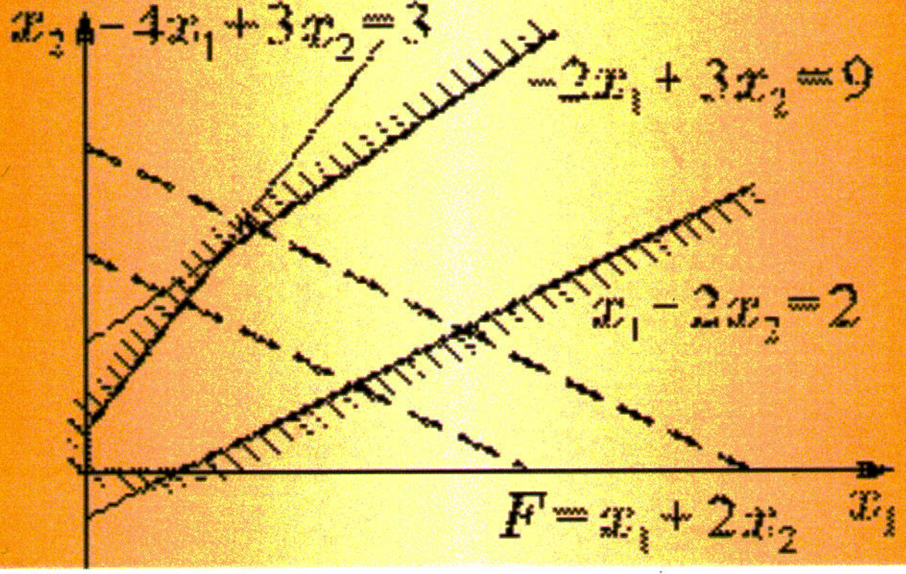
Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Физико-технический институт



В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

часть I

Линейная алгебра

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ

Министерство образования и науки
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж,
А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов**

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
для технических университетов

Часть I. Линейная алгебра

3-е издание, исправленное

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73
В937

Задорожный В.Н.

В937 Высшая математика для технических университетов. Часть I. Линейная алгебра: учебное пособие / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов; Томский политехнический университет. – 3-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 310 с.

Настоящее пособие представляет собой изложение первой части курса «Высшая математика» и содержит материал по разделу этого курса: «Линейная алгебра». Оно содержит теоретический материал в объёме, предусмотренном ныне действующей программой курса высшей математики для инженерно-физических и физических специальностей университетов. Теоретический курс дополнен индивидуальными заданиями для самостоятельного решения по каждому разделу.

Предлагаемое пособие может быть полезно студентам старших курсов, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области теоретической и математической физики.

Пособие предназначено для студентов физических, инженерно-физических специальностей и студентов, обучающихся в системе элитного технического образования.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73

Работа частично поддержана Государственным заданием ВУЗам «Наука», регистрационный номер 1.676.2014/К.

Рецензенты
Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ
Осетрин К.Е.
Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ
Багров В.Г.

Содержание

Введение

Фундамент математического образования в высшей школе составляют три основных раздела математики: линейная алгебра, аналитическая геометрия и математический анализ.

Первый раздел является одним из старейших разделов математики. Его первоначальной задачей считается задача о решении линейного алгебраического уравнения $ax + b = 0$, которое дало название всему разделу. В дальнейшем обобщение этой задачи проводилось по двум основным направлениям. С одной стороны, рассматривались системы линейных уравнений с двумя, тремя и более неизвестными, а с другой — линейные формы заменялись квадратичными, кубическими и другими алгебраическими формами.

Для решения систем линейных уравнений, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, оказалось удобным использовать понятие определителя. В тех случаях, когда число уравнений и число неизвестных не совпадают, оказалось удобным использовать теорию матриц. Эта теория позднее нашла приложение далеко за пределами задачи о решении линейных уравнений.

Теория систем линейных уравнений легла в основу такой математической дисциплины, как аналитическая геометрия, которая позволила свести основные вопросы исследования прямых и плоскостей в пространстве к исследованию систем линейных уравнений. Дальнейшее изучение систем линейных уравнений привело к созданию теории многомерных векторных или линейных пространств.

В аналитической геометрии и теории чисел большое значение стала приобретать задача о преобразовании квадратичных и других алгебраических форм, которая привела к теории многомерных линейных пространств. Отметим, что, в частности, на основе теории алгебраических форм в конце XX в. была доказана теорема Ферма, доказательство которой базируется на свойствах модулярных эллиптических кривых.

Возвращаясь к линейной алгебре, отметим, что большинство её задач допускает естественную формулировку в формализмах трех теорий: теории матриц, теории преобразования алгебраических форм и теории линейных пространств. Тем не менее, наиболее отчетливо внутренние связи между различными задачами линейной алгебры проявляются именно при рассмотрении линейных пространств, которые и являются основным объектом изучения линейной алгебры.

Забегая вперед, отметим, что объединение теории преобразования алгебраических форм и дифференциальной геометрии привело к созданию такой математической дисциплины, как тензорный анализ.

ГЛАВА 1

Матрицы и определители

1. Числовые поля

Понятие числа является первичным математическим понятием и возникло в глубокой древности для решения практических задач, возникавших перед людьми.

Для чисел, изучаемых в школьном курсе математики, определены правила работы с ними: известно, что означает сумма двух чисел, что означает их произведение. При этом выполняются законы арифметики.

Натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ появились в результате счета и измерения длины, площади, объема, времени, скорости, температуры и т.п. Будем обозначать множество всех натуральных чисел символом $\mathbb{N}$.

Число нуль и отрицательные числа появились в результате потребностей алгебры. Например, без этих чисел невозможно решить уравнения

$$x + 13 = 13, \qquad x + 13 = 10.$$

♦ Числа целые и дробные, как положительные, так и отрицательные, вместе с числом 0 составляют класс *рациональных чисел* $\mathbb{Q}$. Рациональным числом называется частное от деления двух целых чисел p/q, если $q \neq 0$.

Каждое рациональное число можно записать в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, например $1/3 = 0{,}3333\cdots = 0{,}(3)$ (ноль целых три в периоде).

Однако одних рациональных чисел недостаточно, чтобы обслужить потребности науки и техники. Так, в математике, имея дело только с рациональными числами, мы не можем решить такое уравнение, как $x^2 - 13 = 0$. Этому уравнению должно удовлетворять такое число, квадрат которого равен 13. Можно показать, что среди рациональных чисел $\mathbb{Q}$ нет такого числа, квадрат которого равен 13. Поэтому в математике рассматривают так называемые иррациональные числа $\mathbb{J}$, такие как $\sqrt{13}$, $\sqrt[3]{4}$, $1+2\sqrt{5}$ и т.п. Иррациональные числа $\mathbb{J}$ записываются бесконечными десятичными непериодическими дробями ($\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$, $\pi = 3{,}14159\ldots$).

♦ Совокупность всех рациональных $\mathbb{Q}$ и иррациональных $\mathbb{J}$ чисел называется *множеством действительных или вещественных чисел* $\mathbb{R}$, или *классом действительных чисел* $\mathbb{R}$. Итак, множество $\mathbb{R}$ действительных чисел состоит из двух частей (подмножеств): множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и множества $\mathbb{J}$ иррациональных чисел.

Действительные числа $\mathbb{R}$ изображаются точками числовой оси. Числовой осью называют прямую Ox, на которой выбраны: 1) начало отсчета 0; 2) положительное направление (указывается стрелкой) и 3) масштаб для измерения длин H (рис. 1). Каждому числу соответствует точка на числовой оси и наоборот. Между точками числовой оси и действительными числами $\mathbb{R}$ устанавливается взаимно однозначное соответствие: действительному числу a соответствует точка M_1 с координатой $x = a$, причем точка M_1 будет находиться справа от начала координат, если $x > 0$, и слева от него, если $x < 0$. Наоборот, каждой точке N соответствует действительное число $x_2 = b$ – координата этой точки. Поэтому вместо слова «число» говорят «точка» и наоборот.

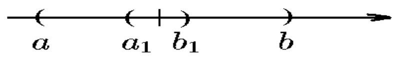


Рис. 1.

Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел обладает следующими свойствами: 1) оно упорядочено. Это означает, что между любыми двумя числами a и b имеет место одно и только одно из трёх соотношений

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b.$$

2) Это множество $\mathbb{R}$ — плотное, т.е. как бы ни была мала разность между любыми двумя действительными числами a и b, между ними содержится бесконечное множество промежуточных действительных чисел x (как $\mathbb{Q}$ рациональных, так и $\mathbb{J}$ иррациональных), т.е. чисел, удовлетворяющих неравенству

$$a < x < b.$$

Это множество $\mathbb{R}$ – непрерывное. Для объяснения этого понятия поступают так: сечением множества $\mathbb{R}$ называют разбиение всех действительных чисел на два класса: нижний класс A и верхний класс B, такое, что каждое действительное число содержится только в одном классе и любое число нижнего класса A меньше любого числа верхнего класса.

Тогда (в этом заключается свойство непрерывности) всякое сечение определяет единственное действительное число a, являющееся пограничным числом, отделяющим числа класса A от чисел класса B. Само число a является либо наибольшим числом в классе A (и тогда в классе B нет наименьшего числа), либо наименьшим числом в классе B (и тогда в классе A нет наибольшего числа). Это утверждение составляет содержание теоремы Дедекинда.

Понятие числового поля обобщает понятие совокупности чисел. Обобщение происходит путем отвлечения от конкретной природы объектов и правил операций над ними.

♦ *Числовым полем* $\mathcal{K}$ называют всякую совокупность объектов, называемых числами, в которой можно производить с этими объектами четыре арифметических действия. Любой паре чисел a и b из $\mathcal{K}$ отвечают число $c = a+b$, называемое суммой чисел a и b, и число $d = a\cdot b$ (или $d = ab$), называемое произведением чисел a и b, причем все $a, b, c, d \in \mathcal{K}$. Операции сложения и умножения подчинены следующим аксиомам.

I. Операция сложения чисел коммутативна, т.е. для всех $a, b \in \mathcal{K}$ справедливо $a + b = b + a$.

II. Операция сложения чисел ассоциативна: для всех $a, b, c \in \mathcal{K}$ справедливо $(a + b) + c = a + (b + c)$.

III. Для всех $a \in \mathcal{K}$ существует нулевой элемент $0 \in \mathcal{K}$, такой что $a + 0 = a$.

IV. Для всех $a \in \mathcal{K}$ существует такой противоположный элемент $b \in \mathcal{K}$, что $a + b = 0$.

V. Операция умножения чисел коммутативна: для любых $a, b \in \mathcal{K}$ справедливо $ab = ba$.

VI. Для всех $a \in \mathcal{K}$ существует единичный элемент $1 \in \mathcal{K}$, такой, что $1\cdot a = a$.

VII. Операция умножения чисел ассоциативна: для любых $a, b, c \in \mathcal{K}$ справедливо $a(bc) = (ab)c$.

VIII. Для любого $a \in \mathcal{K}$ существует обратный элемент $b \in \mathcal{K}$, такой что $ab = 1$ (обратный элемент $b = 1/a = a^{-1}$).

Операции сложения и умножения связаны. Операция умножения дистрибутивна по отношению к сложению: для любых $a, b, c \in \mathcal{K}$ справедливо $(a + b)c = ac + bc$.

◊ Разрешимость уравнения $a + b = 0$ для всех $a \in \mathcal{K}$ позволяет ввести операцию вычитания. Разность $a-b$, по определению, есть $a+c$, где c — решение уравнения $b + c = 0$.

◊ Разрешимость уравнения $ab = 1$ для всех не равных нулю $a \in \mathcal{K}$ позволяет ввести операцию деления на $a \neq 0$. Частное b/a есть произведение bc, где c – решение уравнения $ac = 1$.

◊ Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ не является полем, поскольку не выполняется аксиома 4. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ не является полем, так как нарушается аксиома 8 (так, $1/2 \notin \mathbb{Z}$).

◊ Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ и множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ являются полями относительно операций сложения и умножения.

Множество комплексных чисел $z = a + ib$, где a и b — вещественные числа с правилами действий

$$\begin{gathered} z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2); \\ z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{gathered} \tag{1.1}$$

также является полем. Для чисел $z = a+i0$ операции (1.1) приводят к действиям над вещественными числами a, и мы получим $z = a+i0 = a$. Комплексные числа $z = 0 + ib$ называются чисто мнимыми и обозначаются ib.

Из правила умножения следует, что

$$i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = -1.$$

Число i называют *мнимой единицей.*

◊ Поле комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$.

2. Матрицы и действия над матрицами

2.1. Матрицы

♦ Произвольная совокупность чисел a_k^j из поля $\mathcal{K}$, расположенная в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов, называется $m \times n$-*матрицей* и обозначается одним из следующих символов:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} = \|a_k^j\|_n^m = \|a_k^j\|. \tag{2.1}$$

♦ Две матрицы $A = \|a_k^j\|$ и $B = \|b_k^j\|$ называются равными, если

$$a_k^j = b_k^j, \qquad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{2.2}$$

◊ Иногда удобнее вместо верхнего и нижнего индексов использовать только нижние. Условимся о правиле соответствия двух записей:

Первая запись		Вторая запись
верхний индекс	⇔	первый индекс
нижний индекс	⇔	второй индекс.

♦ Если число столбцов матрицы A равно 1, то такой матрице индексы нужны только для нумерации строк. Такую матрицу называют *матрицей-столбцом* (или *вектор-столбцом*) и обозначают

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \dots \\ a^m \end{pmatrix} = \|a^j\|.$$

Число n, равное числу элементов в матрице-столбце, называют его *высотой.*

♦ Аналогично матрицу с размерами $1 \times n$ называют *матрицей-строкой* (или *вектор-строкой*) и обозначают

$$A = (a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n) = \|a_k\|.$$

Число элементов в матрице-строке называют ее *длиной.*

Зачастую нам придется рассматривать сумму большого числа слагаемых, имеющих один и тот же вид и различающихся только индексами, или их произведение. Символ $\sum\limits_{k=l}^{n}$, вслед за которым записано некое выражение, содержащее индекс k, обозначает сумму таких выражений для всех значений индекса от l до n:

$$\sum_{k=l}^{n} a_k b^k = a_l b^l + a_{l+1} b^{l+1} + \ldots + a_n b^n.$$

Аналогично произведение записывается следующим образом:

$$\prod_{k=l}^{n} a_k = a_l \cdot a_{l+1} \cdot a_{l+2} \cdots a_n.$$

Индекс n называется индексом суммирования или произведения.

Сформулируем правила обращения со знаком суммы.

1. Индекс суммирования может быть изменен, т.е.

$$\sum_{j=l}^{n} x^j = \sum_{k=l}^{n} x^k.$$

Поэтому говорят, что индекс суммирования является немым.

2. Множитель, не зависящий от индекса суммирования, можно вынести за знак суммы:

$$\sum_{j=l}^{n} a x^j = a \sum_{j=l}^{n} x^j.$$

3. Два знака суммы с независимыми пределами можно переставить, т.е.

$$\sum_{k=l}^{n} \sum_{j=p}^{m} a_k^j = \sum_{j=p}^{m} \sum_{k=l}^{n} a_k^j.$$

♢ Наряду с только что введенным знаком суммы будем пользоваться правилом сокращенного суммирования Эйнштейна: если в каком-либо выражении встречаются два одинаковых индекса, верхний и нижний ($a^k x_k$, $k = \overline{l, n}$), то предполагается суммирование по этому индексу, т.е.

$$a^k x_k = \sum_{k=l}^{n} a^k x_k.$$

Тогда из свойства 1 следует

$$a_j^i b_n^j = a_k^i b_n^k.$$

2.2. Простейшие операции над матрицами

Рассмотрим две матрицы $A = \|a_k^j\|$ и $B = \|b_k^j\|$ размера $m \times n$, элементы которых принадлежат числовому полю $\mathcal{K}$. Тогда

♦ *Суммой* двух $m\times n$-матриц $A = \|a_k^j\|$ и $B = \|b_k^j\|$ называется $m\times n$-матрица $C = \|c_k^j\|$, элементы которой равны

$$c_k^j = a_k^j + b_k^j, \qquad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.3}$$

Для обозначения суммы двух матриц используется запись $C = A + B$.

♦ *Произведением* $m \times n$-матрицы A на число $x \in \mathcal{K}$ называется матрица $C = \|c_k^j\|$, элементы c_k^j которой равны

$$c_k^j = xa_k^j, \qquad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.4}$$

Для обозначения произведения матрицы на число используется запись $C = xA$.

Из соотношений (2.3) и (2.4) непосредственно следует, что для любых $m\times n$-матриц A, B, C, элементы которых принадлежат полю $\mathcal{K}$, и любых чисел $x, y \in \mathcal{K}$ справедливы следующие правила:

1) сложение матриц коммутативно: $A + B = B + A$;

2) сложение матриц ассоциативно: $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) умножение матриц на число ассоциативно: $x(yA) = (xy)A$;

4) умножение матриц на число дистрибутивно относительно сложения матриц: $x(A + B) = xA + xB$;

5) умножение матриц на число дистрибутивно относительно сложения чисел: $(x + y)A = xA + yA$.

♦ Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается через 0.

♦ Матрицу $(-1)A$ будем называть *противоположной* матрице A. Они обладают тем свойством, что

$$A + (-1)A = 0.$$

Противоположную матрицу будем обозначать $-A$.

♦ Сумму матриц A и $(-1)B$ будем называть *разностью матриц* и обозначать $A - B$.

◊ Для квадратной $n \times n$-матрицы A вводится понятие главной и побочной диагоналей. *Главной диагональю* матрицы A называют диагональ $a_1^1, a_2^2, \ldots, a_n^n$, идущую из верхнего левого угла матрицы в правый нижний. *Побочной диагональю* той же матрицы называется диагональ $a_n^1, a_{n-1}^2, \ldots, a_1^n$, идущая из левого нижнего угла в правый верхний.

♦ Матрица $B = \|b_k^j\|$ размера $m \times n$ называется *транспонированной* по отношению к $n \times m$-матрице $A = \|a_j^k\|$, если $a_j^k = b_k^j$, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,n}$. Для обозначения транспонированной матрицы используются символы $A^{\intercal}$, A^t.

Пример 2.1. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

найти 1) $D = A + 2B - 3C$, 2) $F = 2(A + B) + C/2$.

Решение. Все матрицы имеют размер 2×4, и, следовательно, указанные операции определены. Согласно определениям (2.3) и (2.4), имеем

$$D = A + 2B - 3C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -6 & -12 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0+2-6 & 1+2-6 & 2+0-12 & 0+2+0 \\ 1+2+0 & 2+4-6 & 1+2+0 & 1+4-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -10 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$F = 2(A+B) + \frac{C}{2} = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.2. Найти матрицу, транспонированную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению

$$A^{\intercal} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.3. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

вычислить $A+B$ и $A+B^{\intercal}$ при условии, что указанные выражения определены.

Решение. Так как матрица A имеет размер 2×3, а матрица B размер 3×2, сумма $A+B$ не существует. Транспонированная матрица имеет вид

$$B^{\intercal} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и ее размерность 2×3 совпадает с размерностью матрицы A. Следовательно, сумма $A+B^{\intercal}$ существует и равна

$$A+B^{\intercal} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

◊ Правило суммирования матриц иногда ошибочно пытаются перенести на операцию умножения матриц, рассматривая ее как произведение соответствующих элементов матриц-сомножителей. На самом деле произведение матриц подчиняется более сложному правилу.

♦ Произведением матрицы $A = \|a_l^j\|$ размерности $m\times p$ на матрицу $B = \|b_k^j\|$ размерности $p\times n$ называется матрица $C = \|c_k^j\|$ размерности $m\times n$, элементы которой определяются формулой

$$c_k^j = a_l^j b_k^l = \sum_{l=1}^{p} a_l^j b_k^l, \qquad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.5}$$

Для произведения матрицы A на матрицу B используется обозначение $C = AB$.

◊ Из сформулированного определения следует, что матрицу A можно умножить не на всякую матрицу B. Необходимо, чтобы число столбцов матрицы A было равно числу строк матрицы B:

$$C = AB = \text{j-ая строка из m}\ \underbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}_{p\ \text{столбцов}} \begin{array}{c} \text{k-ый столбец} \\ \text{из n} \\ \left.\begin{pmatrix} \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \\ \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \\ \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \\ \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \\ \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \end{pmatrix}\right\} p\ \text{строк.} \end{array}$$

В результате саму матрицу C можно схематически изобразить следующим образом:

$$C = AB = \text{j-ая строка из m}\ \begin{array}{c} \text{k-ый} \\ \text{столбец} \\ \left.\underbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \displaystyle\sum_{l=1}^{p} a_l^j b_k^l & \dots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}_{n\ \text{столбцов}}\right\} m\ \text{строк.} \end{array}$$

Отсюда наглядно устанавливается размерность $m \times n$ матрицы C, т.е. число ее строк совпадает с числом строк первого сомножителя A, а число столбцов – с числом столбцов второго сомножителя B.

Пример 2.4. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения AB и BA, $AB^{\intercal}$ и $A^{\intercal}B$ при условии, что эти операции определены.

