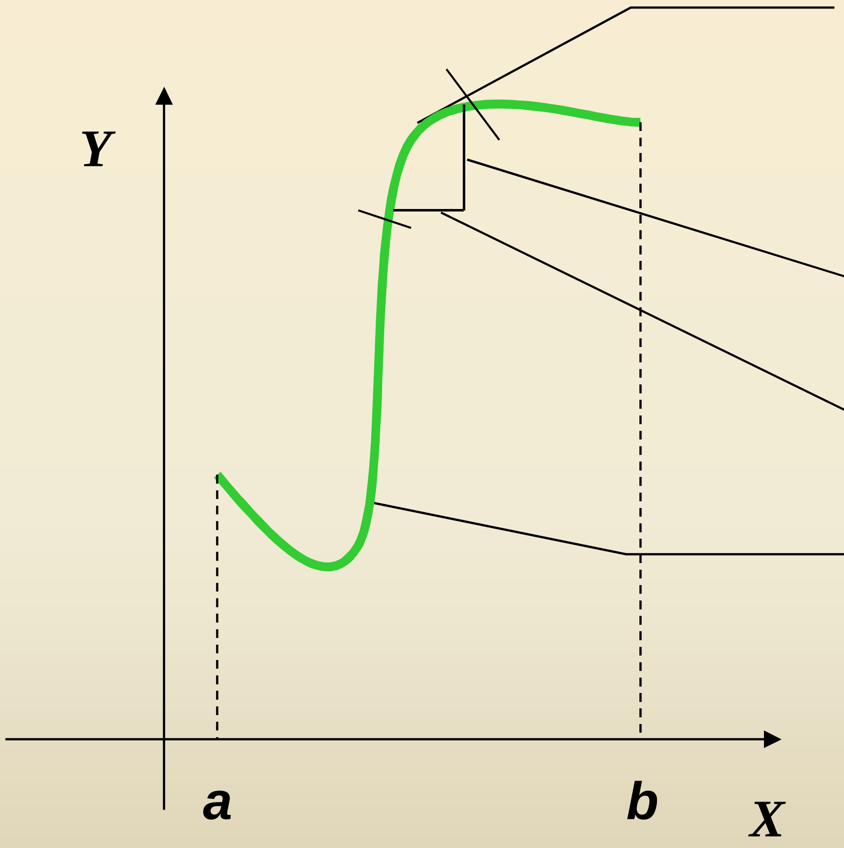
Криволинейные интегралы

Интегральное исчисление

I

Понятие криволинейного интеграла 1 рода



Δl_i – длина i части
$f(x_i; y_i)$ – значение функции в i части

Δy

Δx

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

L – кривая линия
$z=f(x; y)$ функция определена вдоль L

Определение криволинейного интеграла 1 рода

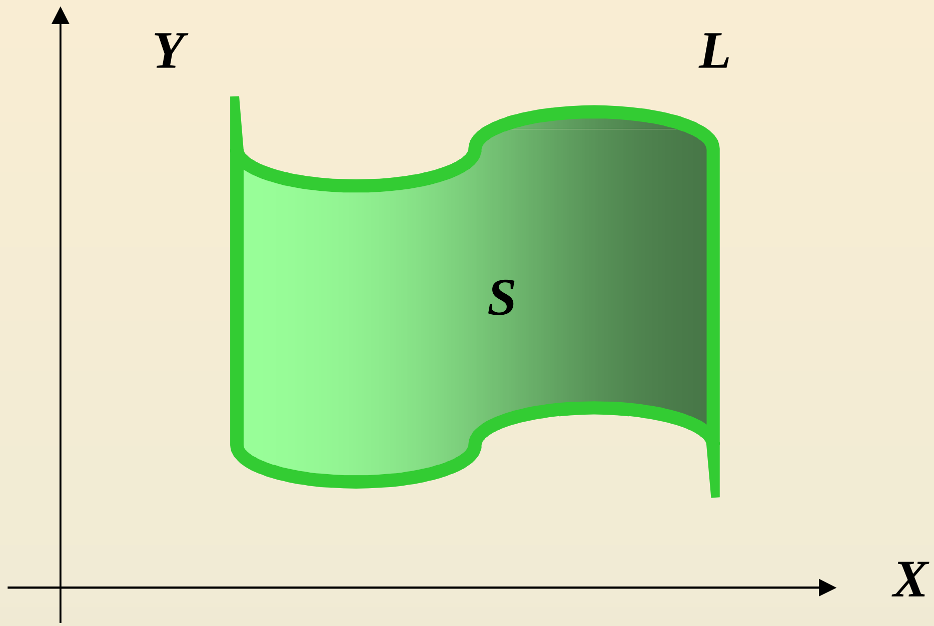
$$\lim_{\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta l_i = \int_L f(x; y)dl$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

