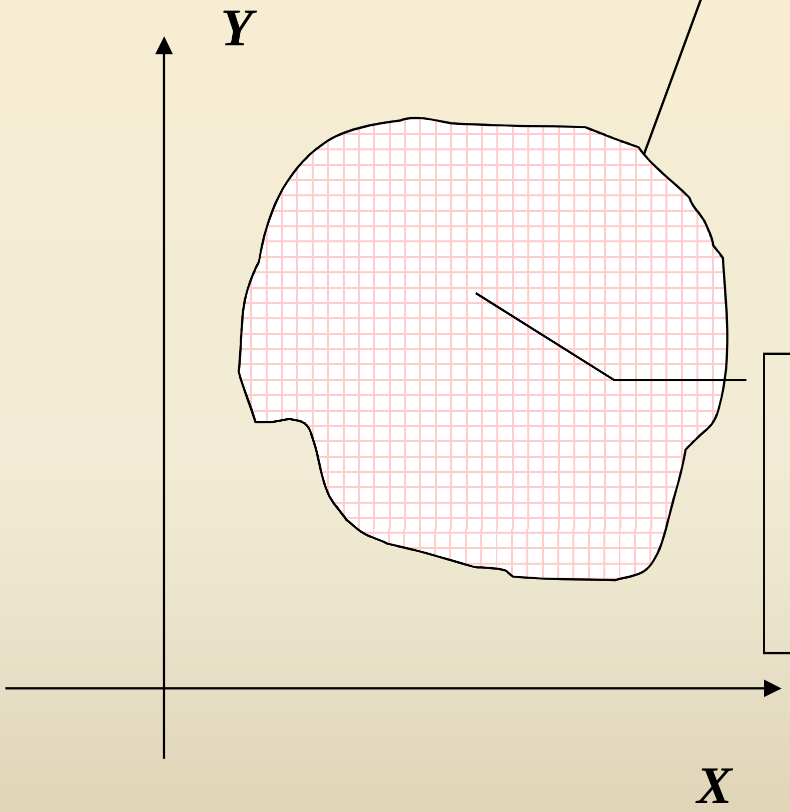
Кратные интегралы

Интегральное исчисление

I

Понятие двойного интеграла

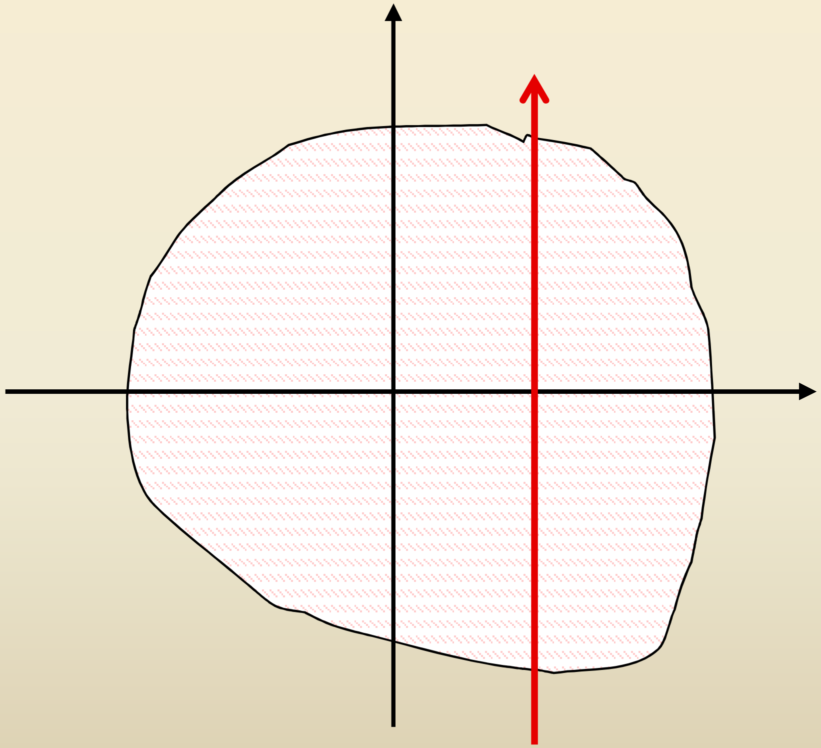


D – область интегрирования
$z=f(x;\,y)$ функция определена в D

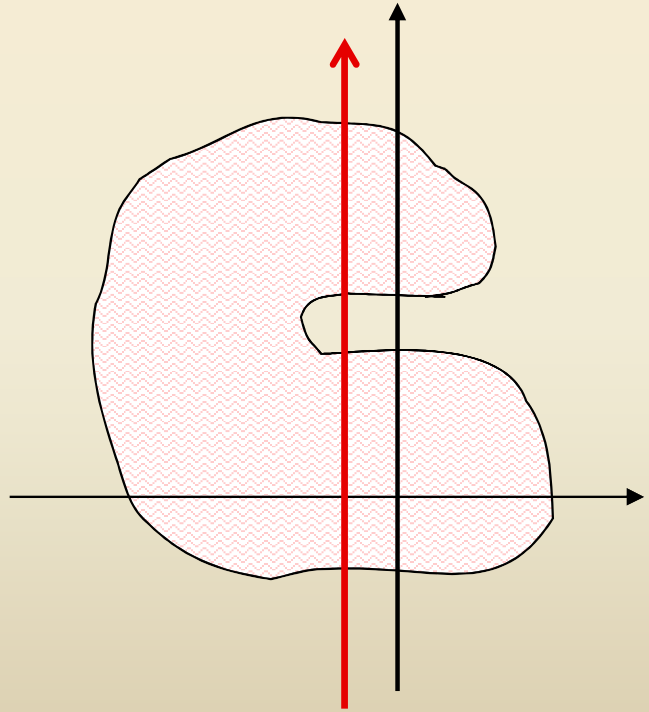
ΔSi – площадь i части