Решение. По определению,

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 1 - 3\cdot 3 & 1\cdot 2 + 0\cdot 0 - 3\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 3\cdot 1 - 2\cdot 3 & 2\cdot 2 + 3\cdot 0 - 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1+4 & 0+6 & -3-4 \\ 1+0 & 0+0 & -3+0 \\ 3+2 & 0+3 & -9-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -7 \\ 1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & -11 \end{pmatrix}.$$

Прежде чем перейти ко второй паре произведений, отметим, что размерность матрицы AB равна 2×2, а размерность матрицы BA – 3×3, т.е. размерности матриц не совпадают.

Для вычисления произведения $AB^\intercal$ выпишем матрицы A и $B^\intercal$ в явном виде (см. пример 2.3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. размерность этих матриц одинакова и равна 2×3. Отсюда следует, что произведение вида $AB^\intercal$ не существует, так как число столбцов матрицы A (первый сомножитель), равное 3, не совпадает с числом строк матрицы B (второй сомножитель), равным 2.

Теперь выпишем матрицы $A^\intercal$ и B:

$$A^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что произведение $A^\intercal B$ также не существует, поскольку число столбцов матрицы $A^\intercal$ равно 2, а число строк матрицы B равно 3, т.е. число столбцов не равно числу строк.

$\lozenge$ Из примера видно, что произведение матриц не всегда определено, но даже в тех случаях, когда оно существует, вопрос о перестановочном свойстве произведения двух матриц (т.е. $AB = BA$) имеет смысл ставить лишь для квадратных матриц одинаковой размерности. Элементарные примеры показывают, что даже в этом случае произведение матриц не обладает перестановочным свойством.

$\blacklozenge$ Матрицы A и B называются *коммутирующими*, если для них выполняется перестановочное соотношение $AB = BA$.

Пример 2.5. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти AB и BA.

Решение. По определению,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

следовательно, $AB \neq BA$.

Пример 2.6. Пусть $A = \|a^j\|$, $B = \|b_k\|$, $j, k = \overline{1, n}$; A — матрица-столбец, B — матрица-строка. Найти произведения AB и BA.

Решение. По определению, $AB = \|a^j b_k\|$ — $n \times n$-матрица:

$$AB = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} (b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_n) = \begin{pmatrix} a^1b_1 & a^1b_2 & \ldots & a^1b_n \\ a^2b_1 & a^2b_2 & \ldots & a^2b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^nb_1 & a^nb_2 & \ldots & a^nb_n \end{pmatrix};$$

BA — число (1×1-матрица):

$$BA = (b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_n) \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \ldots \\ a^n \end{pmatrix} = b_1a^1 + b_2a^2 + \ldots + b_na^n = \sum_{j=1}^{n} b_j a^j.$$

Рассмотрим основные свойства произведения матриц. Из формулы (2.5) следует

Свойство 1. Умножение матриц ассоциативно: $A(BC) = (AB)C$.

◊ Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что рассматриваемые произведения матриц имеют смысл.

Доказательство. Из определения (2.5) следует

$$A(BC) = \left\| \sum_{l=1}^{p} a_l^j \left(\sum_{k=1}^{q} b_k^l c_i^k \right) \right\| = \left\| \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_l^j b_k^l c_i^k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{l=1}^{p} a_l^j b_k^l \right) c_i^k \right\| = (AB)C,$$

что и требовалось доказать.

Свойство 2. Умножение матриц дистрибутивно по отношению к сложению, т.е.

$$(A + B)C = AC + BC;$$
$$A(B + C) = AB + AC.$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущего свойства.

Свойство 3. Для всех $x \in \mathcal{K}$ справедливо соотношение

$$x(AB) = (xA)B = A(xB).$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущего свойства.

Свойство 4. Справедливо соотношение

$$(AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal. \tag{2.6}$$

Доказательство. Действительно, по определению

$$AB = \left\| \sum_{j=1}^{p} a_j^l b_k^j \right\|, \quad A = \|a_j^l\|, \quad B = \|b_k^j\|,$$

Обозначим

$$(AB)^\intercal = \|c_l^k\|, \quad A^\intercal = \|d_l^j\|, \quad B^\intercal = \|e_j^k\|, \tag{2.7}$$

где

$$d_l^j = a_j^l, \quad e_j^k = b_k^j.$$

Тогда

$$c_l^k = \sum_{j=1}^{p} a_j^l b_k^j.$$

Аналогично

$$B^\intercal A^\intercal = \left\| \sum_{j=1}^{p} e_j^k d_l^j \right\| = \|f_l^k\|.$$

С учетом (2.7) получим

$$f_l^k = \sum_{j=1}^{p} b_k^j a_j^l = c_l^k,$$

что и требовалось показать.

♦ Величина δ^i_j, определяемая соотношением

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

называется *символом Кронекера.*

♦ Квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, а все остальные нулю, называется *единичной матрицей* соответствующего порядка и обозначается

$$\mathbb{I} = \mathbb{I}_n = E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \|\delta^i_j\|_{n\times n}.$$

♢ Из определения символа Кронекера δ^i_j следует, что для произвольного набора чисел $b^1, \dots, b^n$ справедливо

$$\sum_{j=1}^{n} \delta^i_j b^j = \delta^i_j b^j = 0 \cdot b^1 + 0 \cdot b^2 + \dots + 0 \cdot b^{i-1} + 1 \cdot b^i + 0 \cdot b^{i+1} + \dots + 0 \cdot b^n = b^i. \quad (2.8)$$

Именно в смысле соотношения (2.8) иногда говорят, что символ Кронекера «снимает суммирование».

Свойство 5. Единичная матрица коммутирует с произвольной квадратной матрицей A того же порядка:

$$A\mathbb{I} = \mathbb{I}A.$$

Доказательство. Действительно,

$$A\mathbb{I} = \Big\| \sum_{l=1}^{n} a^j_l \delta^l_i \Big\| = \|a^j_l \delta^l_i\| = \|a^j_i\|.$$

♢ Для квадратных матриц понятие произведения обобщается на операцию возведения в целую положительную степень. Действительно,

$$AA = A^2, \quad A^2 A = A^3, \quad \dots, \quad A^{n-1}A = A^n$$

и т.д.

Пример 2.7. Вычислить A^n, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\cdot 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4\cdot 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что верно соотношение

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n\cdot 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Тогда

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2+2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, с помощью метода математической индукции мы убедились, что (2.9) справедливо.

Пример 2.8. Найти матрицу $D = ABC$, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Согласно свойству 1, матрицу D можно вычислить, используя следующий порядок сомножителей: $D = A(BC) = (AB)C$. Поскольку произведение BC представляет собой матрицу-столбец 3×1, а произведение AB — матрицу размерности 4×2, то предпочтительней воспользоваться первой формулой $D = A(BC)$. Тогда

$$BC = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

и

$$D = A(BC) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что вычисление произведения в другом порядке значительно увеличивает количество выкладок.

Пример 2.9. Найти значения полинома $f(A)$ от матрицы A, если $f(x) = 3x^2 - 4$ и

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Согласно условию задачи, полином имеет вид

$$f(A) = 3A^2 - 4\mathbb{I} = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполнив указанные действия, получим

$$f(A) = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}.$$

3. Определитель и его свойства

3.1. Перестановки и определители

♦ *Перестановкой* n чисел $1, 2, \ldots, n$ (или n любых различных между собой символов $a_1, a_2, \ldots, a_n$) называется любое расположение этих чисел (или символов) в определенном порядке.

◇ Так как данные n символов можно пронумеровать числами $1, 2, \ldots, n$, то изучение перестановок любых n символов сводится к изучению перестановок этих чисел.

◇ Число всех перестановок из n чисел равно

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

По определению, $0! = 1$.

♦ Если в некоторой перестановке $1, 2, \ldots, n$ поменять местами только два числа, то такая операция над перестановкой называется *транспозицией*.

Очевидно, что все $n!$ перестановок можно получить некоторой последовательностью транспозиций. Условимся все перестановки с $n \leqslant 9$ записывать без запятых.

Пример 3.1. Выписать все перестановки чисел $1, 2, 3$.

Решение. Все перестановки чисел $1, 2, 3$ имеют вид 123, 132, 213, 231, 312, 321. Количество таких перестановок $3! = 2 \cdot 3 = 6$.

Нетрудно заметить, что переход от перестановки 123 к 132 осуществляется транспозицией чисел 2 и 3, а от перестановки 132 — транспозицией чисел 1 и 3 переходим к перестановке 312 и т.д.

♦ Два числа в перестановке образуют *инверсию*, если большее число стоит впереди меньшего; если же меньшее стоит впереди большего, то — *порядок*. Символом $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ обозначим количество всех инверсий в перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

◇ Укажем способ подсчета количества инверсий в перестановке. Просмотрим числа перестановки в порядке их записи (слева направо), для каждого из чисел считаем, сколько чисел, меньших данного, стоит правее него, все полученные величины складываем.

Пример 3.2. В перестановке 528371964 определить количество инверсий.

Решение. В перестановке 528371964 правее числа 5 стоят 4 числа, меньших 5: это 2, 3, 1, 4. Аналогично для всех остальных чисел. В результате получим

$$P(528371964) = 4 + 1 + 5 + 1 + 3 + 2 + 1 = 17.$$

♦ Перестановка называется *четной*, если она содержит четное число инверсий, и *нечетной* в противном случае.

◇ Рассмотренная в примере 3.2 перестановка является нечетной, так как содержит 17 инверсий.

Пример 3.3. Выписать все перестановки чисел $1, 2$ и чисел $1, 2, 3$, определив число четных и нечетных перестановок.

Решение. В первом случае число перестановок равно 2!: перестановки 12 и 21 различаются одной транспозицией чисел 1 и 2. Для определения четности (нечетности) каждой из них найдем для них число инверсий: $P(12) = 0$, $P(21) = 1$. Таким образом, перестановка 12 является четной, а 21 — нечетной. Отсюда следуют два важных вывода:

1) одна транспозиция меняет четность перестановки;

2) количество четных перестановок из двух чисел равно количеству нечетных перестановок и равно $2!/2 = 1$.

Для проверки этих выводов рассмотрим перестановку 123. Все возможные перестановки для этого случая выписаны в примере 3.1. Определим количество инверсий для каждой из них:

$$\begin{gathered} P(123) = 0, \quad P(132) = 1, \quad P(213) = 1, \\ P(231) = 2, \quad P(312) = 2, \quad P(321) = 3. \end{gathered}$$

Как и в предыдущем случае, количество четных перестановок равно количеству нечетных и равно $3!/2 = 6/2 = 3$. Кроме этого, заметим, что перестановка 123 — четная, а перестановка 132, получаемая из нее транспозицией чисел 2 и 3, — нечетная. Далее, перестановка 312, получаемая из 132 транспозицией чисел 1 и 3, снова становится четной. Если принять во внимание, что перестановка 312 получается из 123 двойной транспозицией: сначала чисел 2 и 3, а затем чисел 1 и 3, то, как мы видели, обе перестановки 123 и 312 — четные, т.е. двойная транспозиция сохраняет четность перестановки.

Этот пример подтверждает оба вывода, сделанных выше, и мы будем пользоваться ими для любых перестановок.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_1^n & a_2^4 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

♦ Число, полученное из элементов матрицы A по формуле

$$\det A = |A| = |a_k^j| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} =$$
$$= \sum (-1)^{P(k_1,k_2,\ldots,k_n)} a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}, \tag{3.2}$$

называется *определителем* n-го порядка, или *определителем матрицы* A при $n > 1$. Здесь первые четыре выражения — обозначения определителя; суммирование производится по всем возможным перестановкам $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

◊ Другими словами, понятие об определителе (3.2) матрицы (3.1) можно сформулировать следующим образом.

Определителем n-го порядка (3.2), соответствующим матрице (3.1), называется алгебраическая сумма $n!$ слагаемых, составленная по правилу: слагаемыми служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем слагаемое берется со знаком плюс, если его верхние индексы составляют чётную перестановку, и со знаком минус в противном случае.

Нетрудно заметить, что количество слагаемых, входящих в сумму (3.2) со знаками плюс и минус, одинаково и равно $n!/2$.

◊ Из формулы (3.2) следует, что определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = a_1^1 a_2^2 \cdots a_n^n. \tag{3.3}$$

Все остальные слагаемые определителя содержат нуль в качестве множителя и, следовательно, равны нулю.

Пример 3.4. Пользуясь определением (3.2), вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению и с учетом того, что в примере 3.3 получено $P(12) = 0$, $P(21) = 1$, для определителя второго порядка запишем

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = (-1)^{P(12)} a_1^1 a_2^2 + (-1)^{P(21)} a_1^2 a_2^1 =$$
$$= (-1)^0 a_1^1 a_2^2 + (-1)^1 a_2^1 a_1^2 = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2. \tag{3.4}$$

◊ Правило (3.4) вычисления определителей второго порядка удобно иллюстрировать следующей схемой:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}. \tag{3.5}$$

Пример 3.5. Пользуясь определением (3.2), вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению и с учетом результатов примера 3.3 для определителя третьего порядка запишем

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = (-1)^{P(123)} a_1^1 a_2^2 a_3^3 + (-1)^{P(132)} a_1^1 a_2^3 a_3^2 +$$
$$+ (-1)^{P(213)} a_1^2 a_2^1 a_3^3 + (-1)^{P(231)} a_1^2 a_2^3 a_3^1 +$$
$$+ (-1)^{P(321)} a_1^3 a_2^2 a_3^1 + (-1)^{P(312)} a_1^3 a_2^1 a_3^2 =$$
$$= a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 + a_1^3 a_2^1 a_3^2. \tag{3.6}$$

◊ Правило (3.6) вычисления определителей 3-го порядка (или определителей матрицы 3-го порядка) удобно иллюстрировать мнемонической схемой (правилом треугольников)

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \underbrace{\underset{(1\ 2\ 3)}{\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix}} + \underset{(2\ 3\ 1)}{\begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}} + \underset{(3\ 1\ 2)}{\begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix}}}_{\text{номера строк}} -$$

$$- \begin{vmatrix}\circ&\circ&\bullet\\ \circ&\bullet&\circ\\ \bullet&\circ&\circ\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\circ&\bullet&\circ\\ \bullet&\circ&\circ\\ \circ&\circ&\bullet\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\bullet&\circ&\circ\\ \circ&\circ&\bullet\\ \circ&\bullet&\circ\end{vmatrix} \tag{3.7}$$
$$\begin{pmatrix}3&2&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&1&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&3&2\end{pmatrix}$$

либо ещё одной мнемонической схемой (правилом Саррюса):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & \text{произведения со знаком } (-) & & & \\
a_1^1 & & a_2^1 & & a_3^1 & & a_1^1 & & a_2^1 \\
 & \diagdown & & \times & & \times & & \diagup & \\
a_2^1 & & a_2^2 & & a_3^2 & & a_1^2 & & a_2^2 \\
 & \diagup & & \times & & \times & & \diagdown & \\
a_3^1 & & a_2^3 & & a_3^3 & & a_1^3 & & a_2^3 \\
 & & & & & \text{произведения со знаком } (+) & & &
\end{array}.$$

Пример 3.6. Пользуясь правилом Саррюса (3.7), вычислить определитель матрицы
$$A = \begin{pmatrix}2&2&1\\1&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}.$$

Решение. Пользуясь правилом Саррюса, запишем
$$|A| = \begin{vmatrix}2&2&1\\1&2&1\\3&1&0\end{vmatrix} = 2\cdot2\cdot0 + 1\cdot1\cdot1 + 2\cdot1\cdot3 - 3\cdot2\cdot1 - 1\cdot2\cdot0 - 1\cdot1\cdot2 =$$
$$= 0 + 1 + 6 - 6 - 0 - 2 = -1.$$

3.2. Свойства определителей

Рассмотрим основные свойства определителей, которые непосредственно следуют из определения (3.2). Подчеркнем при этом, что определитель $\det A$ является одной из важнейших характеристик квадратной матрицы A.

Свойство 1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется, т.е.
$$\det A = \det A^{\intercal}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Пусть дан определитель матрицы A:
$$\det A = \det \|a^i_j\|$$
и пусть
$$A^{\intercal} = \|b^j_i\|, \qquad b^j_i = a^i_j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{3.9}$$

Рассмотрим произвольный член определителя матрицы A
$$(-1)^{P(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \cdots a^{i_n}_n.$$

В силу соотношения $a^i_j = b^j_i$ (3.9) можно записать
$$(-1)^{P(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \cdots a^{i_n}_n = (-1)^{P(i_1, i_2, \ldots, i_n)} b^1_{i_1} b^2_{i_2} \cdots b^n_{i_n}.$$

Последнее выражение является слагаемым определителя $A^{\intercal}$. Таким образом, каждому слагаемому определителя матрицы A отвечает равное по величине и знаку слагаемое определителя матрицы A^{T}. Аналогично доказывается справедливость обратного утверждения.

$\Diamond$ Свойство 1 свидетельствует о равноправии строк и столбцов определителя, т.е. любое утверждение, доказанное для столбцов, справедливо и для строк и наоборот. Поэтому в дальнейшем мы будем доказывать свойства лишь для столбцов определителя. Иногда термины «строка» и «столбец» объединяют названием «ряд».

Пример 3.7. Пользуясь определением (3.4), вычислить определители матриц

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Решение. По формуле (3.4) запишем

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Аналогично

$$|A^{\mathsf{T}}| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Как и следовало ожидать, $\det A = \det A^{\mathsf{T}}$.

Свойство 2. При перестановке двух любых столбцов матрицы ее определитель меняет знак на противоположный, а абсолютная величина определителя остается неизменной.

Доказательство. Пусть дан определитель

$$\det A = |a_k^j| = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_i^1 & \ldots & a_k^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & \ldots & a_i^2 & \ldots & a_k^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & \ldots & a_i^n & \ldots & a_k^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}. \tag{3.10}$$

Обозначим через B матрицу, полученную из матрицы A перестановкой двух столбцов с номерами i и k. Если

$$a_1^{j_1} \cdots a_i^{j_i} \cdots a_k^{j_k} \cdots a_n^{j_n} \tag{3.11}$$

есть член определителя (3.10), то очевидно, что все сомножители и в определителе матрицы B остаются в разных строках и столбцах. Таким образом, $\det A$ и $\det B$ состоят из одних и тех же членов, однако слагаемому (3.11) в определителе матрице A соответствует перестановка

$$(j_1, \ldots, j_i, \ldots, j_k, \ldots, j_n),$$

а в определителе матрицы B – перестановка

$$(j_1, \ldots, j_k, \ldots, j_i, \ldots, j_n).$$

Поскольку эти перестановки различаются одной транспозицией, то они имеют противоположную четность. Это означает, что все члены определителя матрицы A входят в определитель матрицы B с противоположными знаками, т.е.

$$\det A = -\det B.$$

Пример 3.8. Пользуясь определением (3.4), вычислить определители матриц

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix},$$

отличающихся друг от друга перестановкой столбцов.

Решение. По формуле (3.1) запишем

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Аналогично

$$|B| = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Как и следовало ожидать, $\det A = -\det B$.

Следствие 2.1. Определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю.

Доказательство. Поменяем местами одинаковые столбцы определителя. Поскольку они одинаковы, определитель не изменится. С другой стороны, согласно свойству 2, он изменит знак, т.е.

$$\det A = -\det A,$$

откуда следует, что $\det A = 0$.

Свойство 3. Общий множитель некоторого столбца определителя можно выносить за знак определителя.

Доказательство. Пусть элементы некоторого столбца в определителе $\det A$ имеют общий множитель α. Поскольку, согласно определению (3.2), в каждое слагаемое определителя входит только один элемент из указанного столбца, то все члены определителя содержат общий множитель α, который можно вынести за знак суммы в (3.2), откуда и следует справедливость свойства 3.

◊ Свойство 3 позволяет сформулировать правило умножения определителя на число α, например, в форме

$$\alpha \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \alpha a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Аналогичное правило для умножения матрицы на число имеет вид

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1^1 & \alpha a_2^1 & \dots & \alpha a_n^1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \alpha a_1^n & \alpha a_2^n & \dots & \alpha a_n^n \end{pmatrix}$$

Сравнение этих соотношений позволяет сделать вывод, что

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A, \tag{3.12}$$

где n — порядок квадратной матрицы A. Это означает, что операция вычисления определителя (det) в общем случае нелинейна. Впрочем, при $n = 1$, т.е. для произведения чисел, приходим к очевидному равенству

$$\det(\alpha A) = \alpha A.$$

Следствие 3.1. Если некоторый столбец матрицы состоит из нулей, то определитель этой матрицы равен нулю.

Доказательство непосредственно следует из свойства 3, так как нулевой столбец можно рассматривать как некоторый столбец, умноженный на нуль. Вынеся общий множитель, убеждаемся в справедливости утверждения.

Следствие 3.2. Определитель, содержащий два пропорциональных столбца, равен нулю.

