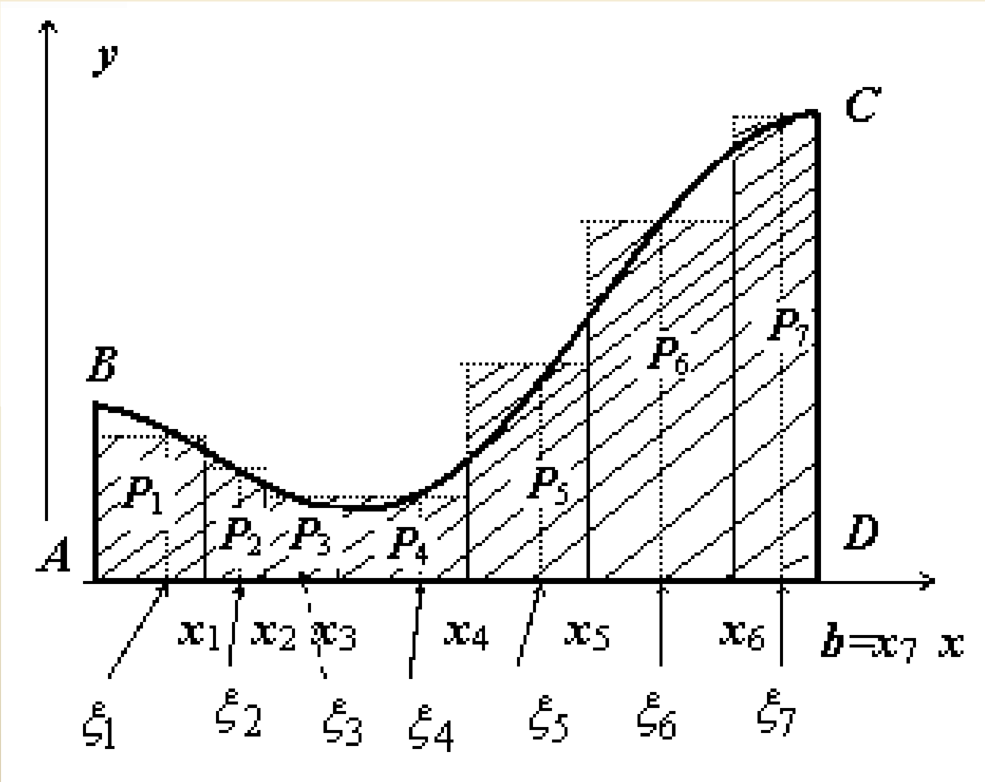
Определенный интеграл

Интегральное исчисление

Понятие определенного интеграла

Пусть в интервале ***[a; b]*** задана непрерывная

неотрицательная функция ***y = f(x)***



Определение

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ в интервале $[a; b]$ называется конечный предел соответствующей интегральной суммы при неограниченном увеличении числа разбиений промежутка на части ($n \to \infty$) и стремлении длин всех частичных промежутков к нулю ($\Delta x_i \to 0$) и обозначается символом:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Теорема существования

Если функция ***y*** = ***f(x)*** является непрерывной или кусочно-непрерывной в интервале ***[a; b],*** то определенный интеграл от этой функции на данном интервале всегда существует.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

1. Определенный интеграл зависит только от вида подынтегральной функции
2. Определенный интеграл не зависит от способа разбиения отрезка интегрирования на интервалы и от выбора ξi

Геометрический смысл определенного интеграла

Определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции, снизу осью ***OX***, слева и справа прямыми ***x=a, x=b***