$f(x_i;\,y_i)$ – значение функции в i части

Область интегрирования

- Правильная область



- Неправильная область



Определение двойного интеграла

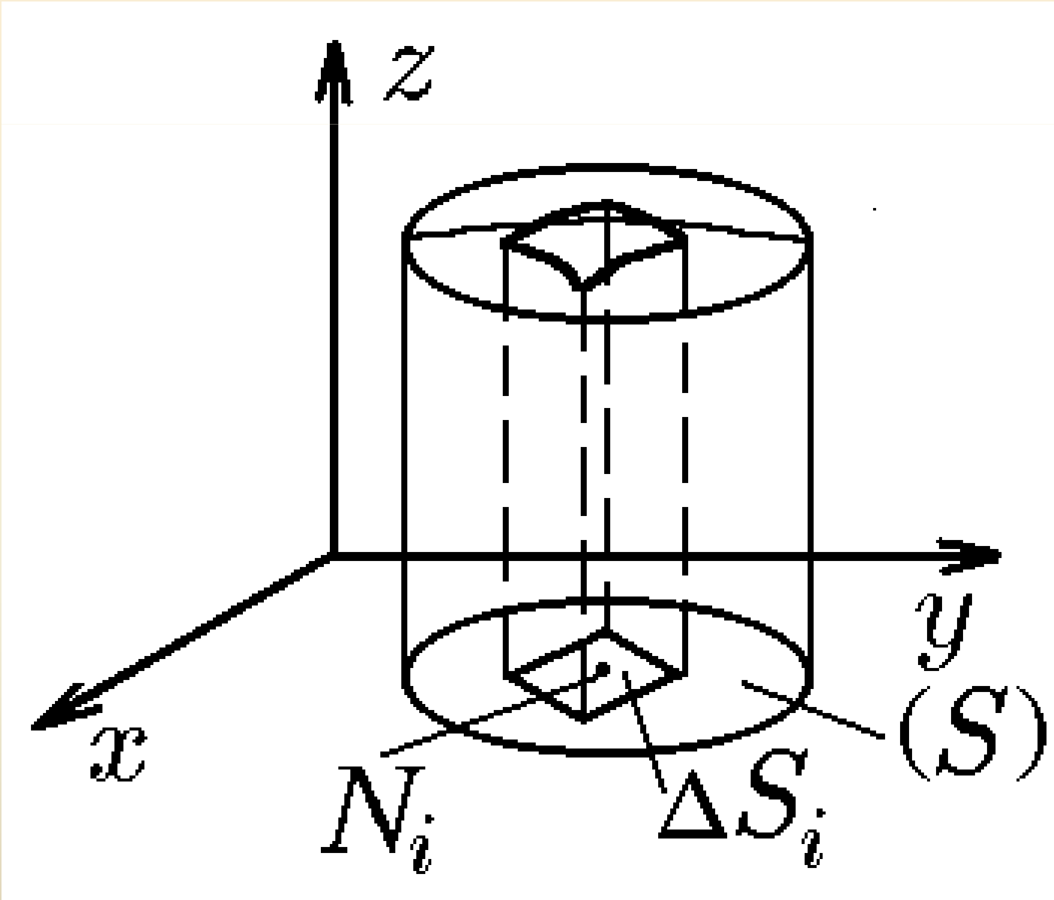
$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta x_i \Delta y_i = \iint_D f(x; y)dxdy$$