Доказательство. Пусть элементы i-го столбца определителя получаются умножением соответствующих элементов k-го столбца на число α. Вынеся этот общий множитель i-го столбца за знак определителя, мы получим определитель, содержащий два одинаковых столбца. Такой определитель, согласно следствию 2.1, равен нулю.

Свойство 4. Если элементы j-го столбца матрицы A представляют собой сумму

$$a^l = \alpha b^l + \beta c^l, \quad l = \overline{1, n}, \tag{3.13}$$

то

$$\det A = \alpha \det B + \beta \det C. \tag{3.14}$$

Здесь α и β — некоторые числа, а матрицы B и C получены из матрицы A заменой столбца a^l_j столбцом из элементов b^l и c^l, соответственно.

Доказательство. Согласно определению (3.2), имеем

$$\det A = \sum (-1)^{P(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_1^{i_1} \cdots a_j^{i_j} \cdots a_n^{i_n}$$

или с учетом (3.13)

$$\begin{aligned}\det A =& \sum (-1)^{P(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_1^{i_1} \cdots (\alpha b^{i_j} + \beta c^{i_j}) \cdots a_n^{i_n} = \\ =& \alpha \sum (-1)^{P(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_1^{i_1} \cdots b^{i_j} \cdots a_n^{i_n} + \\ &+ \beta \sum (-1)^{P(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_1^{i_1} \cdots c^{i_j} \cdots a_n^{i_n} = \alpha \det B + \beta \det C,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

$\Diamond$ Формулу (3.14) иногда ошибочно используют не в предположении (3.13) для столбцов, а в предположении для матриц: $A = \alpha B + \beta C$. В этом случае

$$\det(\alpha B + \beta C) \neq \alpha \det A + \beta \det C.$$

Поскольку, во-первых, согласно (3.12), постоянный множитель нельзя выносить за знак det, а во-вторых,

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$

Пример 3.9. Показать, что для матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

выполняется равенство

$$\det(A_1 + A_2) = \det A_1 + \det A_2 + \det A_{12} + \det A_{21},$$

где

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, \qquad A_{21} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Согласно определению,

$$\det(A_1 + A_2) = \det\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда с учетом (3.13) и (3.14) найдем

$$\det(A_1 + A_2) = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} =$$
$$= \det A_1 + \det A_2 + \det A_{12} + \det A_{21},$$

что и требовалось показать.

◊ Свойство 4 распространяется на случай, когда (3.13) содержит более чем два слагаемых.

♦ Если элементы j-го столбца матрицы A можно выразить через элементы других столбцов:

$$X_j = \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} \alpha_l X_l, \qquad X_j = \|a_j^i\|_{n\times 1}, \tag{3.15}$$

то говорят, что j-ый столбец представляет собой *линейную комбинацию* столбцов с номерами l, для которых $\alpha_l \neq 0$.

◊ Если все α_l $(l \neq j)$ отличны от нуля, то j-ый столбец представляет собой линейную комбинацию остальных $(n-1)$ столбцов. Если только один из коэффициентов α_l отличен от нуля, то столбцы с номерами j и l пропорциональны. Очевидно, что нулевой j-ый столбец всегда является линейной комбинацией других при всех $\alpha_l = 0$.

Свойство 5. Если какой-либо столбец определителя есть линейная комбинация других его столбцов, то определитель равен нулю.

Доказательство. Пусть для определенности j-ый столбец определителя представляет собой линейную комбинацию других столбцов. Воспользовавшись свойством 4, исходный определитель можно представить в виде суммы определителей, имеющих одинаковые столбцы. Такие определители, согласно следствию 2.1, равны нулю. Следовательно, и исходный определитель равен нулю.

Свойство 6. Определитель не изменится, если к одному из его столбцов прибавить любую линейную комбинацию других столбцов.

Доказательство. Пусть к j-му столбцу определителя прибавляется любая линейная комбинация других его столбцов (j-ый столбец в линейной комбинации не участвует). Воспользовавшись свойством 4, такой определитель можно представить в виде суммы определителей, первый из которых будет совпадать с исходным, а остальные будут иметь одинаковые столбцы, т.е. будут равны нулю, что и требовалось доказать.

Последние два свойства для практических приложений, например для вычисления определителей, представляют наибольшую ценность. Кроме того, свойство 5 определяет самые общие требования, при которых определитель обращается в нуль.

В заключение сформулируем еще одно свойство, которое докажем несколько позже, поскольку его доказательство в рамках определения (3.2) достаточно громоздко.

Свойство 7. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей перемножаемых матриц, т.е.

$$\det AB = \det A \det B. \tag{3.16}$$

В заключение отметим, что, согласно определению, элементы матрицы принадлежат некоторому полю $\mathcal{K}$. Из формулы (3.2) следует, что и элементы определителя $\det A$ есть элементы того же поля. Это означает, что определитель $\det A$ можно рассматривать как функцию, определенную на множестве всех квадратных матриц с элементами из поля $\mathcal{K}$. Если попытаться построить функцию, которая удовлетворяла бы требованиям, вытекающим из свойств 1, 3, 4 и формулы (3.3), то окажется, что такая функция единственна и определяется соотношением (3.2). Такой подход в теории определителей называется аксиоматическим. Существует другой подход, называемый индуктивным, к рассмотрению которого мы сейчас и переходим.

3.3. Миноры и их алгебраические дополнения

Вычисление определителей по правилу (3.2) – весьма громоздкая и трудоемкая процедура (см. примеры 3.3 и 3.4). Тот факт, что для вычисления определителя 4-го порядка нужно выписать $4! = 24$ слагаемых, а для определителя 5-го порядка – уже $5! = 120$, делает эту формулу малопригодной для практических расчетов.

Существенно упростить задачу вычисления определителей позволяет так называемый индуктивный подход. Смысл этого подхода заключается в том, что в качестве определителя матрицы первого порядка выбирается её единственный элемент. Определитель матрицы 2-го порядка вычисляется, например, по известной уже формуле (3.4). Однако этой формуле теперь придается иной смысл: ее рассматривают как соотношение, устанавливающее связь между определителем 2-го порядка и определителем 1-го порядка. Далее определитель 3-го порядка вычисляется уже не по формуле (3.6), а по правилу, сформулированному для связи определителей 2-го и 1-го порядков. Затем определитель n-го порядка по индукции выражается через определители $(n-1)$-го порядка. После того как общее правило сформулировано, им можно воспользоваться для того, чтобы вычисление определителя n-го порядка свести к вычислению определителей $(n-1)$-го порядка, затем $(n-2)$-го и так далее, вплоть до определителя 1-го порядка.

Оказывается, такой подход значительно упрощает вычисление определителей, в чем можно убедиться на конкретных примерах. Для реализации этого подхода сформулируем некоторые необходимые понятия.

Пусть $\det A$ — определитель матрицы A порядка n. Выберем некоторое число k, такое, что $1 \leqslant k \leqslant n-1$, и в матрице A выделим k произвольно выбранных столбцов и строк.

♦ *Минором* M (от латинского “minor” — меньший) k-го порядка матрицы A называется определитель некоторой матрицы, составленной из элементов матрицы A, стоящих на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов с сохранением их порядка. Если номера столбцов, в которых расположен минор M, совпадают с номерами строк, то этот минор называется главным.

◊ Каждая матрица A порядка n имеет $(C_n^k)^2$ миноров k-го порядка. Минорами 1-го порядка являются сами элементы матрицы A.

♦ *Дополнительным минором* $\overline{M}$ к минору M квадратной матрицы A называется определитель такой матрицы порядка $(n-k)$, которая получена из матрицы A вычеркиванием тех k строк и k столбцов, в которых расположен минор M.

◊ Дополнительный минор $\overline{M}$ к минору 1-го порядка, которым является некоторый элемент квадратной матрицы A, есть определитель матрицы, полученной из этой матрицы вычеркиванием одной строки и одного столбца, на пересечении которых стоит выделенный элемент, т.е. минор 1-го порядка. Его еще называют минором элемента a^i_j.

Пусть M — минор матрицы A, а $\overline{M}$ — его дополнительный минор. Если в качестве исходного выбрать минор $\overline{M}$, то дополнительным ему будет минор M. Таким образом, миноры M и $\overline{M}$ образуют пару взаимно дополнительных миноров.

♦ *Алгебраическим дополнением* к минору M порядка k, расположенному в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$, называется число

$$A^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{j_1,j_2,\ldots,j_k} = (-1)^{S_M}\overline{M}^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{j_1,j_2,\ldots,j_k}, \tag{3.17}$$

где $\overline{M}$ — дополнительный минор минора M, а S_M — сумма номеров строк и столбцов, в которых он расположен, т.е.

$$S_M = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k. \tag{3.18}$$

Алгебраическим дополнением элемента a^i_j (минора 1-го порядка) матрицы A, согласно определению, будет число

$$A^i_j = (-1)^{i+j}\overline{M}^i_j, \tag{3.19}$$

где i, j – номера строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a^i_j и которые следует вычеркнуть из матрицы A для получения дополнительного минора $\overline{M}^i_j$.

◊ Часто в качестве определения алгебраического дополнения A^i_j выбирают коэффициент при элементе a^i_j в сумме (3.2). Ниже мы покажем, что эти определения эквивалентны.

◊ Согласно определению (3.17), алгебраическое дополнение и дополнительный минор к некоторому минору различаются только знаком.

Пример 3.10. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

выписать несколько миноров различных порядков и вычислить их алгебраические дополнения.

Решение. Начнем с миноров 1-го порядка.

1. Выделим в матрице A, например, 2-ю строку и 3-й столбец. На их пересечении стоит элемент $a^2_3 = 2$, тогда минор 1-го порядка M^2_3 совпадает с элементом a^2_3 и равен 2, т.е.

$$M^2_3 = a^2_3 = 2.$$

Если выбранные строку и столбец вычеркнуть из матрицы A, то получится матрица порядка 3, определитель которой $\overline{M}^2_3$ и будет дополнительным минором к минору M^2_3, т.е.

$$\overline{M}^2_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

Вычислив этот определитель по формуле (3.4) и воспользовавшись определением (3.19), найдем алгебраическое дополнение к минору $M_3^2 = a_3^2 = 2$:

$$A_3^2 = (-1)^{2+3}\overline{M}_3^2 = -\overline{M}_3^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.$$

Выделим теперь в матрице A 2-ю строку и 2-й столбец. На их пересечении стоит элемент $a_2^2 = 1$, тогда минор 1-го порядка M_2^2 совпадает с элементом a_2^2 и равен 1, т.е.

$$M_2^2 = a_2^2 = 1.$$

Так как миноры с одинаковыми номерами строк и столбцов называются главными, то матрица A имеет 4 главных минора 1-го порядка, которые стоят по диагонали матрицы A, называемой по этой причине *главной диагональю*. Минор $M_2^2 = 1$ — один из главных миноров матрицы A. Его дополнительный минор, получаемый вычеркиванием в матрице A 2-ой строки и 2-го столбца, имеет вид

$$\overline{M}_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

и соответственно алгебраическое дополнение

$$A_2^2 = (-1)^{2+2}\overline{M}_2^2 = \overline{M}_2^2 = 3.$$

Перейдем к минорам 2-го порядка.

2. Выделим в матрице A, например, 1-ю и 2-ю строки и 3-й и 4-й столбцы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Элементы, стоящие на их пересечениях, образуют квадратную матрицу 2-го порядка, определитель которой представляет собой минор 2-го порядка:

$$M_{3,4}^{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2.$$

Если выбранные строки и столбцы вычеркнуть из матрицы A, то получится матрица 2-го порядка, определитель которой $\overline{M}_{3,4}^{1,2}$ и будет дополнительным минором к исходному:

$$\overline{M}_{3,4}^{1,2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Алгебраическое дополнение минора $M_{3,4}^{1,2}$ найдется, согласно определению, по формуле (3.17):

$$A_{3,4}^{1,2} = (-1)^{1+2+3+4}\overline{M}_{3,4}^{1,2} = \overline{M}_{3,4}^{1,2} = -1.$$

Как уже отмечалось, минор $M_{3,4}^{1,2}$ и его дополнительный минор $\overline{M}_{3,4}^{1,2}$ образуют пару взаимно дополняющих миноров.

Действительно, если в матрице A выделить 3-ю и 4-ю строки и 1-й и 2-й столбцы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

то элементы, стоящие на их пересечениях, образуют минор

$$M^{3,4}_{1,2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -1.$$

Его дополнительный минор $\overline{M}^{3,4}_{1,2}$ есть

$$\overline{M}^{3,4}_{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2,$$

а алгебраическое дополнение равно

$$A^{3,4}_{1,2} = (-1)^{3+4+1+2}\overline{M}^{3,4}_{1,2} = \overline{M}^{3,4}_{1,2} = 2.$$

Простое сопоставление показывает, что

$$M^{1,2}_{3,4} = \overline{M}^{3,4}_{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2,$$
$$M^{3,4}_{1,2} = \overline{M}^{1,2}_{3,4} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

что представляется естественным в силу взаимной дополнительности пары миноров $M^{1,2}_{3,4}$ и $\overline{M}^{1,2}_{3,4} = M^{3,4}_{1,2}$.

Теперь найдем произведения этой пары миноров на их алгебраические дополнения:

$$M^{1,2}_{3,4}A^{1,2}_{3,4} = M^{1,2}_{3,4}(-1)^{1+2+3+4}\overline{M}^{1,2}_{3,4} = (-1)^{10}M^{1,2}_{3,4}\overline{M}^{1,2}_{3,4} = -2,$$
$$M^{3,4}_{1,2}A^{3,4}_{1,2} = M^{3,4}_{1,2}(-1)^{3+4+1+2}\overline{M}^{3,4}_{1,2} = (-1)^{10}M^{3,4}_{1,2}\overline{M}^{3,4}_{1,2} = -2.$$

Из полученного равенства вытекает весьма важное утверждение.

◊ Если M и $\overline{M}$ — два взаимно дополнительных минора, то их произведения на свои алгебраические дополнения равны.

И, наконец, рассмотрим миноры 3-го порядка.

3. В матрице A выделим, например, 1-ю, 3-ю, 4-ю строки и 1-й, 2-й и 4-й столбцы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Элементы, стоящие на их пересечениях, образуют квадратную матрицу 3-го порядка, определитель которой представляет собой минор 3-го порядка:

$$M^{1,3,4}_{1,2,4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

Если выбранные строки и столбцы вычеркнуть из матрицы A, то получится матрица 1-го порядка, определитель которой $\overline{M}^{1,3,4}_{1,2,4}$ и будет дополнительным минором к минору $M^{1,3,4}_{1,2,4}$. В данном случае дополнительным минором будет будет просто элемент a^2_3, т.е.

$$\overline{M}^{1,3,4}_{1,2,4} = a^2_3 = 2.$$

Тогда алгебраическое дополнение $A^{1,3,4}_{1,2,4}$ минора $M^{1,3,4}_{1,2,4}$, согласно определению (3.17), найдется как

$$A^{1,3,4}_{1,2,4} = (-1)^{1+3+4+1+2+4}\overline{M}^{1,3,4}_{1,2,4} = (-1)^{15}a^2_3 = -2.$$

Нетрудно заметить, что в данном случае пару взаимно дополняющих миноров будут составлять миноры $M^{1,3,4}_{1,2,4}$ и $\overline{M}^{1,3,4}_{1,2,4} = a^2_3$. Найдем их произведения на свои алгебраические дополнения:

$$M^{1,3,4}_{1,2,4}A^{1,3,4}_{1,2,4} = M^{1,3,4}_{1,2,4}(-1)^{1+3+4+1+2+4}\overline{M}^{1,3,4}_{1,2,4} = (-1)^{15}M^{1,3,4}_{1,2,4}a^2_3 = (-1)^{15}2 = 2,$$
$$a^2_3A^2_3 = a^2_3(-1)^{2+3}\overline{M}^2_3 = (-1)^5M^{1,3,4}_{1,2,4}a^2_3 = (-1)^5 2 = 2.$$

Полученное равенство произведений находится в соответствии с тем, что произведение взаимно дополнительных миноров на свои алгебраические дополнения равны. Этим свойством мы будем пользоваться в дальнейшем для вычисления определителей, доказав его в общем виде.

Пример 3.11. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix}$$

1) выписать все возможные миноры и вычислить их алгебраические дополнения;
2) записать значение $\det A$ через эти миноры и их алгебраические дополнения.

Решение. Для матрицы 2-го порядка существуют лишь четыре минора 1-го порядка, совпадающие с самими элементами матрицы, т.е.

$$M^1_1 = a^1_1, \quad M^1_2 = a^1_2, \quad M^2_1 = a^2_1, \quad M^2_2 = a^2_2.$$

Их дополнительные миноры имеют вид

$$\overline{M}^1_1 = a^2_2, \quad \overline{M}^1_2 = a^2_1, \quad \overline{M}^2_1 = a^1_2, \quad \overline{M}^2_2 = a^1_1$$

и соответственно алгебраические дополнения

$$A^1_1 = (-1)^{1+1}\overline{M}^1_1 = a^2_2, \quad A^1_2 = (-1)^{1+2}\overline{M}^1_2 = -a^2_1,$$
$$A^2_1 = (-1)^{2+1}\overline{M}^2_1 = -a^2_2, \quad A^2_2 = (-1)^{2+2}\overline{M}^2_2 = a^1_1.$$

Для решения второй части задачи воспользуемся формулой (3.2):

$$\det A = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} = a^1_1a^2_2 - a^1_2a^2_1.$$

Тогда с учетом найденных выше алгебраических дополнений определитель $\det A$ можно представить следующими четырьмя формулами:

$$\det A = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} = M^1_1A^1_1 + M^1_2A^1_2 = M^2_1A^2_1 + M^2_2A^2_2 =$$
$$= M^1_1A^1_1 + M^2_1A^2_1 = M^1_2A^1_2 + M^2_2A^2_2, \tag{3.20}$$

которые можно также записать в более наглядной форме, воспользовавшись явным видом миноров $M_j^i = a_j^i$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 = a_1^2 A_1^2 + a_2^2 A_2^2 = \\ = a_1^1 A_1^1 + a_1^2 A_1^2 = a_2^1 A_2^1 + a_2^2 A_2^2. \qquad (3.21)$$

Формулы (3.20) и (3.21) выражают основную идею индуктивного подхода к построению определителей: значение определителя $\det A$ можно получить, суммируя произведения элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, или в более общей формулировке: суммируя произведения всех миноров k-го порядка в выбранных k строках (столбцах) на их алгебраические дополнения.

Ниже нам предстоит доказать это утверждение для общего случая — для определителей любого порядка. Заметим, что при выводе формул (3.20) и (3.21) мы воспользовались формулой (3.2), вытекающей из аксиоматического определения (3.1). Однако эти формулы можно получить совершенно независимо от аксиоматического определения, воспользовавшись, например, формализованной записью решения

$$x_1 = \frac{b_1 a_2^2 - b_2 a_2^1}{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_2^1 \\ b_2 & a_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}};$$

$$x_2 = \frac{b_2 a_2^1 - b_1 a_1^2}{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2} = \frac{\begin{vmatrix} a_2^1 & b_1 \\ a_1^2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}}$$

системы двух линейных алгебраических уравнений

$$a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 = b_1, \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 = b_2.$$

Это позволяет рассматривать два подхода совершенно независимо друг от друга, с одной стороны, а с другой — подчеркнуть их эквивалентность, указав лишь внешнее различие этих формулировок.

Проиллюстрируем это утверждение на примере определителя 3-го порядка, а затем перейдем к определителям произвольного порядка.

Пример 3.12. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}$$

записать $\det A$ разложением по минорам 2-го порядка, расположенным во 2-й и 3-й строках.

Решение. Выделив в матрице A 2-ю и 3-ю строки, мы можем записать всего три минора 2-го порядка, расположенных в этих строках:

$$M_{1,2}^{2,3} = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} = a_1^2 a_2^3 - a_2^2 a_1^3,$$

$$M_{1,3}^{2,3} = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^2 a_3^3 - a_3^2 a_1^3,$$

$$M_{2,3}^{2,3} = \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_2^2 a_3^3 - a_3^2 a_2^3.$$

Их дополнительные миноры и алгебраические дополнения имеют вид

$$\begin{aligned} \overline{M}_{1,2}^{2,3} &= a_3^1, \quad A_{1,2}^{2,3} = (-1)^{2+3+1+2}\overline{M}_{1,2}^{2,3} = a_3^1; \\ \overline{M}_{1,3}^{2,3} &= a_2^1, \quad A_{1,3}^{2,3} = (-1)^{2+3+1+3}\overline{M}_{1,3}^{2,3} = -a_2^1; \\ \overline{M}_{2,3}^{2,3} &= a_1^1, \quad A_{2,3}^{2,3} = (-1)^{2+3+2+3}\overline{M}_{2,3}^{2,3} = a_1^1. \end{aligned}$$

Тогда искомое разложение запишется как

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = M_{1,2}^{2,3}A_{1,2}^{2,3} + M_{1,3}^{2,3}A_{1,3}^{2,3} + M_{2,3}^{2,3}A_{2,3}^{2,3} = \\ = (a_1^2 a_2^3 - a_2^2 a_1^3)a_3^1 - (a_1^2 a_3^3 - a_3^2 a_1^3)a_2^1 + (a_2^2 a_3^2 - a_3^2 a_2^3)a_1^1. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Раскрыв скобки, приходим к формуле (3.6), выражающей определитель непосредственно через элементы матрицы a_j^i.

