{20}}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\ \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5-\sqrt{20}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5+\sqrt{20}}\right| + C.$$

• **2**. $$\int\frac{dx}{\cos x} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t & \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\dfrac{2\,dt}{1+t^2} & \end{array} \right| = \int\frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int\frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= -2\int\frac{dt}{t^2-1} = -2\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Окончательное выражение для первообразной получается после соответствующих тригонометрических преобразований.

• **3**. $$\int\frac{dx}{\sin^3 x} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t & \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} & \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} =$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{(1+t^2)^2}{t^3}dt = \frac{1}{4}\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^3}dt = \frac{1}{4}\int\left(t^{-3}+\frac{2}{t}+t\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{8t^2}+\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{t^2}{8} = \frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\ \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + \frac{1}{8}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C.$$

• **4**. $$\int\frac{dx}{\cos^3 x} = \int\frac{dx}{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\int\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} =$$

$$= \left|\frac{\pi}{2}-x=t\right| = -\int\frac{dt}{\sin^3 t} = \ldots$$

Хотя универсальная тригонометрическая подстановка всегда дает желаемый результат, но в ряде случаев она приводит к довольно громоздким рациональным дробям. Рассмотрим решение интегралов от тригонометрических функций, в которых используются другие приемы.

Тангенциальная подстановка

♣ Если $\sin x$, $\cos x$ входят в подынтегральное выражение только в четных степенях, то гораздо проще использовать подстановку

$$\operatorname{tg} x = t, \qquad \text{тогда} \quad x = \operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Такая подстановка характерна для таких интегралов

$$\int \frac{dx}{3-5\sin^2 x}, \quad \int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x + c}, \quad \int \frac{dx}{a+b\operatorname{tg} x + c\operatorname{tg}^2 x}, \quad \int \operatorname{tg}^k x\,dx.$$

К тангенциальной подстановке прибегают также при решении таких интегралов

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x \cdot \sin x}, \qquad \int \frac{dx}{\cos^4 x \cdot \sin^6 x},$$

в которых сумма показателей степеней $\cos x$ и $\sin x$ – четная, а также в интегралах с четными степенями $\cos x$ и $\sin x$ в числителе и знаменателе

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\cos^6 x}, \qquad \int \frac{dx}{\sin^8 x}.$$

• **5**. $$\int \frac{dx}{4+3\sin^2 x} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg} x = t & \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4+3\,\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{4(1+t^2)+3t^2} = \int \frac{dt}{4+7t^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{d(\sqrt{7}\,t)}{4+7t^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}t}{2} = \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\operatorname{tg} x\right) + C.$$

• **6**. $$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg} x = t & \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} = \int (1+t^2)\,dt = t + \frac{t^3}{3} = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

• **7**. $$\int \operatorname{tg}^4 x\ dx = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg}\ x = t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^4 dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{(t^4-1)+1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{1+t^2}\,dt + \int \frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= \int (t^2-1)\,dt + \operatorname{arctg}\ t = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg}\ t = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg}\ x + x + C.$$

• **8**. $$\int \frac{dx}{\cos^3 x\ \sin x} = \left| \begin{array}{cc} \operatorname{tg}\ x = t & \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} & \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3 \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}} = \int \frac{t^2+1}{t} dt = \int \left(t + \frac{1}{t}\right)\ dt =$$
$$= \frac{t^2}{2} + \ln|t| = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\operatorname{tg}\ x| + C.$$

Можно предложить такой способ решения интегралов с произведением $\sin x$ и $\cos x$ в знаменателе

• **9**. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x\ \cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\ \cos x} dx =$$
$$= \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\ \cos x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\ \cos x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx =$$
$$= \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} = \ln\left| \operatorname{tg}\ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \right| - \frac{1}{\sin x} + C.$$

З а м е ч а н и е. В интегралах, содержащих функцию $\operatorname{ctg}\ x$, используется подстановка $\operatorname{ctg}\ x = t$, $x = \operatorname{arcctg}\ t$, $dx = -\dfrac{dt}{1+t^2}$, которая практически не отличается от подстановки $\operatorname{tg}\ x = t$

• $$\int \frac{dx}{3-\operatorname{ctg}\ x} = \left| \begin{array}{c} \operatorname{ctg}\ x = t \\ dx = -\dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = -\int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{3-t} = -\int \frac{dt}{(1+t^2)\,(3-t)} = \ldots$$

Далее решается интеграл от рациональной дроби.