$$dS = dxdy$$

$$\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$$

$$D - \textit{область интегрирования}$$

Геометрический смысл двойного интеграла



Свойства двойного интеграла

$$\iint\limits_D (f(x;y)+g(x;y))dS = \iint\limits_D f(x;y)dS + \iint\limits_D g(x;y)dS$$

$$\iint\limits_D Cf(x;y)dS = C\iint\limits_D f(x;y)dS$$

$$\iint\limits_D f(x;y)dS = \iint\limits_{D1} f(x;y)dS + \iint\limits_{D2} f(x;y)dS$$

$$D = D1 + D2$$

Свойства двойного интеграла

Если m – наименьшее значение ***f(x;y)***,

а M – наибольшее значение ***f(x;y)*** в области D то:

$$mS \le \iint_D f(x;y)\,dS \le M\,S$$

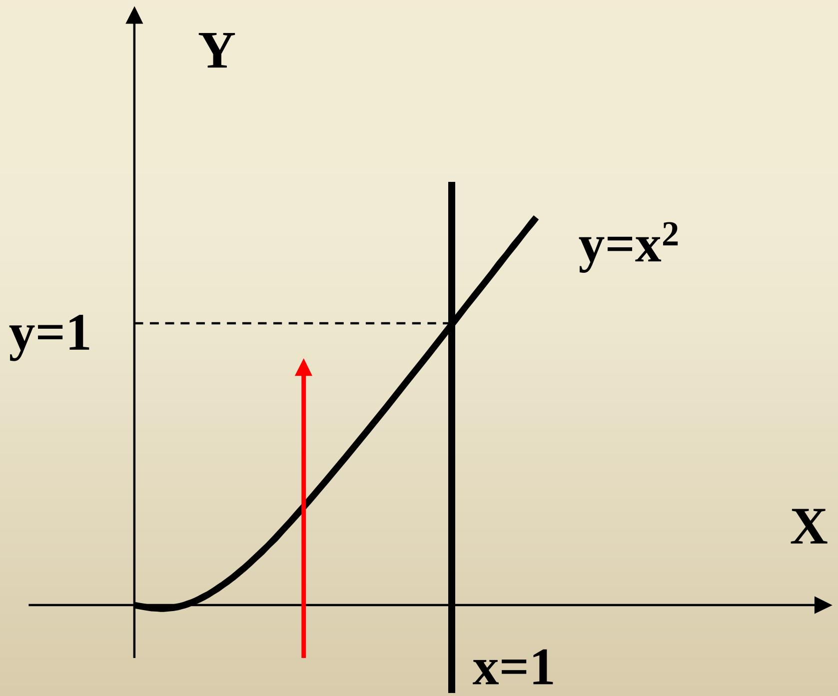
Теорема о среднем

- Если ***f(x; y)*** непрерывна в области D, то среднее значение функции в некоторой точке ***k*** будет вычисляться по формуле:

