Неопределенный интеграл

Интегральное исчисление

Определение первообразной

- Функция ***F(x)*** называется первообразной для функции ***f(x)*** на отрезке ***[a; b]*** , если во всех точках этого отрезка выполняется равенство:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Теорема

- Все первообразные для данной функции отличаются на постоянное слагаемое.
- Для данной функции существует семейство первообразных.

$$\boxed{F_1(x) - F_2(x) = C}$$

Определение неопределенного интеграла

- Неопределенным интегралом называется функциональное выражение ***F(x)+C*** и обозначается:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

- ***f(x)*** - подинтегральная функция
- ***dx*** - дифференциал переменной, по которой интегрируют функцию.

Геометрический смысл неопределенного интеграла

- Неопределенный интеграл $F(x) + C$ – это семейство кривых, каждая из которых получается путем сдвига одной кривой параллельно самой себе вверх и вниз по оси y.
- Первообразная и неопределенный интеграл существуют только для непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций.

Свойства неопределенного интеграла

$$1)\ \left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x)$$

$$2)\ d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

$$3)\ \int dF(x) = \int f(x)dx = F(x)+C$$

$$4)\ \int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$5)\ \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Таблица неопределенных интегралов

1) $\int A dx = Ax + C$

2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$

4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

6) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

7) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

8) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

9) $\int e^x dx = e^x + C$

10) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

12) $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$

13) $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$

Метод подведения под знак дифференциала

$$dx = d(x+a)$$

$$adx = d(ax)$$

$$x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1})$$

Интегрирование по частям

$$uv = \int udv + \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int vdu = uv - \int udv$$

$$\int P_n(x)e^{ax}dx$$

$$\int \ln xP_n(x)dx$$

Циклические интегралы

$$\int \sin(kx)e^{ax}dx$$

$$\int \cos(kx)e^{\alpha x}dx$$

При решении используется метод интегрирования по частям

Интегрирование дробно-рациональных функций

1) $\dfrac{A}{x-a}$

2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}, \; k \geq 2$

3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, действительных корней нет

4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \; k \geq 2,$ действительных коней нет

Разложение дроби на простые слагаемые

$$\frac{ax+b}{x(x+c)(x+d)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+c}+\frac{C}{x+d}$$

$$\frac{ax+b}{x^2(x^2+c)(x+d)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+c}+\frac{E}{x+d}$$

Интегралы от тригонометрических функций. Непосредственное интегрирование.

Используются тригонометрические тождества:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos kx dx = \frac{1}{k} d(\sin kx) \qquad \sin kx dx = -\frac{1}{k} d(\cos kx)$$

Интегралы от тригонометрических функций.

Используются тригонометрические тождества:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

Интегралы от тригонометрических функций. Универсальная тангенциальная подстановка.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2arctgt \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Интегралы от тригонометрических функций. Простая тангенциальная подстановка.

$$\mathrm{tgx} = \mathrm{t} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$x = arctgt \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Интегрирование дифференциальных биномов. Подстановки Чебышева.

$$\int x^m \cdot \left(ax^n + b\right)^p dx, \quad a, b - const$$

1. $p -$ *целое число* $\rightarrow x = t^s$, $s -$ *общий множитель дробей* m n

2. $\dfrac{m+1}{n}$ *целое число* $\rightarrow$ $ax^n + b = t^s$ $s -$ *знаменатель дроби* p

3. $\dfrac{m+1}{n} + p -$ *целое число* $\rightarrow \dfrac{ax^n + b}{x^n} = t^s$ $s -$ *знаменатель дроби* p

Используется метод подстановок таким образом, чтобы подынтегральная функция стала рациональной.

Интегралы, содержащие радикалы

$$1.\ \sqrt{a^2 - x^2} \qquad x = a\sin t$$

$$2.\ \sqrt{a^2 + x^2} \qquad x = a\,tg\,t$$

$$3.\ \sqrt{x^2 - a^2} \qquad x = \frac{a}{\sin t}$$

Подстановки Эйлера.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

1. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t,\ a > 0$

2. $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c},\ c > 0$

3. $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)t,\ \ \alpha, \beta - \textit{действительные корни}$