Решение матричных уравнений

Линейная алгебра

Матричные уравнения

Пусть даны 3 матрицы: ***A***, ***B*** – известные, ***X*** – неизвестная. Необходимо найти матрицу ***X***.

Рассмотрим 1-ый вариант матричного уравнения.

$$\boxed{\begin{aligned} &A \cdot X = B \\ &A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \\ &X = A^{-1} \cdot B \end{aligned}}$$

Решение матричного уравнения

Пусть дана матрица ***A*** 3-го порядка и матрица ***B*** размерности 3х1.

Для нахождения матрицы ***X*** необходимо матрицу ***B*** **слева** умножить на матрицу ***A***$^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Решение матричного уравнения

Шаг 1. Найдем обратную матрицу, воспользуемся результатом, полученным в предыдущем примере (см. Обратная матрица).

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \overset{\cup}{A}^{T} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение матричного уравнения

Шаг 2. Для нахождения $\boldsymbol{x_{11}}$ перемножим 1-ую строку обратной матрицы на 1-ый и единственный столбец матрицы $\boldsymbol{B}$:

$$x_{11} = -\frac{1}{12}\cdot(-2\cdot 4 - 4\cdot 1 - 7\cdot 2) = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}$$

Решение матричного уравнения

Шаг 3. Для нахождения x_{21} перемножим 2-ую строку обратной матрицы на 1-ый и единственный столбец матрицы ***B***:

$$x_{21} = -\frac{1}{12} \cdot (2 \cdot 4 - 8 \cdot 1 - 11 \cdot 2) = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$$

Решение матричного уравнения

Шаг 4. Для нахождения x_{31} перемножим 3-ую строку обратной матрицы на 1-ый и единственный столбец матрицы B:

$$x_{31} = -\frac{1}{12} \cdot (-2 \cdot 4 - 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

Решение матричного уравнения

Запишем полученную матрицу ***X*** размерности 3x1

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{13}{6} \\ \dfrac{11}{6} \\ \dfrac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Решение матричного уравнения

Шаг 5. Выполним проверку, перемножив матрицу ***A*** на матрицу ***X***, должны получить матрицу ***B***.

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{13}{6} - 2 \cdot \frac{11}{6} + 1 \cdot \frac{7}{6} \\ -2 \cdot \frac{13}{6} + 1 \cdot \frac{11}{6} + 3 \cdot \frac{7}{6} \\ 2 \cdot \frac{13}{6} + 0 \cdot \frac{11}{6} - 2 \cdot \frac{7}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Матричные уравнения

Пусть даны 3 матрицы: ***A***, ***B*** – известные, ***X*** – неизвестная. Необходимо найти матрицу ***X***.

Рассмотрим 2-ой вариант матричного уравнения.

$$X \cdot A = B$$

$$X \cdot A^{-1} \cdot A = B \cdot A^{-1}$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

Решение матричного уравнения

Пусть даны матрицы ***A*** и ***B*** 3-го порядка.

Для нахождения матрицы ***X*** необходимо матрицу ***B*** **справа** умножить на матрицу A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot A = B \to X = B \cdot A^{-1}$$

Решение матричного уравнения

<u>Шаг 1</u>. Найдем обратную матрицу, воспользуемся результатом, полученным в предыдущем примере (см. Обратная матрица).

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \overset{\cup}{A}^{T} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение матричного уравнения

Шаг 2. Для нахождения x_{11} перемножим 1-ую строку матрицы B на 1-ый столбец обратной матрицы; для нахождения x_{12} перемножим 1-ую строку матрицы B на 2-ой столбец обратной матрицы; для нахождения x_{13} перемножим 1-ую строку матрицы B на 3-ий столбец обратной матрицы;

$$x_{11} = -\frac{1}{12} \cdot (1 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2)) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$x_{12} = -\frac{1}{12} (1 \cdot (-4) + 1 \cdot (-8) + 2 \cdot (-4)) = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$x_{13} = -\frac{1}{12} (1 \cdot (-7) + 1 \cdot (-11) + 2 \cdot (-1)) = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

Решение матричного уравнения

Шаг 3. Для нахождения x_{21} перемножим 2-ую строку матрицы B на 1-ый столбец обратной матрицы; для нахождения x_{22} перемножим 2-ую строку матрицы B на 2-ой столбец обратной матрицы; для нахождения x_{23} перемножим 2-ую строку матрицы B на 3-ий столбец обратной матрицы;

$$x_{21} = -\frac{1}{12}\cdot(1\cdot(-2)+3\cdot 2+1\cdot(-2)) = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

$$x_{22} = -\frac{1}{12}(1\cdot(-4)+3\cdot(-8)+1\cdot(-4)) = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

$$x_{23} = -\frac{1}{12}(1\cdot(-7)+3\cdot(-11)+1\cdot(-1)) = \frac{41}{12}$$

Решение матричного уравнения

Шаг 4. Для нахождения x_{31} перемножим 3-ую строку матрицы ***B*** на 1-ый столбец обратной матрицы; для нахождения x_{32} перемножим 3-ую строку матрицы ***B*** на 2-ой столбец обратной матрицы; для нахождения x_{33} перемножим 3-ую строку матрицы ***B*** на 3-ий столбец обратной матрицы;

$$x_{31} = -\frac{1}{12}\cdot(2\cdot(-2)+1\cdot 2+3\cdot(-2)) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$x_{32} = -\frac{1}{12}(2\cdot(-4)+1\cdot(-8)+3\cdot(-4)) = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

$$x_{33} = -\frac{1}{12}(2\cdot(-7)+1\cdot(-11)+3\cdot(-1)) = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

Решение матричного уравнения

Запишем полученную матрицу ***X*** размерности 3x3

$$X = \begin{pmatrix} {}^{1}\!/_{3} & {}^{5}\!/_{3} & {}^{5}\!/_{3} \\ -{}^{1}\!/_{6} & {}^{8}\!/_{3} & {}^{41}\!/_{12} \\ {}^{2}\!/_{3} & {}^{7}\!/_{3} & {}^{7}\!/_{3} \end{pmatrix}$$

Решение матричного уравнения

Шаг 5. Для проверки правильности результата необходимо перемножить матрицу ***X*** на матрицу ***A*** по правилу «строка на столбец». В результате должны получить матрицу ***B***.

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 5/3 & 5/3 \\ -1/6 & 8/3 & 41/12 \\ 2/3 & 7/3 & 7/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$