L – *линия интегрирования*

Геометрический смысл криволинейного интеграла 1 рода

$$\int_L f(x; y)dl$$



- Площадь цилиндрической поверхности образованной кривой ***L***, описываемой функцией ***f(x; y)***

Свойства криволинейного интеграла 1 рода

$$\int\limits_{L+} f(x;y)dl = \int\limits_{L-} f(x;y)dl$$

$$\int\limits_{L} \left(f(x;y) \pm g(x;y)\right)dl = \int\limits_{L} f(x;y)dl \pm \int\limits_{L} g(x;y)dl$$

$$\int\limits_{L} k \cdot f(x;y)dl = k \cdot \int\limits_{L} f(x;y)dl$$

$$\int\limits_{L} f(x;y)dl = \int\limits_{L1} f(x;y)dl + \int\limits_{L2} f(x;y)dl$$

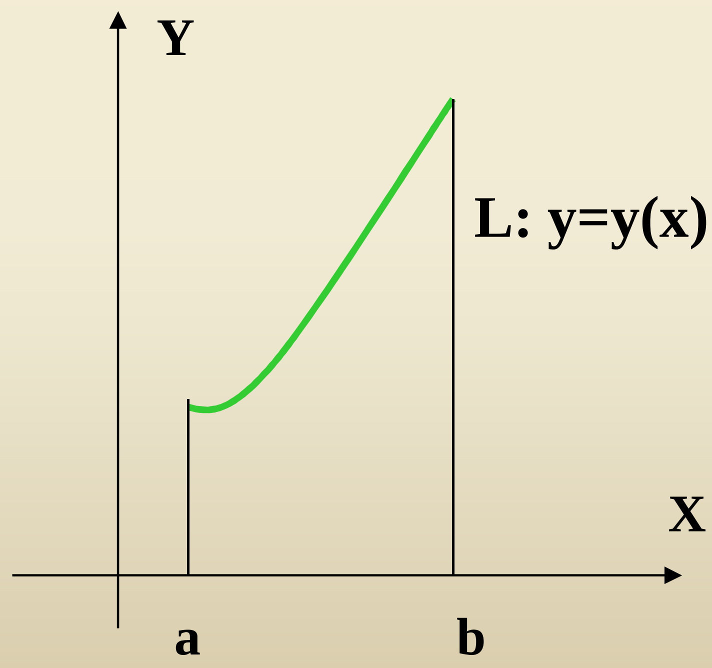
$$L = L1 + L2$$

Вычисление криволинейного интеграла 1 рода

$$y = y(x) \quad dy = y'_x dx$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (y'_x)^2 dx^2} = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\,dx$$

$$\int\limits_L f(x;y)\,dl = \int\limits_a^b f(x;y(x))\sqrt{1 + (y'_x)^2}\,dx$$

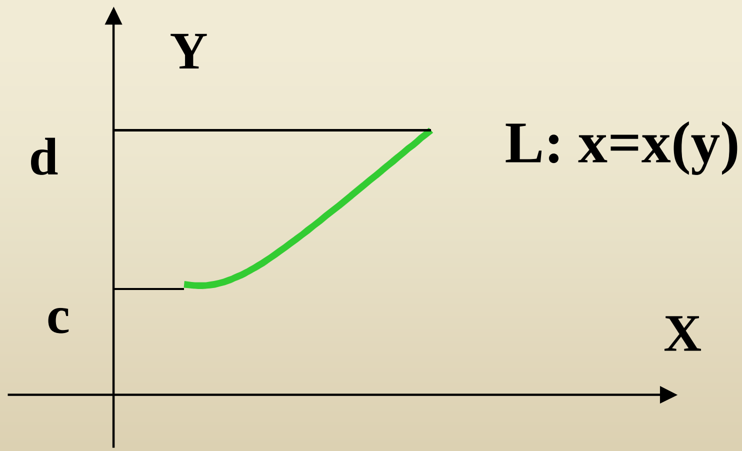


Вычисление криволинейного интеграла 1 рода

$$x = x(y) \quad dx = x'_y dy$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dy^2 + (x'_y)^2 dy^2} = \sqrt{1 + (x'_y)^2}\, dy$$

$$\int\limits_L f(x;y)\,dl = \int\limits_c^d f(x(y);y)\sqrt{1 + (x'_y)^2}\, dy$$



Вычисление криволинейного интеграла 1 рода.

