Дифференциальные уравнения 1 порядка

Основные типы уравнений

Уравнение с разделяющимися переменными. Случай 1.

$$\begin{cases} y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \\ y' = \dfrac{dy}{dx} \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Правая часть уравнения представлена произведением 2-х функций, одна из которых зависит только от переменной ***x***, другая от переменной ***y***.

Уравнение с разделяющимися переменными. Случай 2.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$M(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

$$N(x,y) = g_1(x) \cdot g_2(y)$$

Уравнение вида $y' = f(ax+by+c)$

- Используется подстановка:

$$z(x) = ax+by+c$$

Сводится к уравнению с разделяющимися переменными

Уравнение вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

<u>Схема решения:</u>

1. Выразить в явном виде: y'
2. Сделать замену:

$$t(x) = \frac{y}{x}$$

$$y = x \cdot t(x)$$

$$y' = t(x) + x \cdot t'(x)$$

3. Решить уравнение с разделяющимися переменными

Уравнение вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

1. Сделать замену:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + x_0 \\ y = \bar{y} + y_0 \end{cases}$$

2. $\boldsymbol{x_o}$; $\boldsymbol{y_o}$ – есть решение системы:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 = 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 = 0 \end{cases}$$

Линейное дифференциальное уравнение вида

$$y^{\backslash} + P(x) \cdot y = Q(x)$$

1. ДУ называется линейным, если ***y*** и ***y*** входят в него в 1-ой степени и не перемножаются.
2. Если ***Q(x)=0***, то уравнение является однородным.
3. Если ***Q(x)≠0***, то уравнение является неоднородным.

Линейное дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$$

Два метода решения ЛДУ 1 порядка:

1. метод Бернулли (метод подстановки);
2. метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).

Метод Бернулли $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$

Используемая подстановка:

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Уравнение сводится к виду:

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + P(x) \cdot v) = Q(x)$$

Метод Лагранжа $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$

2 этапа решения уравнения:

1. Решение однородного уравнения:

$\overline{y} = f(x) + C$ или $\overline{y} = f(x) \cdot C$

2. Решение неоднородного уравнения при условии:

$$C \to C(x)$$

Уравнение Бернулли

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^k, \quad k \neq 0 \ \ k \neq 1$$

Схема решения:

1. $\dfrac{y'}{y^k} + P(x)\cdot\dfrac{y}{y^k} = Q(x)$

2. $z(x) = \dfrac{y}{y^k} = y^{1-k}$

3. $z'(x) = (1-k)\cdot y^{-k}\cdot y' \Rightarrow y'\cdot y^{-k} = \dfrac{z'(x)}{1-k}$

4. $\dfrac{1}{1-k}\cdot z' + P(x)\cdot z = Q(x)$

Уравнение в полных дифференциалах

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Условие: $$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y)$$

$$U(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y)$$

$$U(x, y) = \int Q(x, y)dy + \phi(x)$$