Интересно отметить, что поскольку пары миноров

$$M_{1,2}^{2,3}, \quad a_3^1; \quad M_{1,3}^{2,3}, \quad a_2^1; \quad M_{2,3}^{2,3}, \quad a_1^1$$

являются взаимно дополнительными, то их произведения на свои алгебраические дополнения равны. Тогда разложение (3.22) можно переформулировать в более привычное разложение по первой строке:

$$\det A = M_{1,2}^{2,3}A_{1,2}^{2,3} + M_{1,3}^{2,3}A_{1,3}^{2,3} + M_{2,3}^{2,3}A_{2,3}^{2,3} = a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + a_3^1 A_3^1.$$

Любопытно, что иногда именно разложение по нескольким строкам (столбцам) позволяет быстрее вычислить определитель, чем разложение по одной строке. Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 3.13. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

найти значение $\det A$.

Решение. Выделим в матрице A 2-ю и 4-ю строки, удачно содержащие нули. Тогда из шести ($C_4^2 = 6$) миноров 2-го порядка, расположенных в этих строках, только один

$$M_{2,3}^{2,4} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

отличен от нуля. Остальные миноры обращаются в нуль, поскольку обязательно содержат нулевой столбец.

Дополнительный минор и алгебраическое дополнение к минору $M_{2,3}^{2,4}$ имеют вид

$$\overline{M}_{2,3}^{2,4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{2,3}^{2,4} = (-1)^{2+4+2+3}\overline{M}_{2,3}^{2,4} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2.$$

Тогда

$$\det A = M_{2,3}^{2,4} A_{2,3}^{2,4}$$

или в подробной записи

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 14.$$

Обратимся теперь к определителям произвольного порядка n.

Лемма 3.1. *Для квадратной матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^4 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

произведение любого минора k-го порядка на его алгебраическое дополнение есть сумма, слагаемые которой являются элементами определителя $\det A$*, причем знаки этих элементов совпадают с теми знаками, с какими они входят в состав* $\det A$*, согласно формуле* (3.2).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда минор $M_{1,2,\dots,k}^{1,2,\dots,k}$ является главным минором матрицы A, занимающим первые k строк и столбцов. Тогда его дополнительный минор $\overline{M}_{1,2,\dots,k}^{1,2,\dots,k}$ — также главный минор, расположенный на последних $(n-k)$ строках и столбцах с номерами $k+1$, $k+2$, $\dots$, n, — определяет алгебраическое дополнение

$$A_{1,2,\dots,k}^{1,2,\dots,k} = (-1)^{S_M}\overline{M}_{1,2,\dots,k}^{1,2,\dots,k}.$$

Число S_M в выбранной конфигурации равно сумме

$$S_M = 1 + 2 + \ldots + k + 1 + 2 + \ldots + k = 2(1 + 2 + \ldots + k),$$

т.е. является чётным. Тогда $(-1)^{S_M} = 1$, и алгебраическое дополнение совпадает с дополнительным минором, в результате чего

$$M_{1,2,\dots,k}^{1,2,\dots,k} A_{1,2,\dots,k}^{1,2,\dots,k} = M_{1,2,\dots,k}^{1,2,\dots,k}\overline{M}_{1,2,\dots,k}^{1,2,\dots,k}. \tag{3.24}$$

Пусть

$$(-1)^l a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \cdots a_{i_k}^k \tag{3.25}$$

— произвольный член минора $M_{1,2,\dots,k}^{1,2,\dots,k}$, где l, согласно определению (3.2), — число инверсий в перестановке $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, т.е. $l = P(i_1, i_2, \dots, i_k)$. Пусть теперь

$$(-1)^{\bar{l}} a_{j_{k+1}}^{k+1} a_{j_{k+2}}^{k+2} \cdots a_{j_n}^n \tag{3.26}$$

— произвольный член дополнительного минора $\overline{M}^{1,2,\ldots,k}_{1,2,\ldots,k}$, где $\bar{l}$ — число инверсий в перестановке $(j_{k+1}, j_{k+2}, \ldots, j_n)$, т.е. $\bar{l} = P(j_{k+1}, j_{k+2}, \ldots, j_n)$.

Перемножив (3.25) и (3.26), получим произведение n элементов с множителем $(-1)^{l+\bar{l}}$:

$$(-1)^{l+\bar{l}} a^1_{i_1} a^2_{i_2} \cdots a^k_{i_k} a^{k+1}_{j_{k+1}} a^{k+2}_{j_{k+2}} \cdots a^n_{j_n}, \tag{3.27}$$

расположенных в разных строках и столбцах определителя $\det A$. Это означает, что произведение (3.27) действительно есть, с точностью до знака, некоторое слагаемое определителя, определяемое формулой (3.2).

Покажем теперь, что знак множителя $(-1)^{l+\bar{l}}$, с которым это слагаемое входит в произведение $M^{1,2,\ldots,k}_{1,2,\ldots,k} A^{1,2,\ldots,k}_{1,2,\ldots,k}$, совпадает со знаком, с которым оно входит в определитель $\det A$. Действительно, согласно формуле (3.2), слагаемое

$$(-1)^L a^1_{i_1} a^2_{i_2} \cdots a^k_{i_k} a^{k+1}_{j_{k+1}} a^{k+2}_{j_{k+2}} \cdots a^n_{j_n}$$

входит в $\det A$ именно со знаком $(-1)^L$, где L — число инверсий в перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_k, j_{k+1}, j_{k+2}, \ldots, j_n)$, т.е.

$$L = P(i_1, i_2, \ldots, i_k, j_{k+1}, j_{k+2}, \ldots, j_n).$$

При подсчёте числа инверсий L учтём, что все i не больше k, а все j не меньше $k+1$, поэтому при всех значениях индексов i_l и j_m первые k элементов перестановки не могут образовать инверсию по отношению к последующим ее элементом. Следовательно, число инверсий L совпадает с числом инверсий $l+\bar{l}$, что и доказывает рассматриваемый нами частный случай.

Пусть теперь минор M k-го порядка расположен произвольно в строках с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и столбцах с номерами $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$. В этом случае

$$S_M = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k.$$

Переставив строки и столбцы определителя, переместим минор M в верхний левый угол так, чтобы он занял первые k строк и столбцов. Тогда дополнительный минор $\overline{M}$ займёт правый нижний угол с номерами строк и столбцов $k+1, k+2, \ldots, n$, как в рассмотренном выше случае. Подсчитаем число транспозиций строк и столбцов, которые следует совершить для получения такой конфигурации определителя $\det A$. Для того чтобы i_1-ая строка стала 1-й строкой, нужно переставить её сначала с (i_1-1)-ой строкой, затем с (i_1-2)-ой и т.д., пока она не займёт место первой строки. Очевидно, что число транспозиций равно $i_1 - 1$. Аналогично число транспозиций, переводящих i_2-ю строку на место 2-ой, равно $i_2 - 2$. Таким образом, следует совершить

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \ldots + (i_k - k) = (i_1 + i_2 + \ldots + i_k) - (1 + 2 + \ldots + k)$$

траспозиций строк. Аналогично следует совершить

$$(j_1 - 1) + (j_2 - 2) + \ldots + (j_k - k) = (j_1 + j_2 + \ldots + j_k) - (1 + 2 + \ldots + k)$$

транспозиций столбцов.

Так как мы переставляли лишь соседние строки и столбцы, то взаимное расположение элементов в минорах M и $\overline{M}$ не изменилось, однако в новом определителе $\det A'$ они являются главными минорами, занимая верхний левый и нижний правый углы соответственно. Поскольку определитель $\det A'$ получен из определителя $\det A$ путем

$$(i_1 + i_2 + \ldots + i_k) + (j_1 + j_2 + \ldots + j_k) - 2(1 + 2 + \ldots + k) = S_M - 2(1 + 2 + \ldots + k)$$

транспозиций строк и столбцов, то

$$\det A' = (-1)^{S_M - 2(1+2+\ldots+k)} \det A = (-1)^{S_M} \det A.$$

Это означает, что элементы определителя $\det A'$ отличаются от соответствующих элементов определителя $\det A$ лишь знаком множителя $(-1)^{S_M}$ (чётное число $2(1+2+\ldots+k)$ на знак не влияет). Отсюда с учётом первой части леммы следует, что произведение $(-1)^{S_M} \det A = (-1)^{S_M} M\overline{M} = MA$, т.е. произведение минора на своё алгебраическое дополнение состоит из некоторых элементов определителя $\det A$, взятых с теми знаками, которые они имеют, согласно определению (3.2), что и требовалось доказать.

Следствие 3.1.1. Если M и $\overline{M}$ — пара взаимно дополнительных миноров, то их произведения на свои алгебраические дополнения равны.

Доказательство. Если миноры M и $\overline{M}$ взаимно дополнительные, то числа S_M и $S_{\overline{M}}$ имеют одинаковую чётность. Действительно, номер всякой строки и всякого столбца входят слагаемыми только в одно из чисел S_M или $S_{\overline{M}}$. В результате сумма $S_M + S_{\overline{M}}$ всегда равна общей сумме строк и столбцов определителя $\det A$:

$$S_M + S_{\overline{M}} = (1+2+\ldots+n) + (1+2+\ldots+n) = 2(1+2+\ldots+n),$$

т.е. является чётным числом. Отсюда и следует одинаковая чётность чисел S_M и $S_{\overline{M}}$.

Пусть A и $\overline{A}$ – алгебраические дополнения миноров M и $\overline{M}$ соответственно. Тогда $A = (-1)^{S_M}\overline{M}$ и $\overline{A} = (-1)^{S_M} M$. Отсюда с учётом того, что $(-1)^{S_M} = (-1)^{S_{\overline{M}}}$, имеем $MA = \overline{M}\,\overline{A}$, что и требовалось доказать.

Теорема 3.1. *Определитель* $\det A$ *матрицы*

$$A = \|a^i_j\|_{n\times n}$$

равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки на их алгебраические дополнения

$$\det A = a^i_1 A^i_1 + a^i_2 A^i_2 + \ldots + a^i_n A^i_n = \sum_{j=1}^{n} a^i_j A^i_j. \tag{3.28}$$

Доказательство. В матрице A выделим произвольную строку, например, с номером i. Все элементы этой строки можно рассматривать как миноры 1-го порядка. Пусть $\overline{M}^i_j$ — дополнительные миноры этих элементов, а $A^i_j = (-1)^{i+j}\overline{M}^i_j$ — их алгебраические дополнения. Как следует из леммы 3.1, произведение $a^i_j A^i_j$ представляет собой сумму некоторых элементов определителя $\det A$.

Ранее уже отмечалось, что дополнительный минор $\overline{M}^i_j$ есть определитель $(n-1)$-го порядка и, следовательно, каждое произведение $a^i_j A^i_j$ содержит $(n-1)!$ слагаемых.

Рассмотрим теперь непосредственно сумму (3.28). Очевидно, что никакой элемент определителя не может входить в состав двух различных слагаемых этой суммы. Действительно, все слагаемые, входящие в первый член $a^i_1 A^i_1$, содержат элемент a^i_1 i-й строки и поэтому отличаются от слагаемых, входящих в произведение $a^i_2 A^i_2$ и содержащих элемент той же строки a^i_2, и т.д. Нетрудно установить, что общее число слагаемых суммы (3.28) равно $n(n-1)! = n!$. Но этим исчерпываются все элементы определителя $\det A$ вообще. Таким образом, сумма (3.28) совпадает с суммой из определения (3.2).

♦ Формула (3.28) называется *разложением определителя по элементам i-ой строки*. Аналогично можно получить формулу

$$\det A = a_i^1 A_i^1 + a_i^2 A_i^2 + \ldots + a_i^n A_i^n = \sum_{j=1}^{n} a_i^j A_i^j, \tag{3.29}$$

называемую *разложением определителя по элементам i-го столбца*.

◊ Отметим, что теорему 3.1 можно рассматривать как формулировку тождественности разложений (3.28) и (3.2), т.е. если определить $\det A$ соотношением (3.28), то из него следует справедливость разложения (3.2). В некоторых специальных курсах линейной алгебры так и поступают: для определения $\det A$ используют только разложение (3.28), совершенно не обращаясь к аксиоматической формуле (3.2). При этом все доказанные выше свойства определителей легко получаются из формул (3.28) и (3.29). Ниже мы покажем, как это можно сделать, но предварительно рассмотрим теорему, которая является обобщением теоремы 3.1 и называется теоремой Лапласа.

Теорема 3.2 (Лапласа). *Определитель* $\det A$ *матрицы*

$$A = \|a_j^i\|_{n\times n}$$

равен сумме произведений всех миноров k-го порядка, расположенных в произвольно выбранных k строках (столбцах) матрицы A, на их алгебраические дополнения.

Доказательство. Выделим произвольно в матрице A строки, например, с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Число миноров k-го порядка, расположенных в этих строках, равно числу сочетаний $C_n^k = n!/[k!(n-k)!]$. С другой стороны, сам минор содержит $k!$ слагаемых. Если $\overline{M}$ — дополнительный минор минора M, то он, в свою очередь, содержит $(n-k)!$ слагаемых. Такое же число слагаемых содержит и алгебраическое дополнение минора M. Таким образом, число слагаемых суммы произведений всех миноров k-го порядка на свои алгебраические дополнения определяется выражением

$$C_n^k k!(n-k)! = \frac{n!}{k!(n-k)!} k!(n-k)! = n!,$$

что совпадает с числом слагаемых определителя $\det A$.

Рассуждая далее так же, как и при доказательстве теоремы 3.1, мы придём к выводу, что, выбрав в качестве M в произведении MA все миноры k-го порядка, расположенные в заданных строках, мы получим указанные выше $n!$ слагаемые, совпадающие со слагаемыми определителя $\det A$ из формулы (3.2), что и требовалось доказать.

Следствие 3.2.1. Пусть в матрице A все элементы, стоящие в первых n строках и последних $n-k$ столбцах, равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_k^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^k & \ldots & a_k^k & 0 & \ldots & 0 \\ a_1^{k+1} & \ldots & a_k^{k+1} & a_{k+1}^{k+1} & \ldots & a_n^{k+1} \\ a_1^n & \ldots & a_k^n & a_{k+1}^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det A$ равен произведению двух миноров:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_k^1 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_1^k & \dots & a_k^k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{k+1}^{k+1} & \dots & a_n^{k+1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{k+1}^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Доказательство очевидным образом вытекает из разложения $\det A$ по первым k строкам с учётом того, что

$$S_M = (1 + 2 + \ldots + k) + (1 + 2 + \ldots + k) = 2(1 + 2 + \ldots + k)$$

или $(-1)^{S_M} = 1$.

Следствие 3.2.2. Пусть в квадратной матрице A размером $n = 2k$ все элементы, стоящие в первых k строках и столбцах, равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{k+1}^1 & \dots & a_{2k}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1}^k & \dots & a_{2k}^k \\ a_1^{k+1} & \dots & a_k^{k+1} & a_{k+1}^{k+1} & \dots & a_{2k}^{k+1} \\ a_1^{2k} & \dots & a_k^{2k} & a_{k+1}^{2k} & \dots & a_{2k}^{2k} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det A$ равен произведению двух миноров:

$$\det A = (-1)^k \begin{vmatrix} a_{k+1}^1 & \dots & a_{2k}^1 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{k+1}^k & \dots & a_{2k}^k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1^{k+1} & \dots & a_k^{k+1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_1^{2k} & \dots & a_k^{2k} \end{vmatrix}.$$

Доказательство очевидным образом вытекает из разложения $\det A$ по первым k строкам с учётом того, что

$$\begin{aligned} S_M &= (1 + 2 + \ldots + k) + [(k+1) + (k+2) + \ldots + (k+k)] = \\ &= k \cdot k + 2(1 + 2 + \ldots + k) = k^2 + k(k+1) = 2k^2 + k \end{aligned}$$

или $(-1)^{S_M} = (-1)^k$.

Вернёмся к свойствам определителей, рассмотренным в предыдущем разделе. Мы не будем повторно формулировать эти свойства, а рассмотрим только два из них, при доказательстве которых использовалась формула (3.4). Теперь мы докажем их, исходя из разложения (3.28) или (3.29), а заодно докажем и свойство 7.

Доказательство свойства 2. Как и ранее, рассмотрим матрицы A и B, в которых переставлены столбцы с номерами i и j. Пусть $i < j$. Рассмотрим сначала случай, когда $j = i + 1$, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_i^1 & a_{i+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_1^n & \dots & a_i^n & a_{i+1}^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_{i+1}^1 & a_i^1 & \dots & a_n^1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_1^n & \dots & a_{i+1}^n & a_i^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Для вычисления $\det A$ разложим его по элементам i-го столбца, а для вычисления $\det B$ — по элементам $(i+1)$-го столбца. Учтём, что элементы этих столбцов равны и равны их дополнительные миноры. Тогда

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} a_i^l (-1)^{i+l} M_i^l,$$

$$\det B = \sum_{l=1}^{n} a_i^l (-1)^{i+1+l} M_i^l = -\sum_{l=1}^{n} a_i^l (-1)^{i+l} M_i^l = -\det A,$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь i и j произвольны. Для матрицы B подсчитаем число транспозиций столбцов, после которых она совпадет с матрицей A. Такую перестановку можно осуществить, переставив соседние столбцы. Сначала j-й столбец (нумерация по матрице B) переставим последовательно с $(j-i)$ столбцами слева от него. Затем i-й столбец переставим на место j-го, поменяв его местами с каждым $(j-i-1)$-ым столбцом справа. Всего будет проделано $(j-i)+(j-i-1) = 2(j-i)-1$ транспозиций столбцов. Но тогда, как было показано выше,

$$\det B = (-1)^{2(j-i)-1} \det A = -\det A,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство свойства 4. Пусть, как и ранее, элементы j-го столбца матрицы A представляют собой сумму

$$a_j^l = \alpha b^l + \beta c^l.$$

Тогда, разложив $\det A$ по этому столбцу, имеем

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} a_j^l A_j^l = \sum_{l=1}^{n} (\alpha b^l + \beta c^l) A_j^l =$$
$$= \alpha \sum_{l=1}^{n} b^l A_j^l + \beta \sum_{l=1}^{n} c^l a_j^l = \alpha \det A + \beta \det C,$$

где матрицы B и C получаются из матрицы A заменой столбца a_j^l столбцом из элементов b^l и c^l, соответственно.

Доказательство свойства 7. Пусть A и B — две квадратные матрицы размера n. Рассмотрим вспомогательную квадратную матрицу размера $2n$

$$C = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_1^2 & \dots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix}.$$

Исходя из следствия 3.2.1 теоремы Лапласа, имеем

$$\det C = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ .. & & \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ .. & & \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix} = \det A \det B.$$

С другой стороны, над определителем $\det C$ можно выполнить следующие преобразования, не меняющие его значения. К элементам 1-ой строки прибавим элементы $(n+1)$-ой, умноженные на a_1^1; затем элементы $(n+2)$-ой, умноженные на a_2^1, и т.д. Далее к элементам 2-ой строки прибавим элементы $(n+1)$-ой, умноженные на a_1^2, затем элементы $(n+2)$-ой, умноженные на a_2^2, и т.д. Аналогичные преобразования проделываем с 3-ей строкой, 4-ой и, наконец, n-ой. В результате получим определитель вида

$$\det C = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^1 b_1^i & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^1 b_n^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^n b_1^i & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^n b_n^i \\ -1 & \dots & 0 & b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & b_1^n & \dots & b_n^n \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель, согласно следствию 3.2.2 теоремы Лапласа, равен

$$\det C = (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^1 b_1^i & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^1 b_n^i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^n b_1^i & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^n b_n^i \end{vmatrix}$$

или с учётом того, что второй определитель представляет собой определитель произведения матриц A и B:

$$\det C = (-1)^n(-1)^n \det(AB) = \det(AB).$$

Из сравнения двух значений $\det C$ получим

$$\det A \det B = \det(AB),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Свойство 7 легко обобщается на случай, когда число слагаемых больше двух:

$$\det(ABC) = \det(AB)\det C = \det A \det B \det C$$

и т.д. В частности,

$$\det(A^k) = (\det A)^k, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Следствие 2. Справедливо соотношение

$$\det(AB) = \det A \det B = \det A^\intercal \det B = \det A \det B^\intercal = \det A^\intercal \det B^\intercal,$$

которое непосредственно следует из свойств 1 и 7.

Свойство 8. Сумма произведений всех элементов любого столбца определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца равна нулю.

Доказательство. Пусть в матрице A столбцы с номерами i и j одинаковы. Тогда, как известно, $\det A = 0$. С другой стороны, значение $\det A$ можно записать, воспользовавшись его разложением по элементам j-го столбца:

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} a_j^l A_j^l = 0,$$

которое с учётом равенства $a_j^l = a_i^l$ $(l = \overline{1, n},\ i \neq j)$ можно записать как

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} a_j^l A_j^l = \sum_{l=1}^{n} a_i^l A_j^l = 0.$$

Перебрав все возможные пары i и j при условии $i \neq j$, убеждаемся в справедливости утверждения.