- Линия интегрирования задана параметрически.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(x_t^{\backslash})^2 + (y_t^{\backslash})^2 + (z_t^{\backslash})^2}\,dt$$

$$\int_L f(x; y; z)\,dl = \int_{t1}^{t2} \varphi(t)\sqrt{(x_t^{\backslash})^2 + (y_t^{\backslash})^2 + (z_t^{\backslash})^2}\,dt$$

Вычисление криволинейного интеграла 1 рода.

- Линия интегрирования задана в полярных координатах.

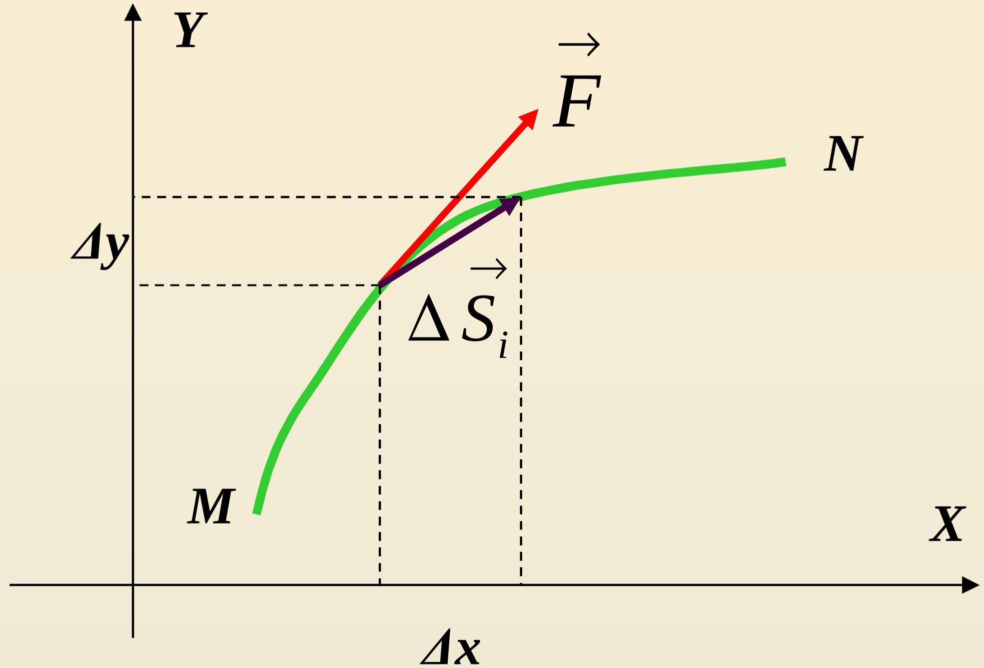
$$\rho = \rho(\varphi)$$

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho_\varphi^\backslash)^2}\,d\varphi$$

$$\int_L f(x;y)\,dl = \int_\alpha^\beta \psi(\rho,\varphi)\sqrt{\rho^2 + (\rho_\varphi^\backslash)^2}\,d\varphi$$

Криволинейный интеграл 2 рода

- Пусть под действием силы точка движется вдоль линии L из точки M в точку N



$$\vec{F}(x_i\ y_i) = P(x_i\ y_i) \cdot \vec{i} + Q(x_i\ y_i) \cdot \vec{j}$$

$$\Delta \vec{S}_i = \Delta x_i \cdot \vec{i} + \Delta y_i \cdot \vec{j}$$

Определение криволинейного интеграла 2 рода

- Работа, которую совершает сила при перемещении точки вдоль линии L из точки M в точку **N**, равна:

$$A_i = (\vec{F}_i, \vec{\Delta S}_i) = P(x_i\ y_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i\ y_i) \cdot \Delta y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} P(x_i\ y_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(x_i\ y_i) \cdot \Delta y_i$$