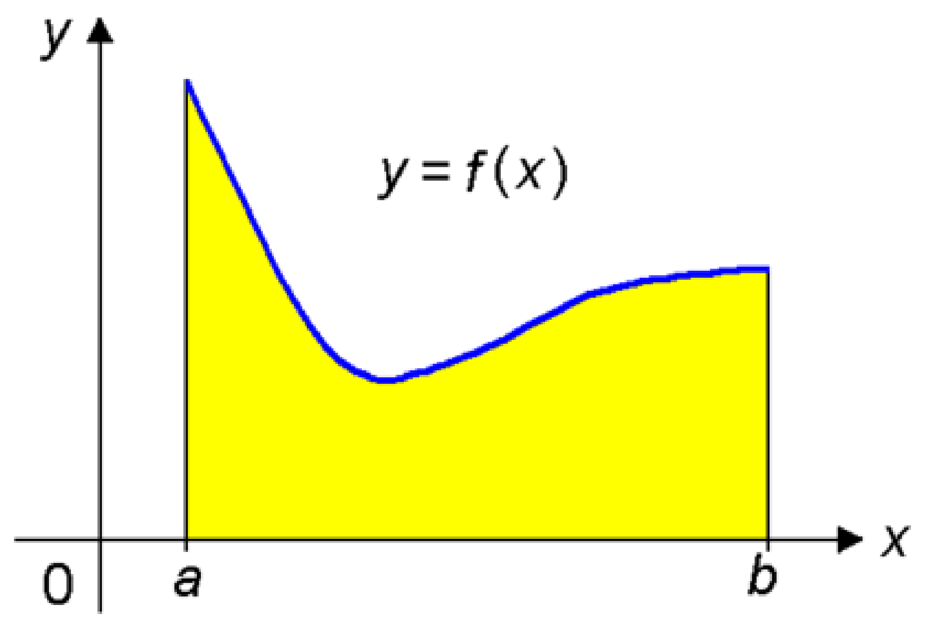


Рис. 1

Свойства определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

Свойства определенного интеграла

5. Если на [a; b] выполняется условие: f(x)≤ g(x), то:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

6. Если m – наименьшее значение f(x), а M – наибольшее значение f(x) на отрезке [a; b], то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

7) Свойство определенного интеграла

- Для любых a, b, c таких, что: a < c < b справедливо следующее равенство при условии, что f(x) непрерывна на [a; b] и существует f(c)

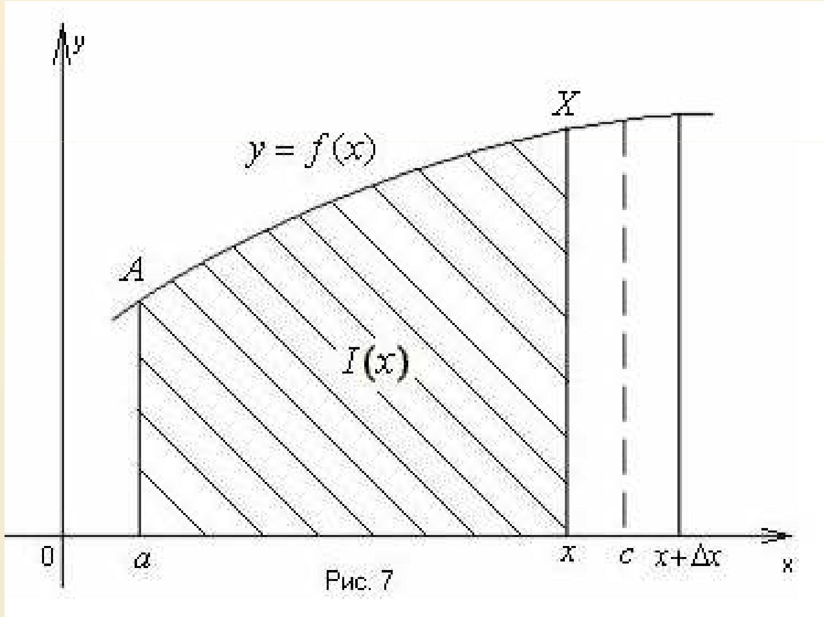
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Теорема о среднем

- Если f(x) непрерывна на [a; b], то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что будет справедлево:

$$\int_a^b f(x)dx \le f(\xi)(b-a)$$

Интеграл с переменным верхним пределом



a –нижний предел закреплен

x -верхний предел меняется

Δx – приращение верхнего предела

Ф(x) – функция верхнего предела интегрирования

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$$

Теорема Барроу

Производная интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции на этом пределе

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x)$$

<u>Следствие теоремы Барроу</u>:
Интеграл с переменным верхним пределом является первообразной для подынтегральной функции

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$F^{'}(x) = f(x)$$

Замена переменной в определенном интеграле

Теорема.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$.