$$f(k) = \frac{1}{S} \iint_D f(x; y) dS$$

Вычисление двойного интеграла

$$\iint\limits_D f(x;y)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx$$



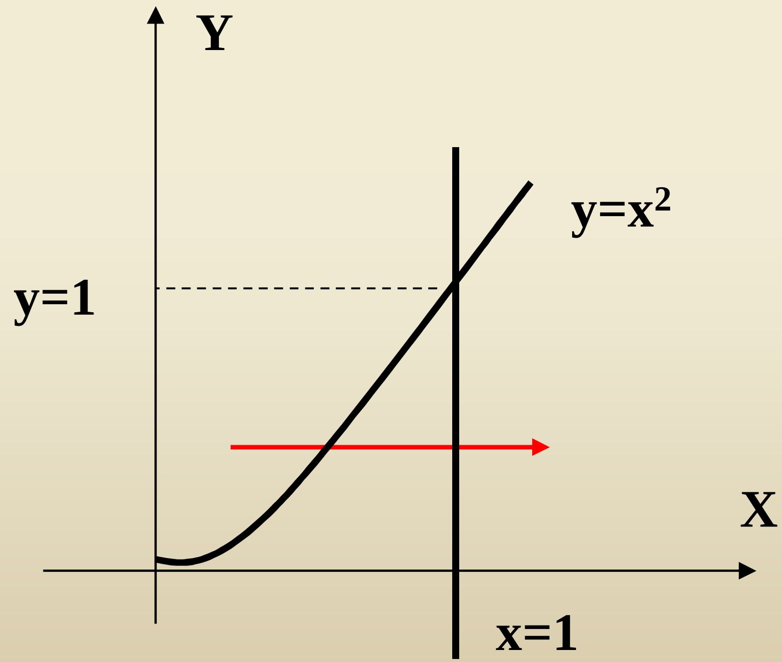


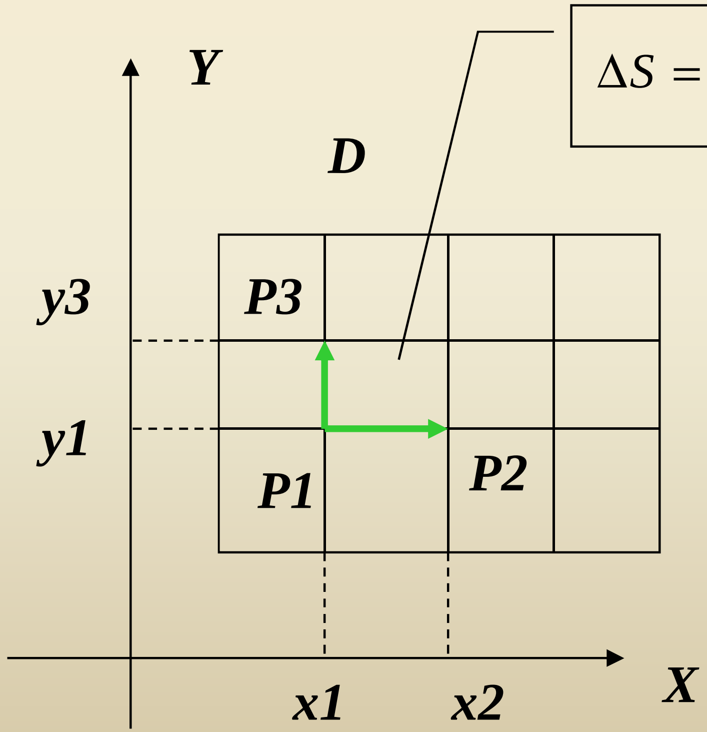
Схема вычисления двойного интеграла

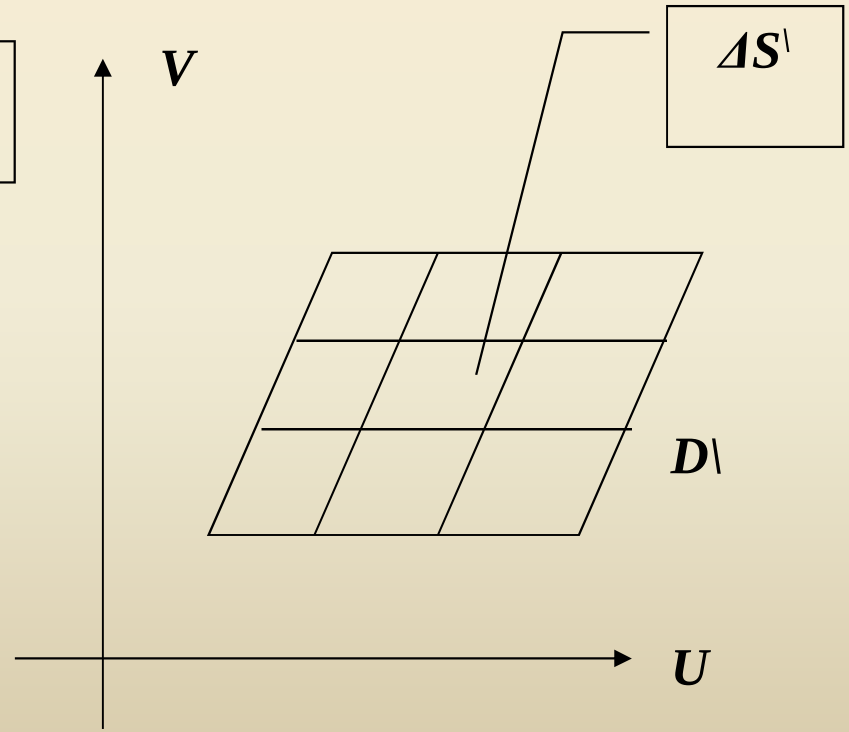
1. Построить область интегрирования.
2. Выбрать порядок интегрирования.
3. Вычислить внутренний интеграл. При этом пределами интегрирования должны быть функции. Если интегрирование ведется по y, то x считают $const$.
4. Вычислить внешний интеграл. При этом пределами интегрирования должны быть константы.