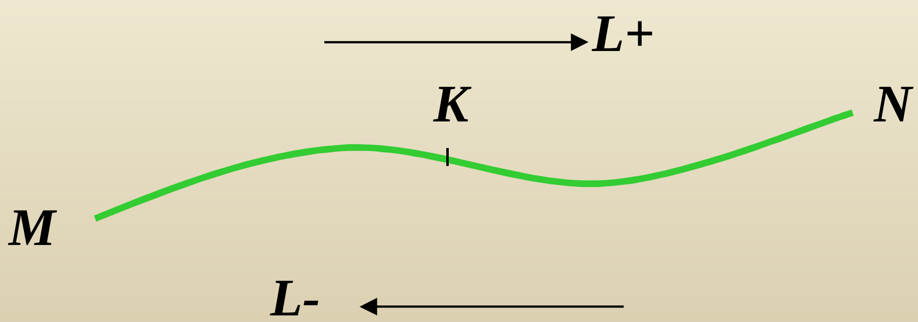
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i\ y_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i\ y_i) \cdot \Delta y_i \right] = \int_L \left[P(x, y)dx + Q(x, y)dy \right]$$

Свойства криволинейного интеграла 2 рода

$$\int\limits_{L+}\left[Pdx+Qdy\right]=-\int\limits_{L-}\left[Pdx+Qdy\right]$$

$$\int\limits_{L}k\cdot\left[Pdx+Qdy\right]=k\cdot\int\limits_{L}\left[Pdx+Qdy\right]$$

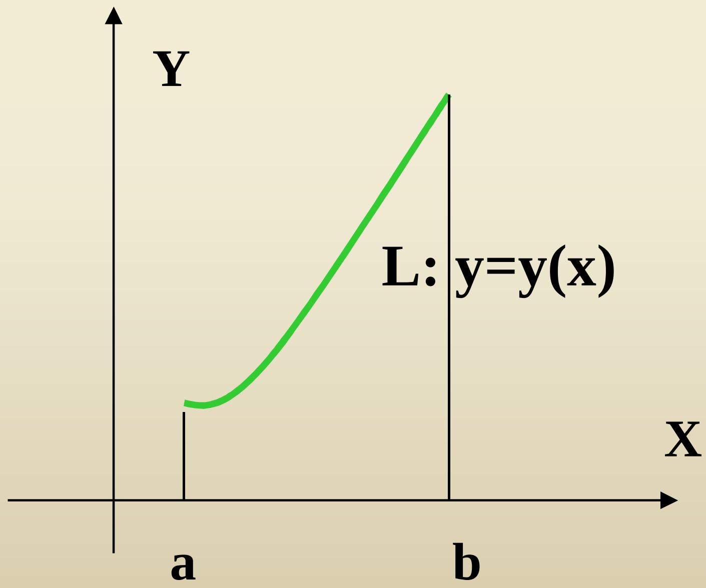
$$\int\limits_{M}^{N}\left[Pdx+Qdy\right]=\int\limits_{M}^{K}\left[Pdx+Qdy\right]+\int\limits_{K}^{N}\left[Pdx+Qdy\right]$$



Вычисление криволинейного интеграла 2 рода

$$y = y(x) \quad dy = y'_x dx$$

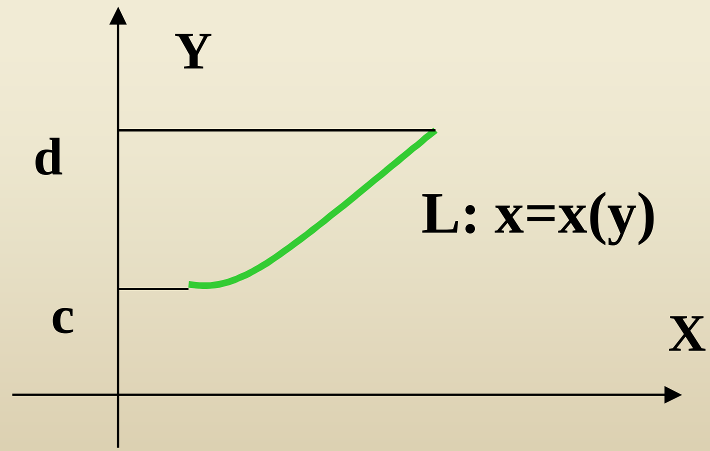
$$\int\limits_L \left[P(x;y)dx + Q(x,y)dy\right] = \int\limits_a^b \left[P + Q \cdot y'_x\right]dx$$



Вычисление криволинейного интеграла 2 рода

$$x = x(y) \quad dx = x'_y dy$$

$$\int_L \left[P(x;y)dx + Q(x,y)dy\right] = \int_c^d \left[P \cdot x'_y + Q\right] dy$$



Вычисление криволинейного интеграла 2 рода.