♣ В интегралах вида $\int \cos^2 x\ dx,\quad \int \sin^4 x\ dx,\quad \int \sin^2 x \cos^6 x\ dx$

только с четными степенями $\sin x,\quad \cos x$ можно, не прибегая к подстановке, решить интеграл, применяя формулы понижения степени

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

С интегралами от $\cos^2 x$ и $\sin^2 x$ мы уже встречались в данном пособии. Рассмотрим более сложные примеры.

• **10**. $\int cos^4 3x\ dx = \int \left(\cos^2 3x\right)^2\ dx = \int \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)^2\ dx =$

$$=\frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 6x+\cos^2 6x\right)\ dx = \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 6x+\frac{1+\cos 12x}{2}\right)\ dx =$$

$$=\frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2}+2\cos 6x+\frac{1}{2}\ \cos 12x\right)\ dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\ x+\frac{2}{6}\ \sin 6x+\frac{1}{24}\ \sin 12x\right) =$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{\sin 6x}{12} + \frac{\sin 12x}{96} + C.$$

• **11**. $\int \cos^2 x\ \sin^4 x\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\ (1-\cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\ dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\ \ \cos 2x\ d(2x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

♣ В интегралах вида

$$\int \cos^3 x\ dx,\quad \int \sin^5 x\ dx,\quad \int \sin^3 x \cos^2 x\ dx,\quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\ dx,$$

характерной особенностью которых является наличие в числителе $\sin x$ или $\cos x$ в н е ч е т н о й степени, можно, не прибегая к подстановке, решить интеграл, используя подведения под знак дифференциала:

$$\sin x\, dx = -d(\cos x), \qquad \cos x\, dx = d(\sin x).$$

• **12**. $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x\,(\sin x\,dx) = -\int \sin^2 x\,d(\cos x) =$

$$= -\int (1-\cos^2 x)\ d(\cos x) = -\int \left(d(\cos x) - \cos^2 x\ d(\cos x)\right) =$$

$$= -\int d(\cos x) + \int \cos^2 x\ d(\cos x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

• **13**. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\ (\sin x\ dx) = -\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} d(\cos x) =$

$$= -\int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x} d(\cos x) = -\int \frac{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x} d(\cos x) =$$

$$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} + 2\int d(\cos x) - \int \cos^2 x\ d(\cos x) =$$

$$= \frac{1}{\cos x} + 2\ \cos x - \frac{1}{3}\ \cos^3 x + C.$$

♣ В интегралах вида

$$\int \cos 3x \cdot \cos 5x\,dx, \quad \int \sin 5x \cdot \sin 2x\,dx, \quad \int \sin 3x \cdot \cos 2x\,dx$$

используются формулы, переводящие произведения тригонометрических функций разных аргументов в суммы (или разности). Формулы даны в таблице 1.8.

• **14**. $\int \sin 5x\ \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 3x - \cos 7x)\ dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 3x\ dx - \frac{1}{2}\int \cos 7x\ dx = \frac{1}{6}\cdot \sin\ 3x - \frac{1}{14}\cdot\ \sin\ 7x + C.$$

• **15**. $\int \cos x\ \cos 2x\ \sin 5x\ dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 3x)\sin 5x\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \cos x \sin 5x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 3x \sin 5x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (\sin 6x + \sin 4x)\ dx + \frac{1}{4}\int (\sin 8x + \sin 2x)\ dx =$$

$$= -\frac{1}{24}\ \cos 6x - \frac{1}{16}\ \cos 4x - \frac{1}{32}\ \cos 8x - \frac{1}{8}\ \cos 2x + C.$$