◊ Последнее утверждение эквивалентно утверждению «определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю».

Пример 3.14. Показать, что для любой квадратной матрицы (a_j^i) размера n выполняются соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} a_j^i A_k^i = \delta_{jk} \det A = \begin{cases} \det A \text{ при } j = k, \\ 0 \text{ при } j \neq k, \end{cases} \tag{3.30}$$

где A_k^i — алгебраические дополнения элементов a_k^i;

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A, \tag{3.31}$$

где α — любое число.

Решение. Соотношение (3.30) непосредственно вытекает из свойства 8 и разложения (3.28). Соотношение (3.31) следует из цепочки равенств

$$\det(\alpha A) = \det \begin{pmatrix} \alpha a_1^1 & \dots & \alpha a_n^1 \\ \hdotsfor{3} \\ \alpha a_1^n & \dots & \alpha a_n^n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_1^1 & \dots & \alpha a_n^1 \\ \hdotsfor{3} \\ \alpha a_1^n & \dots & \alpha a_n^n \end{vmatrix} = \alpha^n \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \hdotsfor{3} \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \alpha^n \det A,$$

что и требовалось показать.

3.4. Методы вычисления определителей

I. Непосредственное вычисление всех членов определителя

Этот метод предполагает вычисление определителей непосредственно из определения (3.2) (см., например, примеры 3.4 и 3.5).

Отметим, что вычисление определителей 4-го и более высоких порядков непосредственно по правилу (3.2) весьма трудоемко и фактически не применяется. Так, например, для определителей 4-го порядка нужно выписать $4! = 24$ слагаемых, а для определителей 5-го порядка — уже $5! = 120$ и т.д.

II. Понижение порядка определителя

1. Разложение определителя по одной или нескольким строкам (столбцам)

Пример 3.15. Вычислить $\det A$ матрицы A из примера 3.6.

Решение. *1 способ.* Разложим определитель по первой строке, согласно определению (3.28):

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(-1) - 2(-3) - (-5) = -2 + 6 + 5 = -1.$$

Разложение по первой строке не самое удачное. Очевидно, что разложение по 3-ей строке или 3-ему столбцу предпочтительнее, поскольку они содержат нулевой элемент. В результате нужно будет найти всего лишь два алгебраических дополнения, а не три, как для 1-ой строки.

2 способ. Проведём разложение по 3-ей строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 0 - (2-1) + 0 = -1.$$

3 способ. И, наконец, вычислим определитель, воспользовавшись разложением по двум строкам — 1-ой и 2-ой:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+2}\cdot 0 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+3}\cdot 1 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}(-1)^{1+2+2+3}\cdot 3 =$$
$$= 0 - (2-1) + 0 = -1.$$

Как видим, математические выкладки при разложении определителя по 3-ей строке и строкам 1-ой и 2-ой совершенно идентичны. Это объясняется тем, что в обоих разложениях присутствуют миноры, представляющие собой пары взаимно дополнительных миноров. Аналогично проводятся и другие возможные разложения.

2. Получение максимального числа нулей в одной или нескольких строках (столбцах) определителя

Умножая элементы строк или столбцов на определенным образом выбранные коэффициенты, а затем складывая столбцы или строки, можно достичь того, что все элементы некоторого столбца или некоторой строки, за исключением одного, обратятся в нуль. Тогда исходный определитель равен взятому со знаком плюс или минус произведению этого элемента на соответствующий ему дополнительный минор, представляющий собой определитель $(n-1)$-го порядка. Определитель $(n-1)$-го порядка по этой же схеме сводится к определителю $(n-2)$-го порядка и т.д. Если все элементы строки (столбца) обратятся в нуль, то определитель, естественно, будет равен нулю.

Пример 3.16. Вычислить $\det A$ матрицы A из примера 3.6.

Решение. В исходном определителе вычтем из первой строки вторую:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{S_1 - S_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Такая операция, согласно свойствам определителей, не меняет его значения, зато в 1-ой строке и 3-м столбце мы получили по два нулевых элемента. В результате определитель 3-го порядка можно свести к одному определителю 2-го порядка, например, разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

или по двум строкам — 1-ой и 3-ей:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{1+3+1+2} 1 = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Пример 3.17. Вычислить

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение. Максимальное число нулей проще всего получить во 2-м столбце, сложив 1-ю строку со всеми остальными. Тогда исходный определитель 4-го порядка сводится к одному определителю 2-го порядка следующим образом:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{S_3+S_1 \\ S_4+S_1}}{\overset{S_2+S_1}{=}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 7 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} \underset{S_3-S_1}{=}$$

$$= - \begin{vmatrix} 7 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)^6 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(21 - 16) = -5.$$

Пример 3.18. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -12 & -19 & -2 & 0 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ -20 & -16 & -12 & 1 \\ 5 & 15 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Прибавим к элементам второй строки элементы последней, умноженные на два, а к третьей строке — элементы последней. Получим

$$|A| = \begin{vmatrix} -12 & -19 & -2 & 0 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ -20 & -16 & -12 & 1 \\ 5 & 15 & -3 & -1 \end{vmatrix} \underset{S_3+S_4}{\overset{S_2+2S_4}{=}} \begin{vmatrix} -12 & -19 & -2 & 0 \\ 19 & 37 & -1 & 0 \\ -15 & -1 & -15 & 0 \\ 5 & 15 & -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \begin{vmatrix} -12 & -19 & -2 \\ 19 & 37 & -1 \\ -15 & -1 & -15 \end{vmatrix}.$$

Далее можно воспользоваться либо
1) правилом Саррюса:

$$|A| = -\begin{vmatrix} -12 & -19 & -2 \\ 19 & 37 & -1 \\ -15 & -1 & -15 \end{vmatrix} = -[12 \cdot 37 \cdot (-15) +$$
$$+19 \cdot (-1) \cdot (-2) + (-19) \cdot (-1) \cdot (-2) - (-2) \cdot 37 \cdot (-15) -$$
$$-(-19) \cdot 19 \cdot (-15) - (-1) \cdot (-1) \cdot 12] =$$
$$= 6660 - 38 + 285 + 1110 + 5415 + 12 = 13444,$$

либо снова
2) способом получения максимального числа нулей. Тогда, выполнив в определителе указанные в фигурных скобках операции, найдём

$$|A| = -\begin{vmatrix} 12 & -19 & -2 \\ 19 & 37 & -1 \\ -15 & -1 & -15 \end{vmatrix} \underset{S_3-15S_2}{\overset{S_1-2S_2}{=}} -\begin{vmatrix} -26 & -93 & 0 \\ 19 & 37 & -1 \\ -300 & -556 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= -\begin{vmatrix} -26 & -93 \\ -300 & -556 \end{vmatrix} = -(14456 - 27900) = 13444.$$

Из этого примера следует, что при больших значениях элементов определителя процедура его вычисления усложняется. В таком случае, прежде чем получать нулевые элементы, можно попытаться выделить общие множители, содержащиеся в каких-либо строках (столбцах).

Пример 3.19. Вычислить

$$\det A = \begin{vmatrix} 12 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прежде чем получать нули, отметим наличие общего множителя в 1-м столбце. Вынеся его за знак определителя, имеем

$$\det A = 4\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь обратим первый элемент первой строки в нуль. Это можно сделать различными способами. Вычтем, например, из 1-ой строки 2-ую и 3-ью строки. Такое преобразование удобно тем, что в нуль обратится не только 1-ый, но и все элементы 1-ой строки сразу. В результате этого $\det A = 0$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{S_1-S_2-S_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Пример 3.20. Вычислить

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 14 & 5 & 5 & 13 \end{vmatrix}.$$

Решение. Наличие единиц в определителе позволяет с помощью трёх преобразований получить три нулевых элемента в одной строке (столбце). Покажем, что этого можно достичь с помощью двух операций. Действительно, вычтем из 4-й строки 1-ю:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 14 & 5 & 5 & 13 \end{vmatrix} \underset{S_4 - S_1}{=} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 11 & 2 & 4 & 11 \end{vmatrix},$$

а теперь из 1-го столбца 4-ый:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 11 & 2 & 4 & 11 \end{vmatrix} \overset{R_1 - R_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 11 \end{vmatrix}.$$

В результате получим столбец, содержащий три нулевых элемента, следовательно,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 11 \end{vmatrix} \underset{S_3 - 2S_1}{\overset{S_2 - S_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10.$$

Пример 3.21. Вычислить

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & -4 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Решение. В определителе проведём указанные операции:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & -4 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \underset{S_3 - 2S_2}{\overset{S_2 - S_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Далее вместо получения третьего нулевого элемента воспользуемся разложением определителя по 2-й и 3-й строкам, поскольку только один минор 2-го порядка в этих строках отличен от нуля. Тогда

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{2+3+3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) = -10.$$

Следует отметить, что особенно важное значение рассматриваемый способ приобретает для определителей высших порядков. Действительно, если определитель 3-го порядка можно без затруднений разложить по строке, не содержащей нулей, то для определителей 4-го порядка требуется уже получить хотя бы два нулевых элемента, тогда как для определителя 5-го порядка — все четыре нулевых элемента в строке, в противном случае число арифметических вычислений существенно возрастает.

Пример 3.22. Вычислить

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Третий столбец уже содержит два нулевых элемента. Выполнив указанные действия, получим

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{S_4-4S_5}{\overset{S_2+3S_5}{=}} \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложив этот определитель по 3-му столбцу и выполнив указанные действия, найдём

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix} \underset{\substack{S_3-3S_2 \\ S_4-2S_2}}{\overset{S_1+2S_2}{=}} - \begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ -9 & 13 & 7 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} \overset{R_1+R_3}{=} \begin{vmatrix} 4 & 25 & 17 \\ 0 & -34 & -26 \\ 12 & -33 & -24 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 25 & 17 \\ 0 & -34 & -26 \\ 3 & -33 & -24 \end{vmatrix} \underset{S_3-3S_1}{=}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 25 & 17 \\ 0 & -34 & -26 \\ 0 & -108 & -75 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -34 & -26 \\ -108 & -75 \end{vmatrix} = 4(2550 - 2808) = -1032.$$

Следующие примеры предварим замечанием о том, что существует много вариантов получения нулевых элементов. Однако, если не использовать дробные числа, то, как было показано выше, такие элементы достаточно легко получить, когда в определителе присутствуют элементы, равные ± 1. Если таких элементов нет, то их следует получить, воспользовавшись свойствами определителя, а затем уже получать нули, как в приведённых выше примерах.

Пример 3.23. Вычислить

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Предложенный определитель не содержит элементов, равных ± 1. Получим их, например, сложив 1-ю и 2-ю строки:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix} \overset{S_1+S_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 & -1 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

Далее, действуя, как и в предыдущих примерах, имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 & -1 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix} \underset{\substack{S_3+5S_1 \\ S_4-6S_1}}{\overset{S_2+3S_1}{=}} \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -14 & 0 \\ -5 & 2 & -22 & 0 \\ 8 & -2 & 23 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 1 & -14 \\ -5 & 2 & -22 \\ 8 & -2 & 23 \end{vmatrix} \underset{S_2+2S_1}{\overset{S_2-2S_1}{=}} \begin{vmatrix} -3 & 1 & -14 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -(-5-12) = 17.$$

◊ Можно также в исходном определителе вычесть из 2-го столбца 4-й, а из 3-го — 4-й же, умноженный на 3, а затем разложить по 1-й строке.

3. Приведение определителя к треугольному виду

Этот способ является некоторым видоизменением предыдущего и состоит в преобразовании определителя к такому виду, когда элементы, стоящие по одну сторону от главной (побочной) диагонали, равны нулю. Последний определитель равен произведению элементов главной диагонали (побочной диагонали, умноженному на $(-1)^{n(n-1)/2}$).

Наличие множителя $(-1)^{n(n-1)/2}$ наглядно иллюстрирует следующий пример.

Пример 3.24. Показать, что определитель

$$\det A = \Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n^1 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^n a_i^{n+1-i}.$$

Решение. Разложение определителя Δ_n по первому столбцу приводит к определителю порядка $(n-1)$:

$$\Delta_n = a_n^1(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n^1 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

который ещё одним разложением по 1-му столбцу сводится к определителю порядка $(n-2)$:

$$\Delta_n = a_n^1(-1)^{1+n}\Delta_{n-1} = a_n^1 a_{n-1}^2 (-1)^{(1+n)+(1+n-1)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_3^{n-2} & a_4^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Продолжив, получим

$$\Delta_n = a_n^1 a_{n-1}^2 a_{n-2}^3 \cdots a_1^n (-1)^{(1+n)+(1+n-1)+(1+n-2)+\ldots+(1+2)}.$$

Поскольку показатель степени у (-1) представляет собой сумму арифметической прогрессии, то

$$(n+1)+n+(n-1)+\ldots+3 = \frac{(n+1+3)(n+1-2)}{2} =$$

$$= \frac{(n+4)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1),$$

откуда с учётом $(-1)^{2(n-1)} = 1$ следует

$$(-1)^{[n(n-1)/2]+2(n-1)} = (-1)^{n(n-1)/2},$$

что и требовалось показать.

Пример 3.25. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 0 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 0 & \dots & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Рассмотрим определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 0 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 0 & \dots & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем первую строку из всех остальных и получим

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 0 & -5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}5^n.$$

Пример 3.26. Вычислить

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычтя первую строку из всех остальных, получим

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 = 60.$$

Пример 3.27. Вычислить определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 14 & 5 & 5 & 13 \end{vmatrix}$$

из примера 3.20.

Решение. Как было показано в примере 3.20, исходный определитель можно записать в виде

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 14 & 5 & 5 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 14 & 2 & 4 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 11 \end{vmatrix},$$

который можно привести к треугольному виду, вычтя из третьей строки вторую, а из четвертой — удвоенную вторую:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10.$$

♢ Описанный выше метод неудобен в случае определителей с буквенными символами или определителей высокого порядка с числовыми коэффициентами. Общих способов вычисления таких определителей не существует, если не считать вычисления непосредственно по определению. К определителям различных специальных видов применяются различные методы вычисления, приводящие к более простым выражениям, чем полученные непосредственно из определения.

III. Метод рекуррентных соотношений

Этот метод заключается в том, что исходный определитель выражается через определитель того же вида, но более низкого порядка. В результате получается рекуррентная формула вида

$$\Delta_n = f(\Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}, \ldots, \Delta_{n-k}),$$

верная для всех натуральных $n > k$. Из этого соотношения методом математической индукции (или дедукции) получают формулу, с помощью которой определитель Δ_n выражается через $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ и n.

Пример 3.28. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} p & c & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c & p & c & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c & p & c & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Решение. Разложим его по элементам первого столбца. Получим

$$|A| = \Delta_n = \begin{vmatrix} p & c & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c & p & c & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c & p & c & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p \end{vmatrix} = p\Delta_{n-1} - c \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c & p & c & \ldots & 0 \\ 0 & c & p & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p \end{vmatrix}.$$

Последний определитель разложим по элементам первой строки и получим

$$\Delta_n = p\Delta_{n-1} - c^2\Delta_{n-2}.$$

Положим теперь $p = a + b$. Тогда

$$\Delta_n - a\Delta_{n-1} = b\Big(\Delta_{n-1} - \frac{c^2}{b}\Delta_{n-2}\Big)$$

или

$$\Delta_n - b\Delta_{n-1} = a\Big(\Delta_{n-1} - \frac{c^2}{a}\Delta_{n-2}\Big).$$

Если $c^2/b = a$ и $c^2/a = b$, т.е. $ab = c^2$, то обе формулы описывают геометрическую прогрессию, где

$$\begin{cases} ab = c^2, \\ a + b = p. \end{cases} \tag{3.33}$$

Согласно теореме Виета, запишем уравнение $z^2 - pz + c^2 = 0$, корнями которого являются a и b. Следовательно, можно воспользоваться формулой для n-го члена геометрической прогрессии:

$$\Delta_n - a\Delta_{n-1} = b^{n-2}(\Delta_2 - a\Delta_1),$$
$$\Delta_n - b\Delta_{n-1} = a^{n-2}(\Delta_2 - b\Delta_1).$$

1. Если $a \neq b$, то

$$\Delta_n = xa^n + yb^n,$$

где a и b определены в (3.33) и обозначено

$$x = \frac{\Delta_2 - b\Delta_1}{a(a-b)}, \qquad y = \frac{\Delta_2 - a\Delta_1}{b(b-a)}.$$

Из (3.32) нетрудно получить, что

$$\Delta_1 = p, \qquad \Delta_2 = p^2 - c^2.$$

2. Если $a = b$, то $a = b = c$, $p = 2c$ и исходный определитель примет вид

$$\begin{vmatrix} 2c & c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & 2c & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 2c & c & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2c \end{vmatrix},$$

что с учётом свойства 3 определителя можно записать как

$$\Delta_n = c^n D_n, \tag{3.34}$$

где

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}. \tag{3.35}$$

Чтобы вычислить определитель D_n, разложим его по элементам первого столбца. Получим

$$D_n = 2D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Последний определитель разложим по элементам первой строки и получим

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}. \tag{3.36}$$

Исходя из (3.36), для определителей D_{n-1} и D_{n-2} можно записать

$$\begin{aligned} D_{n-1} &= 2D_{n-2} - D_{n-3}, \\ D_{n-2} &= 2D_{n-3} - D_{n-4}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Подставив (3.37) в (3.36), найдём

$$\begin{aligned} D_n &= 2(2D_{n-2} - D_{n-3}) - D_{n-2} = 3D_{n-2} - 2D_{n-3}, \\ D_n &= 3(2D_{n-3} - D_{n-4}) - 2D_{n-3} = 4D_{n-3} - 3D_{n-4}. \end{aligned}$$

Продолжив, получим

$$D_n = [(n-2)+1]D_{n-(n-2)} - [(n-1)-1]D_{n-(n-1)}$$

или

$$D_n = (n-1)D_2 - (n-2)D_1. \tag{3.38}$$

Из (3.35) легко найти

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad D_1 = 2.$$

Подстановка этих значений в (3.38) даёт

$$D_n = 3(n-1) - 2(n-2) = n+1,$$

откуда с учётом (3.34) имеем

$$\Delta_n = c^n(n+1).$$

Объединив оба случая, значения Δ_n можно записать как

$$\Delta_n = \begin{cases} xa^n + yb^n, \text{ если } p \neq 2c, \\ c^n(n+1), \text{ если } p = 2c. \end{cases}$$

Пример 3.29. Найти значение определителя n-го порядка

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 1 & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-1 & n & 1 & 2 & \ldots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 \end{vmatrix},$$

называемого циркулянтом.

Решение. Выполнив в определителе указанные действия, получим

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 1 & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-1 & n & 1 & 2 & \ldots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} \overset{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-S_2 \\ \cdots}}{\underset{\substack{\cdots \\ S_{n-1}-S_{n-2} \\ S_n-S_{n-1}}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\dots\dots \\ S_{n-1}-S_n}}{\overset{\substack{S_1-S_n \\ S_2-S_n}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & n+1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & n & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \\ 0 & n & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & n & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 0 & n+1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & n & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \\ 0 & n & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & n & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} n+1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \\ n & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вынеся теперь в $(n-2)$-х строках общий множитель n и выполнив указанные действия, найдём

$$(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} n+1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \\ n & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1} n^{n-2} \begin{vmatrix} n+1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\{R_1+R_{n-1}+\ldots+R_2\}}{=} (-1)^{n+1} n^{n-2} \begin{vmatrix} S_n & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$S_n = (n+1) + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 =$$
$$= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Снова разложим полученный определитель по первому столбцу:

$$(-1)^{n+1} n^{n-2} \begin{vmatrix} S_n & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}n^{n-2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Последний определитель $(n-2)$-го порядка вычислим с учётом результатов примера 3.24 и окончательно получим

$$\Delta_n = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}n^{n-2}(-1)^{n-2}(-1)^{(n-2)(n-3)/2} =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}n^{n-2}(-1)^{2n-1+(n-2)(n-3)/2} =$$
$$= (-1)^{(n^2-n+4)/2}\frac{n(n+1)}{2}n^{n-2} = (-1)^{n(n-1)/2}\frac{n(n+1)}{2}n^{n-2}.$$

Пример 3.30. Вычислить определитель Вандермонда

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

где верхние индексы обозначают показатель степени, а нижние — номер строки.