Замена переменной в двойном интеграле

$$\begin{cases} x = x(u; v) \\ y = y(u; v) \end{cases}$$

- *x, y – декартовы координаты*
- *u, v – новые криволинейные координаты*





Замена переменной в двойном интеграле

$$\iint\limits_{D} f(x;y)dxdy = \iint\limits_{D^{\backslash}} f[x(u;v);y(u;v)]\left|J\right|dudv$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

- J - якобиан

Двойной интеграл в полярных координатах

$$\iint_D f(x;y)\,dxdy = \iint_{D^\backslash} \psi(\rho;\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$$

Приложения двойного интеграла

- Площадь плоской области в декартовой системе координат.

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_D dS$$

- Площадь плоской области в полярной системе координат.

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D^\backslash} \rho d\rho d\varphi$$

Приложения двойного интеграла

- Масса плоской пластины в декартовой системе координат.
- $\delta(x;\, y)$ - поверхностная плотность распределения массы

$$M = \iint\limits_{D} \delta(x;y)\,dxdy$$

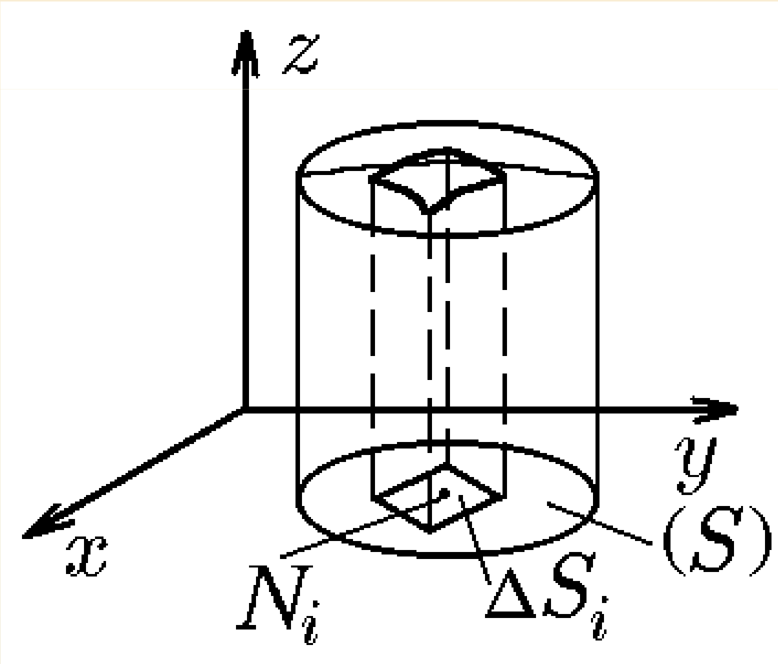
Приложения двойного интеграла

- Координаты центра тяжести
- $\delta(x; y)$ - поверхностная плотность распределения массы

$$x_0 = \frac{\iint\limits_D x \cdot \delta(x; y)\,dxdy}{\iint\limits_D \delta(x; y)\,dxdy}$$

$$y_0 = \frac{\iint\limits_D y \cdot \delta(x; y)\,dxdy}{\iint\limits_D \delta(x; y)\,dxdy}$$

Определение тройного интеграла



- Пусть в пространстве задана некоторая область ***V*** ограниченная поверхностью ***S***.
- Пусть в этой области задана непрерывная функция ***f(x, y, z)***.
- Разобьем область на элементарные объемы ***ΔVi*** и в каждом из них выберем точку ***(x_i, y_i, z_i)***.

