Решение однородной системы линейных уравнений

Линейная алгебра

Однородная система линейных уравнений

- ОСЛУ всегда имеет тривиальное (нулевое) решение.
- Если ОСЛУ определенная, то существует только тривиальное решение.
- Если ОСЛУ неопределенная, то кроме тривиального существует и нетривиальное решение.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однородная система линейных уравнений

Пусть дана система 4-х линейных уравнений с 5-ю неизвестными.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Однородная система линейных уравнений

Шаг 1. Выпишем матрицу числовых коэффициентов и определим её ранг

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

Однородная система линейных уравнений

Шаг 2. Для определения ранга матрицы вместо 2-ой и 4-ой строк запишем следующие комбинации: s1-2s2; s1-2s4:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 9 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & -15 & 9 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \boxed{s1} \\ \boxed{s1-2s2} \\ \boxed{s3} \\ \boxed{s1-2s4} \end{array} \end{array}$$

Однородная система линейных уравнений

Шаг 3. Преобразованная матрица имеет линейно-зависимые строки: 2-ю, 3-ю и 4-ю, следовательно, ранг матрицы равен 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & -15 & 9 \end{pmatrix} \qquad Rang A = 2$$

s4=-3s2

Однородная система линейных уравнений

Шаг 4. По теореме Кронекера-Капелли, если ранг основной матрицы меньше числа неизвестных, то система имеет множество решений, т.е. система будет неопределенной.

Однородная неопределенная система уравнений имеет фундаментальную систему решений ФСР.

ФСР состоит из (n-R) линейно независимых решений, т.е. число независимых переменных равно (n-R).

Любое решение можно представить в виде линейной комбинации ФСР.

Однородная система линейных уравнений

Шаг 5. Исходная система содержит 5 неизвестных, а её ранг равен 2. Следовательно число независимых (свободных) переменных равно 5-2=3, число базисных переменных 2.

Независимыми переменными могут быть, например, x_3, x_4 и x_5 .

Базисный минор можно составить из 1-го, 2-го столбцов.

Базисные переменные x_1 x_2.

Однородная система линейных уравнений

Шаг 6. Из 1-ого уравнения системы выразим x_1, из 3-го уравнения выразим x_2 :

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad\qquad - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad\quad - x_4 + x_5 = 0 \\ \quad - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_5 - x_3 - 3x_4)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_3 + 5x_4 - 3x_5)$$

Однородная система линейных уравнений

Шаг 7. Запишем общее решение системы :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 = \frac{1}{2}(x_5 - x_3 - 3x_4) \\ x_2 = \frac{1}{2}(x_3 + 5x_4 - 3x_5) \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Однородная система линейных уравнений

Шаг 8. Однородная система имеет фундаментальную систему решений, состоящую из (n-R) линейно-независимых решений. Запишем общее решение системы. Присвоим свободным неизвестным следующие произвольные значения:

$$x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0$$

$$x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad x_5 = 0$$

$$x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 1$$

Однородная система линейных уравнений

Шаг 9. Составим фундаментальную систему решений. Значения x1, x2 вычислим исходя из общего решения (см шаг 7.):

$$C1=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C2=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C3=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Однородная система линейных уравнений

Шаг 10. Запишем общее решение однородной системы как линейную комбинацию:

$$X = \lambda 1 \cdot C1 + \lambda 2 \cdot C2 + \lambda 3 \cdot C3 = \lambda 1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda 2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$