Решение. Как и раньше, выполнив указанные действия, получим

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \underset{\substack{\dots\dots\dots \\ S_n - a_1 S_{n-1}}}{\overset{\substack{S_2 - a_1 S_1 \\ S_3 - a_1 S_2}}{\sim}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

Вынесем теперь в каждом столбце общий множитель, а затем разложим полученный определитель по 1-му столбцу и получим

$$\Delta_n = (a_n - a_1)(a_{n-1} - a_1)\cdots(a_2 - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{i=2}^{n}(a_i - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, мы получили рекуррентное соотношение

$$\Delta_n = \prod_{i=2}^{n}(a_i - a_1)\Delta_{n-1}. \tag{3.39}$$

Применив соотношение (3.39) к определителю Δ_{n-1}, найдём

$$\Delta_{n-1} = \prod_{j=3}^{n}(a_j - a_2)\Delta_{n-2}. \tag{3.40}$$

Тогда

$$\Delta_n = \prod_{i=2}^{n}(a_i - a_1)\prod_{j=3}^{n}(a_j - a_2)\Delta_{n-2}.$$

Продолжив аналогичным образом, окончательно получим

$$\Delta_n = \prod_{i=2}^{n}(a_i - a_1)\prod_{j=3}^{n}(a_j - a_2)\cdots\prod_{k=n-1}^{n}(a_k - a_{n-2})\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{i=2}^{n}(a_i - a_1)\prod_{j=3}^{n}(a_j - a_2)\cdots\prod_{k=n-1}^{n}(a_k - a_{n-2})(a_n - a_{n-1}) = \prod_{1\leqslant s<i\leqslant n}(a_i - a_s).$$

Таким образом,

$$\Delta_n = \prod_{1\leqslant s<i\leqslant n}(a_i - a_s).$$

Пример 3.31. Вычислить

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Решение. Выполнив указанные операции, получим

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \overset{\substack{S_1 - S_2/a_1 \\ S_1 - S_3/a_2}}{\underset{\substack{\dots\dots\dots \\ S_1 - S_{n+1}/a_n}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{a_1} - \ldots - \dfrac{1}{a_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix},$$

а разложение последнего определителя по 1-ой строке даёт

$$\Delta_n = -\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\Big)\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} =$$

$$= -\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\Big) a_1 a_2 \cdots a_n = -\prod_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}.$$

Пример 3.32. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_{2n+1}^1 \\ -a_2^1 & 0 & a_3^2 & \ldots & a_{2n+1}^2 \\ -a_3^1 & -a_3^2 & 0 & \ldots & a_{2n+1}^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{2n+1}^1 & -a_{2n+1}^2 & -a_{2n+1}^3 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

порядка $2n+1$, которая называется косоугольной.

Решение. Нетрудно установить, что $A^\intercal = -A$. Отсюда, воспользовавшись свойствами определителей, имеем, с одной стороны, $\det A^\intercal = \det A$, а с другой

$$\det A^\intercal = \det[(-1)A] = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A.$$

Из сравнения находим $\det A^\intercal = \det A = -\det A$ или $\det A = -\det A$. Следовательно, $\det A = 0$.

Пример 3.33. Решить

1) уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0,$$

2) неравенство

$$\begin{vmatrix} x^2+7 & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} > -1.$$

Решение. В первом определителе из 3-го столбца вычтем первый, умноженный на 3. Тогда

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3-x & 0 \\ 1 & 2 & 2+x \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая его по третьему столбцу, найдём

$$(2+x)(3-x-2) = (2+x)(1-x) = 0,$$

откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Во втором случае, вычислив определитель второго порядка, получим

$$x^2 + 7 - 6x > -1, \quad x^2 - 6x + 8 > 0.$$

Найдём корни уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Решением неравенства является множество $x \in]-\infty, 2[\cup]4, \infty[$.

4. Ранг матрицы и его основные свойства

Обобщим понятие минора, введенное ранее для квадратных матриц, на случай прямоугольных матриц.

♦ Рассмотрим матрицу A размера $n \times m$. Как и ранее, *минором k-го порядка* ($k \leqslant \min(m, n)$) матрицы A будем называть определитель M, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых k строк и любых k столбцов матрицы A.

♦ *Рангом матрицы* A размера $m \times n$ называется наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы. Ранг матрицы A обозначается через $r(A) = \operatorname{rang} A = \operatorname{rank} A$.

♦ В матрице A размера $m \times n$ минор порядка r называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $r + 1$ равны нулю или миноров этого порядка нет вообще, т.е. r совпадает с меньшим из чисел m или n.

Очевидно, что если $r \leqslant \min(m, n)$, в матрице может быть несколько разных базисных миноров. Все базисные миноры имеют один и тот же порядок, равный рангу матрицы.

Действительно, все миноры порядка $(r + 1)$ равны нулю по определению. Равенство нулю миноров порядка $(r+2)$ вытекает из их разложения по нулевым минорам порядка $(r + 1)$.

♦ Строки и столбцы матрицы A, на пересечении которых расположен базисный минор, будем называть *базисными строками и столбцами.*

♢ Если все элементы матрицы равны нулю, то $\operatorname{rang} A = 0$.

♢ В общем случае вычисление ранга матрицы сводится к нахождению базисного минора. Перебор всех миноров в поисках базисного является задачей, связанной с большим объемом вычислений, особенно для матриц высших порядков. Наиболее просто ранг матрицы и её базисный минор можно найти с помощью так называемых элементарных преобразований, приводящих матрицу к возможно более простому виду.

♦ *Элементарными преобразованиями* матрицы называются следующие ее преобразования:

1) транспонирование;
2) перестановка двух строк или двух столбцов;
3) умножение всех элементов столбца или строки на отличное от нуля число;
4) прибавление ко всем элементам столбца (или строки) элементов другого столбца (или строки), умноженных на одно и то же число.

Теорема 4.1 (об элементарных преобразованиях). *При элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.*

Доказательство проведем для преобразований 1–4.

1. По свойству определителей каждый минор транспонированной матрицы $A^{\intercal}$ равен некоторому минору матрицы A и наоборот. Следовательно, наивысший порядок отличного от нуля минора не изменится.

2. После перестановки двух строк или столбцов приходим к новой матрице, каждый минор которой равен некоторому минору матрицы A либо отличается от него знаком.

3. При умножении всех элементов строки или столбца матрицы на число x одни ее миноры не изменяются, а другие умножаются на то же число x, но так как $x \neq 0$, то наивысший порядок отличного от нуля минора не изменится.

4. Если все миноры $r + 1$-го порядка равны нулю, то сложение столбцов не сделает ни один из них отличным от нуля. Действительно, полученный в результате преобразования минор либо равен алгебраической сумме двух миноров порядка $r + 1$ (в том случае, когда к столбцу, входящему в минор, прибавили

столбец, в него не входящий), либо он равен сумме минора порядка $r+1$ и определителя матрицы с двумя одинаковыми столбцами (в том случае, когда к столбцу, входящему в минор, прибавили столбец, также в него входящий). Из этих соображений следует, что ранг матрицы не повысился. Ясно, что он не может и понизиться, так как в противном случае вычитанием столбцов его порядок можно повысить. Аналогично для строк и столбцов, умноженных на отличное от нуля число.

♦ Две матрицы A и B называются эквивалентными, если от одной к другой можно перейти путем конечного числа элементарных преобразований. Для обозначения эквивалентных матриц используется символ $A \sim B$.

♦ *Канонической* называется матрица, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц (число которых может равняться нулю), а остальные элементы равны нулю.

◊ При помощи элементарных преобразований строк и столбцов любую матрицу можно привести к канонической. Ранг канонической матрицы равен числу единиц на ее главной диагонали.

Действительно, каноническую матрицу можно рассматривать как матрицу, содержащую внутри себя единичную, определитель которой и является базисным минором, приведённым к диагональному виду. Тогда число единиц, стоящих на главной диагонали, и будет определять ранг матрицы.

Пример 4.1. Привести пример канонической матрицы A размера 4×3, ранг которой равен двум ($\operatorname{rang} A = 2$).

Решение. По определению,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен двум ($\operatorname{rang} A = 2$).

Пример 4.2. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

методом элементарных преобразований.

Решение. Проведем элементарные преобразования матрицы A. Получим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \overset{S_3-2S_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{S_3-S_2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_3-R_1\\ R_4-4R_1}}{\overset{R_2-2R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_4-3R_2}{\overset{R_3+R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ранг матрицы A равен двум ($\operatorname{rang} A = 2$).

Пример 4.3. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

методом элементарных преобразований.

Решение. Переставим местами первую и вторую строки

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Далее к 3-й строке прибавим 1-ю, умноженную на -4, т.е. $S_3 - 4S_1$, и ко 2-й строке прибавим 1-ю, умноженную на -2, т.е. $S_2 - 2S_1$. Это дает

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

или

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь ко 2-му столбцу прибавим 1-й ($R_2 + R_1$), а к 3-му – 1-й, умноженный на -2 ($R_3 - 2R_1$). Получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Второй столбец разделим на 3:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и к 3-му столбцу прибавим 2-й, умноженный на 5: $R_3 + 5R_2$. Это окончательно даёт

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\operatorname{rang} A = 2$.

Пример 4.4. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

методом элементарных преобразований.

Решение. Приведем эту матрицу к диагональной с помощью указанных элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_3-3R_1 \\ R_4-2R_1}}{\overset{R_2+R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -7 & 3 \\ 4 & 3 & -7 & -3 \end{pmatrix} \underset{S_3-4S_1}{\overset{S_2-3S_1}{\sim}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & -7 & -3 \end{pmatrix} \overset{S_3-S_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь умножим 2-й столбец на 1/3:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_4-3R_1}{\overset{R_3+7R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\operatorname{rang} A = 2$.

♦ Векторы (векторы-столбцы, векторы-строки) X_k, $k = \overline{1,m}$, называются *линейно независимыми*, если

$$X \neq 0, \qquad X = \sum_{k=1}^{m} C_k X_k, \tag{4.1}$$

для всех чисел C_k, $k = \overline{1,m}$, отличных от тождественного нуля. В противном случае векторы X_k, $k = \overline{1,m}$, называются линейно зависимыми. Вектор X, определенный соотношением (4.1), называется линейной комбинацией векторов X_k, $k = \overline{1,m}$.

Теорема 4.2 (о базисном миноре). *В произвольной матрице A каждый столбец (строка) является линейной комбинацией базисных столбцов (строк).*

Доказательство. Исходную матрицу всегда можно привести к канонической форме, в которой на главной диагонали стоит несколько единиц, а все остальные элементы матрицы являются нулями. В процессе приведения матрицы к каноническому виду мы к соответствующим столбцам (строкам) прибавляли линейные комбинации других столбцов (строк). В канонической матрице базисные столбцы (строки) являются ненулевыми, а небазисные — нулевыми. Значит, в процессе элементарных преобразований мы к каждому небазисному столбцу (строке) прибавляли такую линейную комбинацию базисных столбцов (строк), что получили нулевой столбец (строку). Это и доказывает линейную зависимость небазисных столбцов и строк от базисных.

Следствие 4.2.1. Для квадратной матрицы A порядка n, у которой $\det A = 0$, по крайней мере один столбец (строка) является линейной комбинацией остальных.

Действительно, поскольку $\det A = 0$, то единственный минор, имеющий наивысший порядок n, равен нулю. Отсюда следует, что порядок базисных миноров, т.е. ранг матрицы r, удовлетворяет условию $r \leqslant n-1$, а потому на основании доказанного выше по крайней мере один столбец (строка) не является базисным, а выражается их линейной комбинацией, что и требовалось доказать.

Следствие 4.2.2. Определитель n-го порядка тогда и только тогда равен нулю, когда между его столбцами (строками) существует линейная зависимость.

Первое утверждение теоремы уже доказано как свойство 5 определителей. Из следствия 4.2.1 вытекает справедливость второго (обратного) утверждения, что и требовалось доказать.

◊ Ранг матрицы равен порядку базисного минора и, следовательно, равен максимальному числу независимых строк или столбцов в этой матрице.

Теорема 4.3 (о ранге матрицы). *Ранг матрицы A равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в этой матрице.*

Доказательство. Теорема имеет смысл, если $\operatorname{rang} A = r \geqslant 1$. Убедимся сначала, что в матрице A с рангом r действительно существуют r линейно независимых столбцов. Для этого рассмотрим квадратную матрицу A_r порядка r, определителем которой является базисный минор. Столбцы матрицы A_r представляют собой только часть столбцов исходной матрицы A. Если бы эти столбцы были линейно зависимы, то были бы линейно зависимы и столбцы матрицы A_r, в результате чего базисный минор, вопреки своему определению, обращался бы в нуль. Полученное противоречие подтверждает наличие r линейно независимых столбцов в матрице A.

Покажем теперь, что число r является максимальным, т.е. любые s столбцов матрицы A линейно зависимы, если $s > r$. Для этого из элементов матрицы A составим матрицу A' с числом столбцов $s > r$. Очевидно, что $\operatorname{rang} A' \leqslant r$, поскольку каждый минор матрицы A' является и минором матрицы A, и, следовательно, в матрице A' нет отличного от нуля минора порядка большего, чем r. Из неравенства $\operatorname{rang} A' \leqslant r$ с учётом произвольности числа s и вытекает справедливость утверждения теоремы.

Утверждение теоремы относительно строк доказывается аналогично.

◊ В общем случае в прямоугольной матрице число строк отличается от числа столбцов, однако, как следует из доказанной выше теоремы 4.3, число линейно независимых строк равно числу линейно независимых столбцов, и число это определяется рангом матрицы.

◊ Доказанные выше теоремы позволяют уменьшить число операций, необходимых для вычисления ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Действительно, в примерах 4.2–4.4 исходные матрицы можно было не приводить непосредственно к каноническому виду, а воспользоваться меньшим числом преобразований. Так, в примере 4.2 преобразования можно было уже остановить на эквивалентной матрице вида

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

имеющей две базисные строки и, следовательно, ранг, равный двум; в примере 4.3 — на матрице

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, наконец, в примере 4.4 — уже на матрице

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 3 & -7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы можно вычислить не только методом элементарных преобразований, но и методом окаймляющих миноров. Смысл его определяет следующая теорема.

Теорема 4.4 (об окаймляющих минорах). *Если $m \times n$-матрица A имеет минор порядка k, отличный от нуля, для которого все содержащие его миноры порядка $k+1$ (окаймляющие миноры) равны нулю, то ранг этой матрицы равен k:* $\operatorname{rang} A = k$.

Доказательство. Пусть M — отличный от нуля минор порядка k. Не нарушая общности рассмотрения, можно считать, что он является главным минором (в противном случае этого всегда можно добиться транспозицией строк и столбцов), занимающим первые k строк и столбцов матрицы A. Тогда первые k столбцов будут линейно независимыми между собой: если бы между ними существовала линейная зависимость, то между столбцами минора M существовала бы эта же линейная зависимость и поэтому минор M был бы равен нулю.

Рассмотрим миноры M_l, $l = \overline{1, m-k}$:

$$M_1 = \begin{vmatrix} \boxed{M} & a^1_{k+1} \\ & \dots \\ a^{k+1}_1 \dots & a^{k+1}_{k+1} \end{vmatrix}, \ M_2 = \begin{vmatrix} \boxed{M} & a^1_{k+1} \\ & \dots \\ a^{k+2}_1 \dots & a^{k+2}_{k+1} \end{vmatrix}, \ \dots, \ M_l = \begin{vmatrix} \boxed{M} & a^1_{k+1} \\ & \dots \\ a^{k+l}_1 \dots & a^{k+l}_{k+1} \end{vmatrix},$$

окаймляющие минор M.

Эти миноры характеризуются тем, что они последовательно, в дополнение к первым k элементам, перебирают все $(m-l)$ оставшиеся элементы $(k+1)$-го столбца. По условию теоремы, эти миноры равны нулю, из чего в силу следствия 4.2.1 следует линейная зависимость $(k+1)$-го столбца от первых k линейно независимых столбцов.

Далее меняем местами столбцы с номерами $(k+1)$ и $(k+2)$ и выписываем окаймляющие миноры, содержащие элементы $(k+2)$-го столбца. Затем меняем местами $(k+2)$-й и $(k+3)$-й столбцы и так далее. Из равенства нулю всех этих окаймляющих миноров следует линейная зависимость всех столбцов с номерами $(k+1)$ и более от первых k линейно независимых столбцов. Но тогда в силу теоремы 4.3 ранг матрицы A действительно равен k. Таким образом, теорема доказана.

Эта теорема, как уже отмечалось, даёт ещё один метод практического вычисления ранга матрицы, называемый методом *окаймляющих миноров*. Само доказательство теоремы задаёт алгоритм метода. При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам высших порядков. Если уже найден некоторый минор M порядка k, отличный от нуля, то вычисляются не все миноры $(k+1)$-го порядка (как этого требует определение), а лишь окаймляющие минор M (как того требует теорема): если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Пример 4.5. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

методом окаймляющих миноров.

Решение. Поскольку матрица ненулевая, то у нее существует минор первого порядка, отличный от нуля. Вычислим минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Вычислим окаймляющие его миноры третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{rang} A = 2$.

Пример 4.6. Методом окаймляющих миноров вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 11 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

Поскольку окаймляющие его миноры 3-го порядка равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 11 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1(1 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = 0,$$

то $\operatorname{rang} A = 2$.

Пример 4.7. Методом окаймляющих миноров вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. В данном случае минор 2-го порядка, стоящий в верхнем левом углу матрицы, равен нулю:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Однако соседний минор 2-го порядка

$$M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

отличен от нуля. Окаймляющий его минор 3-го порядка

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

также отличен от нуля. Поскольку оба минора 4-го порядка, окаймляющие M_3:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}, \quad M_4' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

равны нулю, то, следовательно, ранг матрицы A равен 3 ($\operatorname{rang} A = 3$).

В заключение приведём некоторые соотношения, определяющие ранг матрицы, являющейся результатом действия над другими матрицами.

1. Ранг произведения матриц A и B не выше ранга каждого из сомножителей, т.е.

$$\operatorname{rang}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B),$$

причём не всегда $\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(BA)$.

2. Если матрицы A и B являются квадратными порядка n, то справедлива оценка
$$\operatorname{rang}(AB) \geqslant \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B - n.$$

3. Если $\operatorname{rang} A = n$ ($\det A \neq 0$), то из предыдущих оценок следуют равенства
$$\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(BA) = \operatorname{rang} B.$$

4. Ранг суммы матриц A и B удовлетворяет оценке
$$\operatorname{rang}(A + B) \leqslant \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B.$$

5. При умножении матриц на число α, отличное от нуля, её ранг не меняется, т.е. $\operatorname{rang}(\alpha A) = \operatorname{rang} A$.

Докажем, например, соотношения 1. Для доказательства составим матрицу C из столбцов матрицы A и матрицы AB, т.е.
$$C = (A \ \vdots \ AB).$$

Очевидно, что $\operatorname{rang} AB \leqslant \operatorname{rang} C$. Поскольку, согласно определению произведения матриц, столбцы из AB являются линейной комбинацией столбцов матрицы A с коэффициентами b^i_j (элементы B), то $\operatorname{rang} C = \operatorname{rang} A$, откуда $\operatorname{rang}(AB) \leqslant \operatorname{rang} A$.

Аналогично доказывается, что $\operatorname{rang}(AB) \leqslant \operatorname{rang} B$, только в этом случае следует составить матрицу C' из строк матриц B и AB:
$$C' = \begin{pmatrix} B \\ \dots \\ AB \end{pmatrix}.$$

Пример 4.8. Привести пример матриц одного ранга, произведения которых имеют разные ранги.

Решение. Рассмотрим три матрицы 2-го порядка
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$
с рангом, равным единице: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = \operatorname{rang} C = 1$.

Для произведения
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$\operatorname{rang}(AB) = 1$, а для произведения
$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$\operatorname{rang}(AC) = 0$, т.е. $\operatorname{rang}(AB) \neq \operatorname{rang}(AC)$.

Пример 4.9. Привести пример матриц A и B, для которых $\operatorname{rang}(AB) \neq \operatorname{rang}(BA)$.

Решение. Рассмотрим матрицы

$$A = (1 \quad 2)\,, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

и найдём их произведения

$$AB = (1 \quad 2)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}(1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rang}(AB) = 0$, а $\operatorname{rang}(BA) = 1$, то $\operatorname{rang}(AB) \neq \operatorname{rang}(BA)$.

5. Обратная матрица

♦ Квадратная $n \times n$-матрица $B = \|b^j_k\|$ называется *обратной* по отношению к $n \times n$-матрице $A = \|a^j_k\|$, если

$$AB = BA = E = \mathbb{I}. \tag{5.1}$$

Для обозначения обратной матрицы используется символ A^{-1}.

♦ Квадратная $n \times n$-матрица называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, и *вырожденной*, или *особенной*, если $\det A = 0$.

♦ Квадратная $n \times n$-матрица $C = \|c^j_k\|$ называется *присоединенной*, или *союзной* к матрице $A = \|a^j_k\|$, если для ее элементов справедливо

$$c^j_k = A^k_j, \qquad k, j = \overline{1, n}, \tag{5.2}$$

где A^k_j — алгебраическое дополнение к элементу a^k_j. Присоединенную матрицу обозначают символом $\bar{A}$.

Теорема 5.1. *Для того чтобы для матрицы A существовала обратная матрица, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что матрица A имеет обратную A^{-1}, т.е. $AA^{-1} = \mathbb{I}$. Следовательно,

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det \mathbb{I} = 1. \tag{5.3}$$

Следовательно, $\det A \neq 0$.