Определение тройного интеграла

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i = \iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz$$

$$dV = dxdydz$$

$$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

$$V - \textit{область интегрирования}$$

Геометрический смысл тройного интеграла

$$V = \iiint_V dv = \iiint_V dxdydz$$

$$dV = dxdydz$$

$$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

$$V - \text{область интегрирования}$$

Свойства тройного интеграла

$$\iiint\limits_V [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)] dV = \iiint\limits_V f(x,y,z) dV \pm \iiint\limits_V g(x,y,z) dV$$

$$\iiint\limits_V C \cdot f(x,y,z) dV = C \iiint\limits_V f(x,y,z) dV$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z) dV = \iiint\limits_{V1} f(x,y,z) dV + \iiint\limits_{V2} f(x,y,z) dV$$

$$V = V1 + V2$$

Свойства тройного интеграла

Если *m* – наименьшее значение ***f(x; y; z)***,

а *M* – наибольшее значение ***f(x; y; z)*** в области ***V*** то:

$$mV \le \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV \le MV$$

Теорема о среднем

- Если ***f(x; y; z)*** непрерывна в области V, то среднее значение функции в некоторой точке ***k*** будет вычисляться по формуле:

$$f(k) = \frac{1}{V}\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV$$

Вычисление тройного интеграла

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz$$

Схема вычисления тройного интеграла

1. Построить область интегрирования V.
2. Выбрать порядок интегрирования.
3. Изобразить проекцию области V на к-л. координатную плоскость, получим плоскую область D.
4. Определить пределы интегрирования в области D.