Если $x = g(t)$, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$,

$g(t)$, $g'(t)$ – непрерывны на $[\alpha; \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

Интегрирование по частям

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Несобственный интеграл 1-го рода

$$f(x) - \textit{непрерывна в } [a;+\infty) \textit{ или } (-\infty; b] \textit{ или } (-\infty;+\infty)$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_a^b$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} F(x)\Big|_a^b$$

Несобственный интеграл 1-го рода

Если

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = C \ \textit{интеграл сходится}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \pm\infty \ \textit{интеграл расходится}$$

Исследование на сходимость несобственных интегралов 1-го рода

Признак сравнения.

Пусть для всех значений x выполняется неравенство:

$|f(x)| \leq |g(x)|$, тогда:

$$\textit{если сходится} \int_a^{+\infty} g(x)dx, \textit{ то сходится} \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

$$\textit{если расходится} \int_a^{+\infty} f(x)dx, \textit{ то расходится} \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

Исследование на сходимость несобственных интегралов 1-го рода

Предельный признак сравнения.

$$\text{если } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = const, \text{ то несобственные интегралы от этих функций}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ ведут себя одинаково: сходятся или расходятся}$$

Для сравнения используют функции вида:

$$g(x) = \frac{A}{x^k} \qquad g(x) = q^x$$

Исследование на сходимость несобственных интегралов 1-го рода

Абсолютная сходимость.

$$\text{если сходится несобственный интеграл } \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx,$$

$$\text{то сходится и интеграл } \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Несобственный интеграл 2-го рода

Пусть функция ***f(x)*** непрерывна в ***[a; b)*** или ***(a; b]*** и терпит бесконечный разрыв на одном конце интервала

$$\lim_{x\to b\to -0} f(x) = \pm\infty \;\; \textit{или} \;\; \lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty,$$

тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\varepsilon}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Несобственный интеграл 2-го рода

Если функция непрерывная ***f(x)*** терпит бесконечный разрыв во внутренней точке ***c*** интервала, то несобственный интеграл 2 рода определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Несобственный интеграл 2-го рода

Функция ***f(x)*** может иметь разрыв на одном из концов интервала, тогда несобственный интеграл 2 рода определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} F(b-\varepsilon) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{\varepsilon \to 0} F(a+\varepsilon)$$

Исследование на сходимость несобственных интегралов 2-го рода

Признак сравнения.

Пусть для всех значений x вблизи точек разрыва выполняется неравенство:

$|f(x)| \le |g(x)|$, тогда:

$$\text{если сходится} \int_a^b g(x)dx,\ \text{то сходится} \int_a^b f(x)dx$$

$$\text{если расходится} \int_a^b f(x)dx,\ \text{то расходится} \int_a^b g(x)dx$$

Исследование на сходимость несобственных интегралов 2-го рода

<u>Предельный признак сравнения.</u>

$$\text{если } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = const, \text{то несобственные интегралы от этих функций}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \ \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ ведут себя одинаково вблизи точек разрыва: сходятся или расходятся}$$

$$\text{Для сравнения используют функции вида:}$$

$$\frac{A}{(b-x)^k} \ \text{и} \ \frac{A}{(x-a)^k}$$

Приложение определенного интеграла

- Площадь плоской области под графиком функции

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \Delta x_i = \int_a^b y(x)dx$$

Приложение определенного интеграла

- Площадь плоской области между графиками функций

$$S = \int_a^b \left(y_2(x) - y_1(x) \right) dx$$

Приложение определенного интеграла

- Вычисление объемов тел вращения

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} S_i \cdot \Delta x_i = \int_a^b S(x)dx$$

$$S(x) = \pi \cdot f^2(x)$$

Приложение определенного интеграла

- Объем тела, образованного вращением графика функции вокруг оси *X*

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$

Приложение определенного интеграла

- Объем тела, образованного вращением вокруг оси *X* области между двумя графиками функций

$$V_{ox} = \pi \int_a^b \left[y^2{}_2(x) - y^2{}_1(x) \right] dx$$

Приложение определенного интеграла

- Объем тела, образованного вращением вокруг оси Y области между двумя графиками функций

$$V_{oy} = \pi \int_a^b \left[x^2{}_2(y) - x^2{}_1(y) \right] dy$$

Приложение определенного интеграла

- Объем тела, образованного вращением графика функции.
- Функция задана параметрически.

$$V = \pi \int_{t1}^{t2} y^2(t) \cdot x^{\backslash}(t)\,dt$$

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$