Достаточность. Предположим, что $\det A \neq 0$. Рассмотрим произведение матриц A и $\bar{A}$:

$$A\bar{A} = \left\| \sum_{l=1}^{n} a^j_l c^l_k \right\|.$$

В силу соотношения (3.30) можно записать

$$A\bar{A} = \left\| \sum_{l=1}^{n} a^j_l A^k_l \right\| = \|\delta^j_k \det A\| = (\det A) \cdot \mathbb{I}.$$

Аналогично
$$\bar{A}A = (\det A) \cdot \mathbb{I}.$$
Следовательно,
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\bar{A}, \tag{5.4}$$
что и требовалось доказать.

Формула (5.4) определяет алгоритм вычисления матрицы A^{-1}, обратной невырожденной матрице A.

Обратные матрицы удовлетворяют следующим свойствам.

Свойство 1. Справедливо соотношение
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
Действительно, умножение этого соотношения на (AB) слева даёт
$$(AB)(AB)^{-1} = (AB)B^{-1}A^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = A\mathbb{I}A^{-1} = AA^{-1} = E,$$
что и доказывает справедливость исходного соотношения. Очевидно, что
$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}.$$

Свойство 2. Справедливо соотношение
$$(A^{-1})^\intercal = (A^\intercal)^{-1}.$$
Действительно, из определения имеем $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$. Транспонируем левую и правую части этого равенства. Согласно свойству (2.6), получим произведение матриц
$$(A^{-1})^\intercal A^\intercal = A^\intercal (A^{-1})^\intercal = \mathbb{I},$$
но поскольку $\mathbb{I} = (A^\intercal)^{-1}A^\intercal = A^{-1}(A^\intercal)^{-1}$, то по определению обратной матрицы утверждение доказано.

Свойство 3. Справедливо соотношение
$$(A^{-1})^{-1} = A.$$
Действительно, умножив это равенство слева на A^{-1}, получим $A^{-1}(A^{-1})^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$, что и требовалось доказать.

Свойство 4. Справедливо соотношение
$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1},$$
которое следует из (5.3).

Пример 5.1. Найти матрицу, обратную к матрице
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A треугольная, и, следовательно, $\det A = 2$. Найдем матрицу

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

и с ее помощью союзную

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Окончательно по формуле (5.4) получим

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3{,}5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.2. Методом присоединённой матрицы найти обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица является неособой, поскольку $\det A = 1$. Найдём матрицу

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

и с её помощью союзную

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 & \ldots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 & \ldots & A_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n^1 & A_n^2 & A_n^3 & \ldots & A_n^n \end{pmatrix},$$

где

$$A_1^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}, \quad A_1^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}, \quad A_1^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}, \ldots;$$

$$A_1^n = (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}; \; A_2^1 = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}, \; A_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

$$A_2^3 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad A_2^n = (-1)^{n+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

и т.д. Союзная матрица после упрощения примет вид

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

и совпадёт с обратной: $\bar{A} = A^{-1}$, поскольку $\det A = 1$.

$\Diamond$ Следует отметить, что вычисление присоединенной матрицы $\bar{A}^{\intercal}$ по формуле (5.4) очень трудоёмко, особенно для матриц высокого порядка. Поэтому на практике пользуются другими методами вычисления обратной матрицы, например методом элементарных преобразований.

Лемма 5.1 (об элементарных преобразованиях). *Все элементарные преобразования над строками матрицы A размера $m\times n$ равносильны умножению её слева на некоторые невырожденные квадратные матрицы размера m.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{I}$ – единичная матрица размера m. Рассмотрим матрицу $S(i,j)$, получаемую из единичной перестановкой её i-ой и j-ой строк. Тогда произведение $S(i,j)A$, согласно определению, даёт матрицу, отличающуюся от A перестановкой строк с номерами i и j.

Далее рассмотрим матрицу $S(1;i,i;\alpha)$, получаемую из единичной заменой i-ой единицы на главной диагонали числом $\alpha \neq 0$. Тогда умножение $S(1;i,i;\alpha)$ слева на A равносильно умножению i-ой строки матрицы A на число α.

Наконец, рассмотрим матрицу $S(0;i,j;1)$, получаемую из единичной заменой нулевого элемента, стоящего на пересечении i-ой строки и j-го столбца, на единицу. Умножение $S(0;i,j;1)$ на A слева равносильно сложению i-ой и j-ой строк.

Очевидно, что

$$\det S(i,j) = -1, \quad \det S(1;i,i;\alpha) = \alpha, \quad \det S(0;i,j;1) = 1.$$

Таким образом, выполнение элементарных преобразований над строками матрицы A действительно соответствует умножению её слева на указанные выше матрицы S.

Элементарные преобразования столбцов осуществляются аналогичными матрицами порядка n умножением на них матрицы A справа.

Пример 5.3. Над матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

с помощью матриц S провести следующие преобразования:
1) поменять местами 2-ю и 3-ю строки;
2) к 1-й строке прибавить 2-ю;
3) к 1-й строке прибавить 3-ю, умноженную на α.

Решение. Из единичной матрицы

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

составим

1) матрицу

$$S(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда произведение $S(2,3)A$ даёт матрицу

$$S(2,3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

отличающуюся от A местами 2-й и 3-й строк;

2) матрицу

$$S(0;1,2;1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

умножение которой на A слева равносильно прибавлению в матрице A 2-й строки к 1-й:

$$S(0;1,2;1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

3) матрицу

$$S(0;1,3;\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

умножение которой на A слева равносильно прибавлению в матрице A 3-й строки, умноженной на α, к 1-й строке:

$$S(0;1,3;\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 2+\alpha & 2\alpha & 3+\alpha \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 5.2. *Любую невырожденную матрицу A путем элементарных преобразований только строк (или столбцов) можно привести к единичной. Применив ту же последовательность преобразований к единичной матрице $\mathbb{I}$, получим обратную матрицу A^{-1}.*

Доказательство. Поскольку $\det A \neq 0$, то существует A^{-1}, а так как $\det(A^{-1}) \neq 0$, то, согласно лемме 5.1 и теореме 4.1, найдутся такие матрицы S, осуществляющие элементарные преобразования, которые приведут A к единичной матрице $\mathbb{I}$, т.е. $S_l \cdots S_1 A = \mathbb{I}$, откуда $S_l \cdots S_1 A A^{-1} = \mathbb{I} A^{-1}$ или $S_l \cdots S_1 \mathbb{I} = A^{-1}$, что и требовалось доказать.

Сама идея доказательства теоремы диктует алгоритм метода элементарных преобразований для нахождения обратной матрицы.

$\Diamond$ Удобно совершать элементарные преобразования над матрицами A и $\mathbb{I}$ одновременно, записывая их через черту.

Пример 5.4. Методом элементарных преобразований найти обратную к A матрицу, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение. *1 способ.* Следуя теореме 5.2, выпишем матрицы S_l, приводящие матрицу A к единичной. Обозначим через

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1/4 \end{pmatrix}$$

матрицу, которая в матрице A прибавляет 1-ю строку ко 2-й, умноженной на $-1/4$:

$$S_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7/4 \end{pmatrix}.$$

Далее обозначим через

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4/7 \end{pmatrix}$$

матрицу, которая в преобразованной матрице S_1A умножает 2-ю строку на $4/7$:

$$S_2(S_1A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

И, наконец, обозначим через

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицу, которая в $S_2(S_1A)$ к 1-й строке прибавляет 2-ю, умноженную на (-3), приводя A к единичной матрице:

$$S_3(S_2(S_1A)) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}.$$

Тогда обратная матрица A^{-1} найдётся как

$$A^{-1} = S_3S_2S_1\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -12/7 \\ 0 & 4/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/7 & 3/7 \\ 4/7 & -1/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 способ. Следуя замечанию к теореме 5.2, запишем матрицу

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

если работаем со строками, и матрицу

$$C = \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

если работаем со столбцами. Будем проводить элементарные преобразования матрицы B. Получим

$$B \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 1 \end{array}\right) \overset{-S_2/7}{\sim} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & -1/7 \end{array}\right) \overset{S_1-3S_2}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -5/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 4/7 & -1/7 \end{array}\right).$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Естественно, что полученные двумя способами результаты совпали. В силу простоты 2-го способа именно им и будем пользоваться в дальнейшем.

Пример 5.5. Методом элементарных преобразований найти обратную матрицу к матрице A из примера 5.1.

Решение. Запишем матрицу

$$B = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Проводя указанные элементарные преобразования, найдём

$$B = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{S_2-S_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{S_3/2}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{array}\right) \overset{S_1-2S_2+3S_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{array}\right),$$

откуда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3{,}5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix},$$

что совпадает с результатом примера 5.1.

Пример 5.6. Методом элементарных преобразований найти обратную матрицу к матрице A из примера 5.2.

Решение. Запишем матрицу B и выполним указанные элементарные преобразования

$$B = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\ldots\ldots\\ S_{n-1}-S_n}}{\overset{\substack{S_1-S_2\\ S_2-S_3}}{\sim}}$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right),$$

откуда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

что совпало с результатами примера 5.2.

Пример 5.7. Найти матрицу, обратную матрице произведения AB, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Согласно свойству 1 обратной матрицы, можем записать

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Тогда, воспользовавшись результатами примеров 5.5 и 5.6, найдём

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3{,}5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4{,}5 \\ 0 & 2 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 2

Системы линейных уравнений

6. Теорема Кронекера–Капелли

Она из задач, наиболее часто встречающихся в инженерных вычислениях, — решение системы линейных уравнений, при этом число уравнений обычно равно числу неизвестных или меньше него. Не исключено также, что число уравнений может быть и больше числа неизвестных. Такую систему можно записать в виде

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \ldots + a_n^1x^n = b^1; \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \ldots + a_n^2x^n = b^2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \ldots + a_n^mx^n = b^m. \end{cases} \tag{6.1}$$

Систему (6.1) можно представить в матричной форме:

$$AX = B, \tag{6.2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}.$$

♦ Матрица A называется *основной* матрицей системы, а матрица

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 & b^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m & b^m \end{array} \right). \tag{6.3}$$

называется *расширенной.*

♦ *Решением системы* (6.1) называется всякая совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \ldots, \alpha_n$, которая, будучи подставленной в систему (6.1) вместо неизвестных $x^1, x^2, \ldots, x^n$, обращает все уравнения в тождества.

♦ Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

♦ Совместная система называется *определенной*, если она имеет одно решение, и *неопределенной*, если решений больше одного.

♦ Система линейных уравнений называется *однородной*, если все ее правые части равны нулю, т.е. $b^k = 0$, $k = \overline{1, m}$. В противном случае система линейных уравнений называется *неоднородной.*

♦ Две системы называются *эквивалентными* (или *равносильными*), если каждое решение первой системы является решением второй, и наоборот.

Теорему Кронекера–Капелли называют теоремой *о совместности системы линейных уравнений* (6.1).

Теорема 6.1 (Кронекера–Капелли). *Система* (6.1) *совместна тогда и только тогда, когда ранги матриц $\widetilde{A}$ и A совпадают.*

Доказательство. 1. Докажем сначала необходимость этого условия. Пусть система (6.1) является совместной. Тогда существуют такие числа $x^1 = \alpha_1$, $x^2 = \alpha_2$, ..., $x^n = \alpha_n$, которые уравнения системы (6.1) обращают в тождества:

$$\begin{gathered}
a_1^1\alpha_1 + \ldots + a_n^1\alpha_n = \sum_{l=1}^{n} a_l^1\alpha_l = b^1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_1^m + \ldots + a_n^m\alpha_n = \sum_{l=1}^{n} a_l^m\alpha_l = b^m,
\end{gathered}$$

с помощью которых расширенную матрицу (6.3) можно записать в виде

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c}
a_1^1 & \ldots & a_n^1 & \sum\limits_{l=1}^{n} a_l^1\alpha_l \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
a_1^m & \ldots & a_n^m & \sum\limits_{l=1}^{n} a_l^m\alpha_l
\end{array}\right).$$

Нетрудно заметить, что последний столбец представляет собой линейную комбинацию предыдущих столбцов, следовательно, $\operatorname{rang}\widetilde{A} = \operatorname{rang} A$.

2. Достаточность. Пусть $\operatorname{rang}\widetilde{A} = \operatorname{rang} A$. Тогда базисный минор матрицы A является и базисным минором расширенной матрицы $\widetilde{A}$. В силу этого столбец из свободных членов является линейной комбинацией базисных столбцов матрицы A, а коэффициенты этой линейной комбинации — решениями системы (6.1). Следовательно, система (6.1) является совместной, что и требовалось доказать.

$\Diamond$ Если ранг этих матриц равен числу переменных ($r = n$), то система будет определенной, т.е. иметь единственное решение.

$\Diamond$ Если ранг этих матриц меньше числа переменных ($r < n$) то система не определена, т.е. имеет бесконечно много решений.

$\Diamond$ Пусть система (6.1) совместна. Теорема Кронекера–Капелли, при помощи которой мы установили совместность этой системы, говорит только о существовании решения, но не дает практических рецептов для его отыскания. К рассмотрению методов решения систем линейных уравнений мы и переходим.

7. Системы n линейных уравнений с n неизвестными

7.1. Метод Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases}
a_1^1x^1 + \cdots + a_n^1x^n = b^1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_1^nx^1 + \cdots + a_n^nx^n = b^n
\end{cases} \tag{7.1}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^ix^j = b^i, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{7.2}$$

Число уравнений этой системы совпадает с числом неизвестных.

Составим определитель этой системы, называемый главным определителем:

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Этот определитель можно разложить по элементам первого столбца:

$$D = a_1^1 A_1^1 + a_1^2 A_1^2 + \dots + a_1^n A_1^n. \tag{7.3}$$

Напомним, что сумма произведений всех элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю. Например,

$$a_1^1 A_2^1 + a_1^2 A_2^2 + \ldots + a_1^n A_2^n = 0.$$

Теорема 7.1. *Если определитель системы* (7.1) *отличен от нуля, т.е.* $D = \det A \neq 0$*, то эта система имеет единственное решение, которое находится по формулам*

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \qquad j = \overline{1, n}, \tag{7.4}$$

где D_j *– определитель, полученный из* D *заменой его* j*-го столбца столбцом свободных членов.*

Доказательство. Чтобы найти неизвестное число x^1, умножим первое уравнение системы (7.1) на дополнение A_1^1, второе на A_1^2, ..., n-е на A_1^n и сложим все уравнения системы:

$$x^1(a_1^1 A_1^1 + \ldots + a_1^n A_1^n) + x^2(a_2^1 A_1^1 + \ldots + a_2^n A_1^n) + \ldots +$$
$$+ \ldots + x^n(a_n^1 A_1^1 + \ldots + a_n^n A_1^n) = b_1 A_1^1 + b_2 A_1^2 + \ldots + b_n A_1^n.$$

Тогда, учтя, что

$$x^1 \sum_{i=1}^n a_1^i A_1^i = x^1 D,$$

а

$$x^j \sum_{i=1}^n a_j^i A_1^i = 0, j \neq 1,$$

получим

$$x^1 D = D_1,$$

где

$$D_1 = \sum_{i=1}^n b^i A_1^i = \begin{vmatrix} b^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Следовательно, так как по условию $D \neq 0$, то $x^1 = D_1/D$.

В общем случае при произвольном j умножаем первое слагаемое системы (7.1) на A_j^1, второе на A_j^2, ..., n-е на A_j^n, складываем эти уравнения и на основании свойств определителя получим

$$x^j \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i = \sum_{i=1}^n b^i A_j^i,$$

т.е. $x^j D = D_j$, где

$$D_j = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_{j-1}^1 & b^1 & a_{j+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_1^n & \dots & a_{j-1}^n & b^n & a_{j+1}^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

откуда получим формулы (7.4):

$$x^j = \frac{D_j}{D},$$

называемые формулами Крамера.

Если сравнить требования теоремы Кронекера–Капелли 6.1 с требованиями теоремы 7.1, то совершенно очевидно, что условие $\det A \neq 0$ полностью соответствует условиям $\operatorname{rang} \widetilde{A} = \operatorname{rang} A = n$. Это и означает существование единственного решения, определяемого формулами Крамера (7.4).

Пример 7.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - x^3 = -3, \\ 2x^1 + 3x^2 + x^3 = -1, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Составим и вычислим определитель системы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9, \qquad D \neq 0.$$

Система имеет решение и притом единственное. По формулам Крамера найдем это решение в виде

$$x^1 = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{D}, \quad x^2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{D}, \quad x^3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{D}.$$

Вычислив определители

$$\begin{aligned} D_1 &= 9 + 6 - 1 + 9 - 3 - 2 = 18, \\ D_2 &= 1 - 3 - 6 - 1 - 6 - 3 = -18, \\ D_3 &= 9 - 2 + 6 + 9 - 12 - 1 = 9, \end{aligned}$$

получим

$$x^1 = \frac{18}{9} = 2, \qquad x^2 = \frac{-18}{9} = -2, \qquad x^3 = \frac{9}{9} = 1.$$

Пример 7.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^1 + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 = 0, \\ 2x^1 + 3x^2 - x^4 = 10, \\ x^1 + x^2 - 5x^3 = -10, \\ 3x^2 + 2x^3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Выпишем главный определитель системы

$$\det A = D = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

и вычислим его, например, разложением по 4-му столбцу:

$$D = -5 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разложив оба определителя 3-го порядка, например, по 1-му столбцу, найдем

$$D = -5\left\{2\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\right\} - \left\{4\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right\} = -215 - 75 = -290 \neq 0.$$

Поскольку главный определитель D отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение. Чтобы найти его, составим определители D_1, D_2, D_3, D_4, помещая столбец из свободных членов в 1-й, 2-й, 3-й и 4-й столбцы, соответственно:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 5 \\ 10 & 0 & 3 & -1 \\ -10 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 10 & 3 & -1 \\ 1 & -10 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 10 & -1 \\ 1 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычислив их, например, как и главный определитель D, получим $D_1 = -290$, $D_2 = 290$, $D_3 = -580$, $D_4 = 580$. Тогда по формулам Крамера найдем единственное решение системы

$$x^1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-290}{-290} = 1, \qquad x^2 = \frac{D_2}{D} = \frac{290}{-290} = -1,$$
$$x^3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-580}{-290} = 2, \qquad x^4 = \frac{D_4}{D} = \frac{580}{-290} = -2.$$

7.2. Матричный метод

Этот метод по смыслу очень близок к методу Крамера. По сути дела, метод Крамера представляет собой покомпонентную запись решения в матричной форме, которую дает матричный метод.

Действительно, с помощью матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}.$$

систему (7.1) можно записать в виде матричного уравнения (6.2):

$$AX = B.$$

Теперь, если матрица A неособенная, т.е. $\det A \neq 0$, то можно найти обратную ей матрицу A^{-1} и умножить уравнение (6.2) на A^{-1} слева. В результате получим

$$X = A^{-1}B. \tag{7.5}$$

С учетом теоремы 5.1 матрицу A^{-1} можно записать как матрицу, составленную из алгебраических дополнений A^i_j; в покомпонентной записи это уравнение имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_n \end{pmatrix},$$

откуда и следуют формулы Крамера.

Нужно, однако, отметить, что матричный метод имеет по крайней мере одно очень важное преимущество. Если в рассматриваемой системе алгебраических уравнений меняется только правая часть (ситуация, распространенная в исследовательских задачах), то матричный метод при найденной однажды матрице A^{-1} позволяет найти новые решения системы по формуле (7.5), тогда как в методе Крамера каждый раз приходится заново проделывать большой объем вычислений, чтобы найти определители D_j.

Именно поэтому мы рассмотрим несколько примеров решения систем линейных уравнений матричным методом.

Пример 7.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 + x^3 = 5, \\ 2x^1 - x^2 + x^3 = 6, \\ x^1 + 5x^2 = -3. \end{cases}$$

Решение. Выпишем основную матрицу систему

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

и вычислим ее определитель

$$\det A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -2.$$

Так как $\det A = -2 \neq 0$, то существует единственное решение системы. Чтобы найти его, вычислим обратную матрицу A^{-1}. Не останавливаясь на подробностях ее вычисления (см. примеры 5.1–5.3), запишем основные этапы ее нахождения: выпишем

$$A^{\intercal} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и найдем союзную матрицу

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix},$$

а затем обратную

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\bar{A}.$$

Теперь по формуле (7.5) найдем решение системы

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или покомпонентно $x^1 = 2$, $x^2 = -1$, $x^3 = 1$.

Пример 7.4. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 + x^3 = 1, \\ 2x^1 - x^2 + x^3 = 0, \\ x^1 + 5x^2 = 1. \end{cases}$$

Решение. Основная матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

совпадает с основной матрицей системы из примера 7.3. Следовательно, для обратной матрицы A^{-1} можно воспользоваться готовым результатом:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix},$$

а решение найти по формуле (7.5) с учетом того, что $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

или покомпонентно $x^1 = 1$, $x^2 = 0$, $x^3 = -2$.