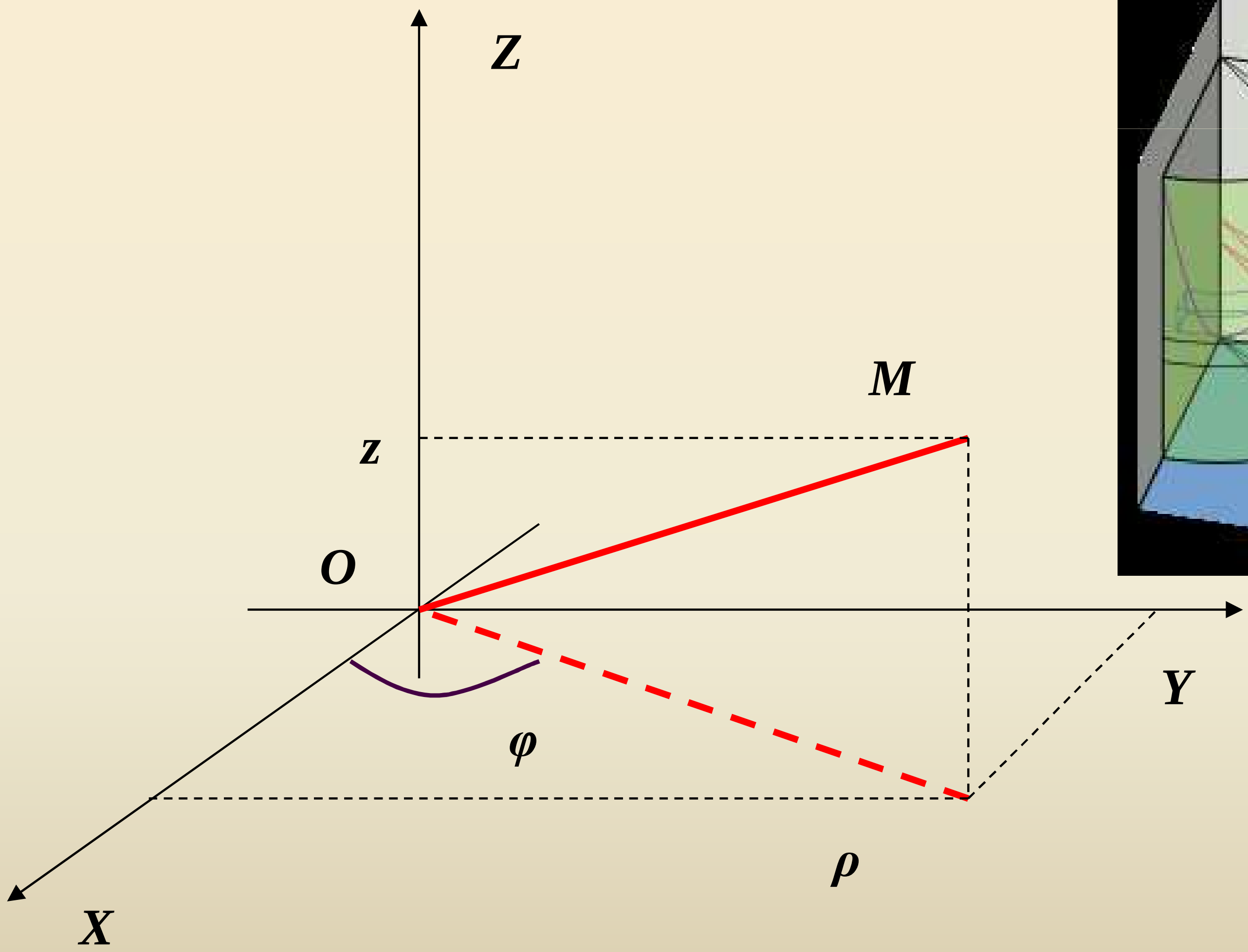
Замена переменной в тройном интеграле

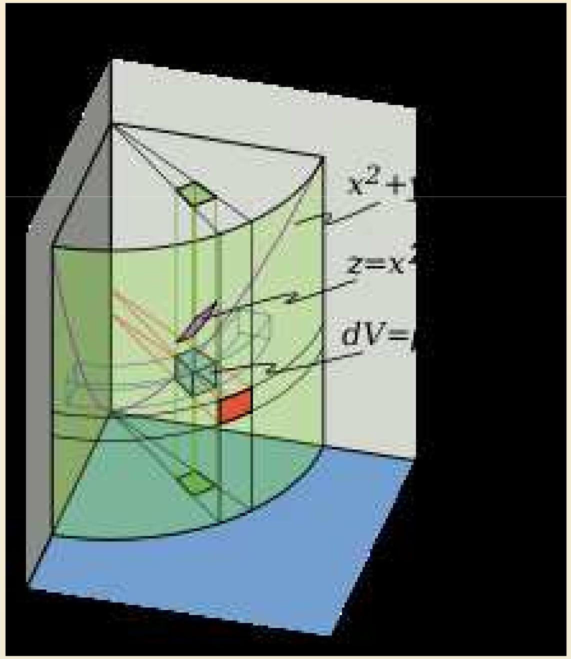
$$\begin{cases} x = x(u;v;w) \\ y = y(u;v;w) \\ z = z(u;v;w) \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

- J - якобиан

Цилиндрическая система координат.