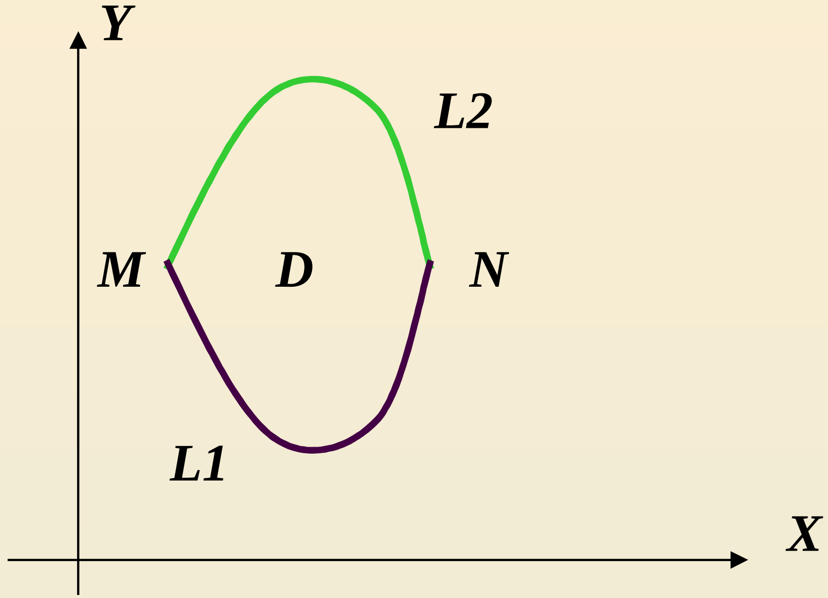
- Линия интегрирования задана параметрически.

$$\begin{cases} x = x(t) \quad dx = x_t^{\backslash} \cdot dt \\ y = y(t) \quad dy = y_t^{\backslash} \cdot dt \end{cases}$$

$$\int_L \left[P(x;y)dx + Q(x,y)dy \right] = \int_{t1}^{t2} \left[P \cdot x_t^{\backslash} + Q \cdot y_t^{\backslash} \right] dt$$

Формула Грина

- Устанавливает связь между криволинейным интегралом 2 рода по замкнутому контуру и двойным интегралом по области внутри контура

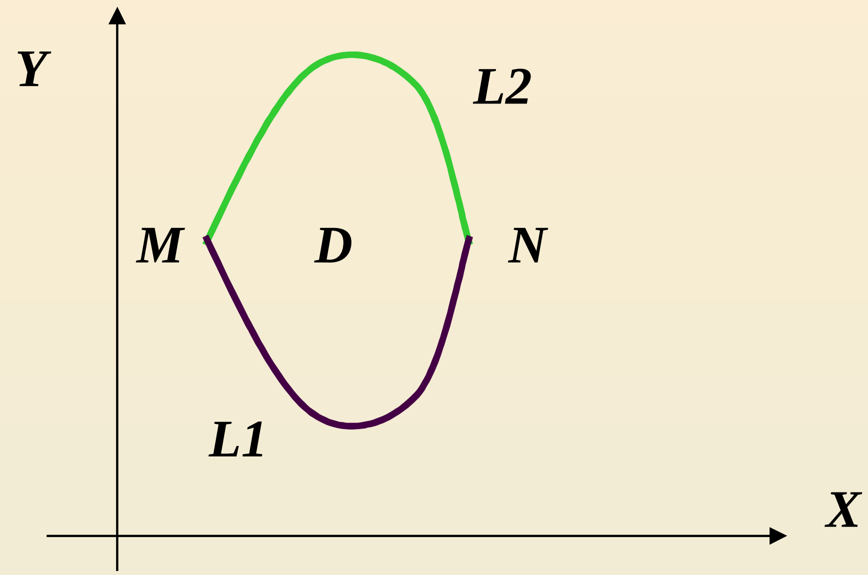


$$\oint_{L+}\big(P(x,y)dx+Q(x,y)dy\big)=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\oint_{L-}\big(P(x,y)dx+Q(x,y)dy\big)=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy$$

Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$



- При выполнении данного условия интеграл не зависит от пут интегрирования и будет равен нулю.

$$\oint_{L+} \big(P(x,y)dx + Q(x,y)dy\big) = 0$$