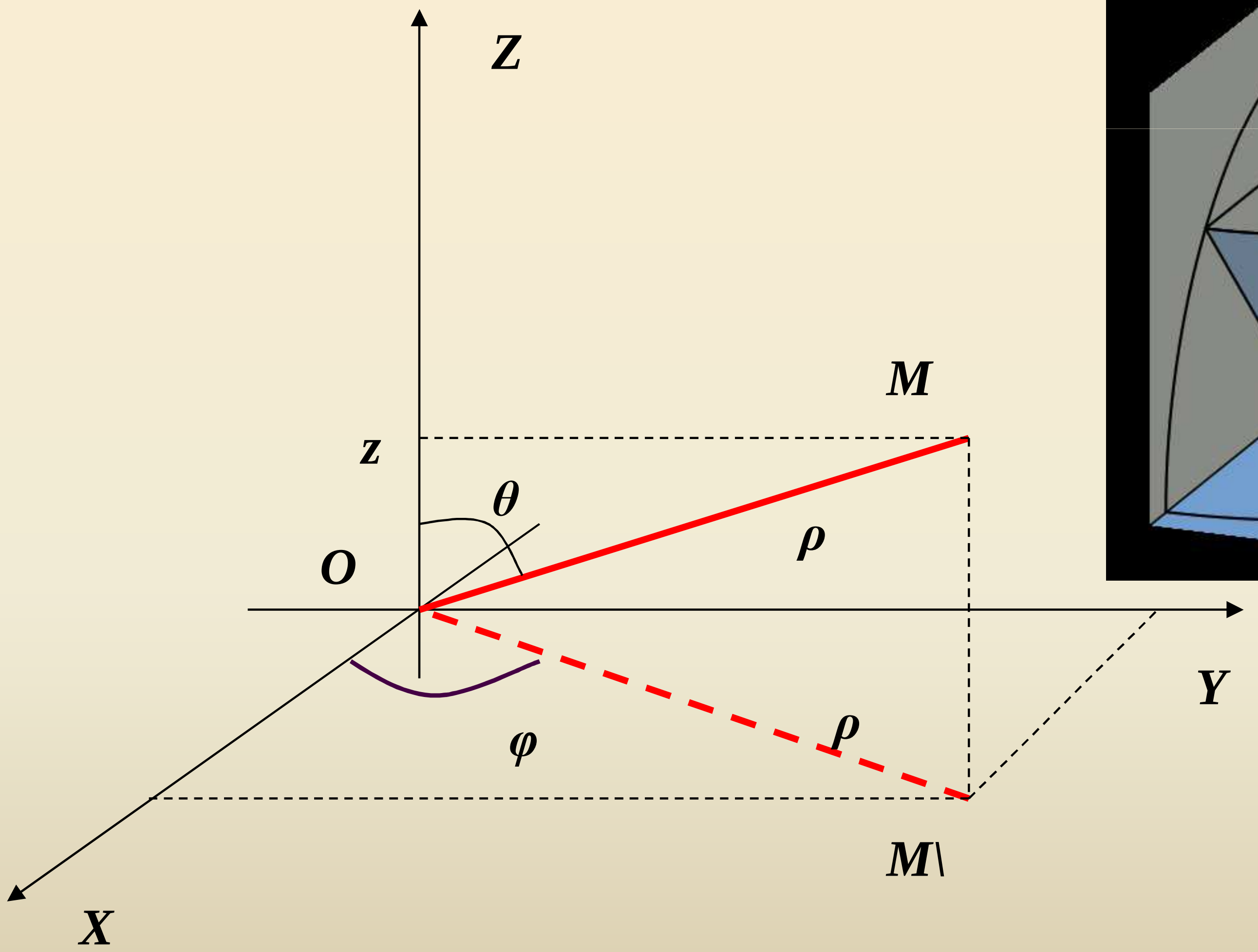


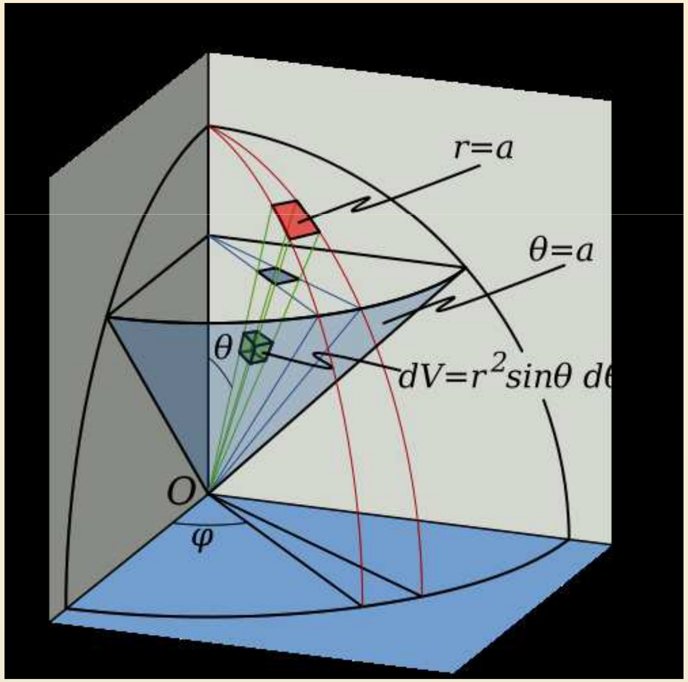
Тройной интеграл в цилиндрических координатах.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

Сферическая система координат.





Тройной интеграл в сферических координатах.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \cdot \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \cdot \sin \theta \\ z = z \cos \theta \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = -\rho^{2} \cdot \sin \theta$$