7.3. Метод Гаусса–Жордана

Рассмотренные выше матричный метод и метод Крамера обладают тем недостатком, что они не дают ответа в том случае, когда $\det A = 0$, а определяют лишь единственное решение при $\det A \neq 0$. Еще одним недостатком является то, что объем математических вычислений в рамках этих методов резко возрастает с ростом числа уравнений.

Методом, практически свободным от этих недостатков, является метод исключения, или метод Гаусса–Жордана — один из наиболее известных и широко применяемых методов решения систем линейных уравнений. Для наглядности суть метода выясним на примере системы трех уравнений с тремя неизвестными. Последующие обобщения, как правило, затруднений не вызывают.

Рассмотрим систему из трех уравнений с тремя неизвестными

$$a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + a_3^1x^3 = b^1; \tag{7.6}$$
$$a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + a_3^2x^3 = b^2; \tag{7.7}$$
$$a_1^3x^1 + a_2^3x^2 + a_3^3x^3 = b^3. \tag{7.8}$$

В такой системе по крайней мере один из коэффициентов a_1^1, a_2^2, a_3^3 должен быть отличным от нуля, иначе мы имели бы дело в этих трех уравнениях только с двумя неизвестными. Если $a_1^1 = 0$, то можно переставить уравнения так, чтобы коэффициент при x^1 в первом уравнении был отличен от нуля. Очевидно, что такая перестановка уравнений оставляет систему неизменной: ее решение остается прежним.

Теперь введем множитель $m_2 = a_1^2/a_1^1$. Умножим первое уравнение системы на m_2 и вычтем его из уравнения (7.7). («Первое» и «второе» уравнения мы берем уже после перестановки, если она была необходима.) Результат вычитания равен

$$(a_1^2 - m_2a_1^1)x^1 + (a_2^2 - m_2a_2^1)x^2 + (a_3^2 - m_2a_3^1)x^3 = b^2 - m_2b^1.$$

Но ведь

$$a_1^2 - m_2a_1^1 = a_1^2 - \frac{a_1^2}{a_1^1}a_1^1 = 0,$$

так что x^1 исключен из второго уравнения (именно для достижения такого результата и было выбрано значение m_2). Определим теперь новые коэффициенты:

$$\tilde{a}_2^2 = a_2^2 - m_2a_2^1,$$
$$\tilde{a}_3^2 = a_3^2 - m_2a_3^1,$$
$$\tilde{b}^2 = b^2 - m_2b^1.$$

Тогда уравнение (7.7) приобретет вид

$$\tilde{a}_2^2x^2 + \tilde{a}_3^2x^3 = \tilde{b}^2. \tag{7.9}$$

Заменим второе из первоначальных уравнений (7.7) уравнением (7.9) и введем множитель $m_3 = a_1^3/a_1^1$ для третьего уравнения. Умножим уравнение (7.6) на этот множитель и вычтем его из (7.8). Коэффициент при x^1 снова становится нулевым, и третье уравнение приобретет вид

$$\tilde{a}_2^3x^2 + \tilde{a}_3^3x^3 = \tilde{b}^3, \tag{7.10}$$

где

$$\tilde{a}_2^3 = a_2^3 - m_3a_2^1,$$

$$\tilde{a}_3^3 = a_3^3 - m_3 a_3^1,$$
$$\tilde{b}^3 = b^3 - m_3 b^1.$$

Если теперь в исходной системе уравнений заменить (7.8) на (7.10), то новая система, которую мы будем называть упрощенной, выглядит так:

$$a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 = b^1; \tag{7.11}$$
$$\tilde{a}_2^2 x^2 + \tilde{a}_3^2 x^3 = \tilde{b}^2; \tag{7.12}$$
$$\tilde{a}_2^3 x^2 + \tilde{a}_3^3 x^3 = \tilde{b}^3. \tag{7.13}$$

Эти новые уравнения полностью эквивалентны исходным с тем преимуществом, что x^1 входит только в первое уравнение и не входит ни во второе, ни в третье. Таким образом, два последних уравнения представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными. Если теперь найти решение этой системы, т.е. определить x^2 и x^3, то результат можно подставить в первое уравнение и найти x^1. Иначе говоря, задача сведена к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Попытаемся теперь исключить x^2 из уравнений (7.12) и (7.13). Рассмотрим последовательно возможные варианты. Для начала будем считать, что $\tilde{a}_2^2 \neq 0$ и $\tilde{a}_2^3 \neq 0$.

Введем новый множитель

$$\tilde{m}_3 = \frac{\tilde{a}_2^3}{\tilde{a}_2^2}.$$

Умножим уравнение (7.12) на $\tilde{m}_3$ и вычтем его из (7.13). Результат вычитания равен

$$(\tilde{a}_2^3 - \tilde{m}_3 \tilde{a}_2^2)x^2 + (\tilde{a}_3^3 - \tilde{m}_3 \tilde{a}_3^2)x^3 = \tilde{b}^3 - \tilde{b}^2 \tilde{m}_3.$$

В силу выбора $\tilde{m}_3$

$$\tilde{a}_2^3 - \tilde{m}_3 \tilde{a}_2^2 = 0.$$

Положив

$$\tilde{\tilde{a}}_3^3 = \tilde{a}_3^3 - \tilde{m}_3 \tilde{a}_3^2,$$
$$\tilde{\tilde{b}}^3 = \tilde{b}^3 - \tilde{m}_3 \tilde{b}^2,$$

окончательно получим

$$\tilde{\tilde{a}}_3^3 x^3 = \tilde{\tilde{b}}^3. \tag{7.14}$$

Уравнение (7.13) можно заменить уравнением (7.14), после чего система уравнений приобретет следующий вид:

$$a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 = b^1; \tag{7.15}$$
$$\tilde{a}_2^2 x^2 + \tilde{a}_3^2 x^3 = \tilde{b}^2; \tag{7.16}$$
$$\tilde{\tilde{a}}_3^3 x^3 = \tilde{\tilde{b}}^3. \tag{7.17}$$

Такая упрощенная система иногда называется треугольной из-за своего внешнего вида.

Проанализируем возможные варианты системы (7.15)–(7.17).

1. Пусть $\tilde{\tilde{a}}_3^3 \neq 0$ при любом $\tilde{\tilde{b}}^3$. Сопоставим этот вариант с теоремой Кронекера–Капелли. Для этого выпишем расширенную матрицу системы

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & b^1 \\ 0 & \tilde{a}_2^2 & \tilde{a}_3^2 & \tilde{b}^2 \\ 0 & 0 & \tilde{\tilde{a}}_3^3 & \tilde{\tilde{b}}^3 \end{array}\right).$$

Из нее следует, что $\operatorname{rang} \widetilde{A} = \operatorname{rang} A = 3$, т.е. система совместна и имеет единственное решение.

Совершенно очевидно, что нужно сделать для нахождения этого единственного решения. Необходимо определить x^3 из (7.17), подставить этот результат в (7.16); определить x^2 из получившегося уравнения, подставить x^3 и x^2 в (7.15) и определить x^1. Этот процесс, который обычно называется обратной подстановкой (или обратным ходом), определяется в нашем случае формулами

$$x^3 = \frac{\tilde{\tilde{b}}^3}{\tilde{\tilde{a}}^3_3}, \tag{7.18}$$

$$x^2 = \frac{\tilde{b}^2 - \tilde{a}^2_3 x^3}{\tilde{a}^2_2}, \tag{7.19}$$

$$x^1 = \frac{b_1 - a^1_2 x^2 - a^1_3 x^3}{a^1_1}. \tag{7.20}$$

2. Пусть $\tilde{\tilde{a}}^3_3 = 0$. В этом случае очень важно, какое значение имеет величина $\tilde{\tilde{b}}^3$.

2а) Если $\tilde{\tilde{b}}^3 \neq 0$, то уравнение (7.17) будет иметь вид

$$0 = \tilde{\tilde{b}}^3,$$

а если разделить на $\tilde{\tilde{b}}^3 \neq 0$, то

$$0 = 1.$$

Как и в предыдущем случае, проанализируем этот результат с точки зрения теоремы Кронекера–Капелли, выписав расширенную матрицу системы

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & b^1 \\ 0 & \tilde{a}^2_2 & \tilde{a}^2_3 & \tilde{b}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Из нее следует, что $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang} \widetilde{A} = 3$, т.е. $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} \widetilde{A}$. Неравенство рангов означает, что система несовместна, в полном соответствии с невозможностью выполнения равенства $0 = 1$. Требование теоремы Кронекера–Капелли о равенстве рангов становится весьма наглядным, если для последней строки расширенной матрицы выписать соответствующее ей уравнение

$$0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 = 1.$$

Очевидно, что не существует таких x^1, x^2, x^3, которые, будучи умноженными на нуль, в сумме давали бы единицу.

Таким образом, на какой бы стадии упрощения системы мы ни получили строку вида

$$(0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 1),$$

ее наличие будет означать несовместность системы.

2б. Если $\tilde{\tilde{b}}^3 = 0$, то последнее уравнение будет иметь вид

$$0 = 0,$$

в результате чего останутся только два уравнения:

$$a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_3 x^3 = b^1,$$

$$\tilde{a}_2^2 x^2 + \tilde{a}_3^2 x^3 = b^2,$$

а расширенная матрица системы примет вид

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & b^1 \\ 0 & \tilde{a}_2^2 & \tilde{a}_3^2 & \tilde{b}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В этом случае $\operatorname{rang}\widetilde{A} = \operatorname{rang} A = 2 < 3$. Это означает, что система совместна, но не определена, т.е. имеет множество решений. Чтобы найти их, поступим следующим образом. Выделим базисный минор 2-го порядка, который по определению отличен от нуля, так как $\operatorname{rang}\widetilde{A} = 2$. Неизвестные, принадлежащие базисному минору (будем называть их базисными), оставим в левой части уравнений, а остальные переменные, которые будем называть свободными (или параметрическими), перенесем в правую часть. В результате получим систему треугольного вида

$$a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 = b^1 - a_3^1 x^3, \tag{7.21}$$

$$\tilde{a}_2^2 x^2 = \tilde{b}^2 - \tilde{a}_3^2 x^3. \tag{7.22}$$

Найдя из второго уравнения x^2 и подставив его в первое уравнение, получим выражение базисных неизвестных x^1 и x^2 через свободную неизвестную x^3:

$$x^1 = \Big(b^1 - \frac{a_2^1 \tilde{b}^2}{\tilde{a}_2^2}\Big) + \Big(a_3^1 + \frac{a_2^1 \tilde{a}_3^2}{\tilde{a}_2^2}\Big)x^3,$$

$$x^2 = \frac{\tilde{b}^2}{\tilde{a}_2^2} - \frac{\tilde{a}_3^2}{\tilde{a}_2^2}x^3.$$

Задав свободной неизвестной x^3 различные значения, получим множество решений системы (7.15)–(7.17).

Вернемся теперь к системе уравнений (7.11)–(7.13).

3. Если из коэффициентов $\tilde{a}_2^2$, $\tilde{a}_2^3$ только один отличен от нуля, то, таким образом, мы сразу имеем систему (7.15)–(7.17), процедура решения которой уже рассмотрена.

4. Если оба коэффициента $\tilde{a}_2^2$ и $\tilde{a}_2^3$ равны нулю, т.е. $\tilde{a}_2^2 = \tilde{a}_2^3 = 0$, то система (7.11)–(7.13) примет вид

$$\begin{aligned} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 &= b^1; \\ \tilde{a}_3^2 x^3 &= \tilde{b}^2; \\ \tilde{a}_3^3 x^3 &= \tilde{b}^3. \end{aligned}$$

В этом случае возможен вариант, когда эта система сведется к виду

$$\begin{aligned} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 &= b^1; \\ 0 &= 0; \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

В результате останется одно уравнение, а из вида расширенной матрицы

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & b^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

следует, что $\operatorname{rang}\widetilde{A} = \operatorname{rang} A = 1 < 3$. Следовательно, базисной неизвестной будет, например, x^1, которая будет выражаться через свободные неизвестные x^2 и x^3:

$$x^1 = b^1 - \frac{a_2^1}{a_1^1}x^2 - \frac{a_3^1}{a_1^1}x^3.$$

Этим исчерпываются все возможные варианты упрощенных систем и их решений для исходной системы (7.6)–(7.8).

Все проведенные выше преобразования удобно записывать в матричной форме, как это будет сделано в нижеследующих примерах.

Пример 7.5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^1 + x^2 - x^3 = -1; \\ x^1 - x^2 + 2x^3 = 0; \\ 4x^1 - x^2 + 4x^3 = -1. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right).$$

Для удобства дальнейших вычислений поменяем местами 1-ю и 2-ю строки, а затем выполним указанные элементарные преобразования:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right) \underset{S_4-4S_1}{\overset{S_2-2S_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right) \overset{S_3-S_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда найдем, что $\operatorname{rang} A = 3 \neq 0$ и $\operatorname{rang}\widetilde{A} = \operatorname{rang} A = 3$, т.е. система имеет единственное решение. Запишем систему, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{aligned} x^1 - x^2 + 2x^3 &= 0, \\ 3x^2 - 5x^3 &= -1, \\ x^3 &= 0. \end{aligned}$$

Проведя обратную подстановку, найдем единственное решение системы

$$\begin{aligned} &x^3 = 0, \\ &x^2 = \frac{1}{3}(-1 + 5x^3) = -\frac{1}{3}, \\ &x^1 = x^2 - 2x^3 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Тот же результат можно получить, воспользовавшись дополнительными элементарными преобразованиями:

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{S_1-2S_3}{\overset{S_2+5S_3}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{S_2/3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{S_1+S_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Следовательно, $x^1 = -1/3$, $x^2 = -1/3$, $x^3 = 0$.

Пример 7.6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^1 + x^2 - x^3 = -1; \\ x^1 - x^2 + 2x^3 = 0; \\ 4x^1 - x^2 + 3x^3 = -1. \end{cases}$$

Решение. Прежде всего отметим, что эта система отличается от системы, рассмотренной в предыдущем примере, только одним коэффициентом при неизвестной x^3 в третьем уравнении. Однако, как мы увидим далее, это кардинально меняет характер решения.

Действительно, запишем расширенную матрицу системы

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Проведем следующие элементарные преобразования:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \overset{S_1-S_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \underset{S_3-4S_1}{\overset{S_2-2S_1}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \end{array}\right) \overset{S_3-S_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{S_2/3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{5}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{S_1-S_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\dfrac{5}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Здесь $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A} = r = 2$, а $n = 3$, т.е. имеем случай 2б ($r < n$). Следовательно, данная система имеет бесконечное множество решений, зависящих от одной свободной переменной. Запишем систему (по той матрице, к какой приведена $\widetilde{A}$), перенеся столбец с x^3 в правую часть:

$$\begin{cases} x^1 = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\,x^3; \\ x^2 = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{3}\,x^3. \end{cases}$$

Здесь x^1 и x^2 — базисные неизвестные переменные, а x^3 может принимать произвольное значение C. Из второго уравнения системы определим x^2, а из первого уравнения x^1. Получим

$$x^1 = \frac{-1 - C}{3}, \quad x^2 = \frac{5C - 1}{3}.$$

Таким образом, множество решений системы можно записать в виде

$$\begin{cases} x^1 = -\dfrac{1 + C}{3}, \\ x^2 = \dfrac{5C - 1}{3}, \\ x^3 = C, \end{cases}$$

где C — произвольная постоянная.

Пример 7.7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^1 + x^2 - x^3 = -1; \\ x^1 - x^2 + 2x^3 = 0; \\ 4x^1 - x^2 + 3x^3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Прежде всего отметим, что эта система отличается от системы, рассмотренной в предыдущем примере, только свободным членом в третьем уравнении. Однако, как мы увидим далее, это существенно меняет структуру решения.

Выпишем расширенную матрицу системы

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

Для удобства дальнейших вычислений поменяем местами 1-ю и 2-ю строки, а затем выполним указанные элементарные преобразования:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \underset{S_3-4S_1}{\overset{S_2-2S_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \end{array}\right) \overset{S_3-S_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{S_3/3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что система несовместна, поскольку $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang} \widetilde{A} = 3$, т.е. $\operatorname{rang} \widetilde{A} \neq \operatorname{rang} A$. Впрочем, к этому же результату можно было прийти, не вычисляя ранги матриц A и $\widetilde{A}$, а просто по наличию несовместной строки

$$(0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 1)$$

в упрощенной расширенной матрице.

8. Произвольные системы линейных уравнений

Рассмотренные выше методы применимы к тем системам линейных уравнений, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных. Вернемся теперь к системам, в которых число уравнений не совпадает с числом неизвестных, т.е. $m \neq n$:

$$\begin{array}{l} a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \ldots + a^1_n x^n = b^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^m_1 x^1 + a^m_2 x^2 + \ldots + a^m_n x^n = b^m. \end{array} \tag{8.1}$$

Поскольку матрица системы A является прямоугольной матрицей размера $m \times n$, то матричный метод и метод Крамера в этом случае неприменимы. Поэтому системы линейных уравнений общего вида (8.1) решаются методом Гаусса.

Напомним, что суть метода заключается в том, чтобы путем элементарных преобразований из всех уравнений системы,кроме первого, исключить неизвестное x^1; далее из всех уравнений, кроме первого и второго, исключить неизвестное x^2 и т.д. На практике все эти действия, как это показано в примерах 7.5–7.7, удобнее проводить не с уравнениями системы, а со строками расширенной матрицы.

При проведении элементарных преобразований происходит не только упрощение расширенной матрицы, но и одновременно решается вопрос о совместности системы и количестве решений. Действительно, как уже упоминалось, если в процессе элементарных преобразований появляется противоречивая строка, например

$$(0\ \ 0\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0\ \mid\ 1),$$

это означает, что система несовместна.

Если же в процессе упрощения появляются нулевые строки

$$(0\ \ 0\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0\ \mid\ 0),$$

это означает уменьшение числа линейно независимых уравнений на число таких строк.

Таким образом, если в результате элементарных преобразований матрица A системы приводится к треугольному виду, то система имеет единственное решение. Если же матрица A приводится к трапецеидальному виду, то система является неопределенной. При этом число базисных неизвестных определяется рангом r расширенной матрицы, а число свободных — разностью $n-r$.

На заключительном этапе базисные неизвестные обратным преобразованием находятся через свободные (параметрические) неизвестные. Эту зависимость, в которой неизвестные принимают всевозможные произвольные значения, называют еще *общим решением системы.* Если свободные неизвестные зафиксировать, придав им некоторые частные значения, то общее решение переходит в так называемое *частное решение* неопределенной системы.

Пример 8.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^1+2x^2+5x^3=-9; \\ x^1-x^2+3x^3=2; \\ 3x^1-6x^2-x^3=25; \\ x^1-x^2+x^3=4. \end{cases}$$

Решение. Для трех неизвестных x^1, x^2, x^3 имеем систему из четырех уравнений. Выпишем расширенную матрицу системы и проведем указанные элементарные преобразования:

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 22 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{S_3-3S_1 \\ S_4-S_1}}{\overset{S_2-S_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \\ 0 & -3 & -4 & 13 \end{array}\right) \underset{S_4-S_2}{\overset{S_3-4S_2}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \underset{-S_4/2}{\overset{-S_3/8}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{S_4-S_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что одно уравнение является линейной комбинацией первых трех. Кроме того, матрицу A системы (часть $\widetilde{A}$) удалось привести к треугольному виду, что означает совместность и определенность системы, т.е. система имеет единственное решение. Это решение находится обратным преобразованием (ходом) метода Гаусса. Выпишем систему уравнений, соответствующую упрощенной расширенной матрице:

$$x^1+2x^2+5x^3=-9,$$

$$-3x^2 - 2x^3 = 11,$$
$$x^3 = -1.$$

Из третьего уравнения следует, что $x^3 = -1$, из второго —

$$-3x^2 = 11 + 2x^3 = 11 - 2 = 9, \qquad x^2 = -3,$$

а из первого

$$x^1 = -9 - 2x^2 - 5x^3 = -9 + 6 + 5 = 2, \qquad x^1 = 2.$$

Таким образом, $x^1 = 2$, $x^2 = -3$, $x^3 = -1$.

Это решение иногда записывают в матричной форме:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Подчеркнем, что мы нигде не воспользовались теоремой Кронекера–Капелли, хотя результат полностью ей соответствует, поскольку $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A} = 3$, т.е. система имеет единственное решение.

Пример 8.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^1 + x^2 - 2x^3 - x^4 + x^5 = 1; \\ 3x^1 - x^2 + x^3 + 4x^4 + 3x^5 = 4; \\ x^1 + 5x^2 - 9x^3 - 8x^4 + x^5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и проведем указанные элементарные преобразования:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{S_3 - S_1}{\overset{S_2 - 3S_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{S_3 + S_2}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что система совместна и не определена. Уже на этом этапе, выбрав в качестве базисных неизвестных x^1 и x^2, обратным преобразованием можно найти их зависимость от свободных переменных x^3, x^4, x^5. Однако иногда удобнее базисный минор привести к диагональному виду, что упрощает проведение обратных преобразований. Действительно, продолжим элементарные преобразования:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{S_1 + S_2/4}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & 1 & 5/4 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{-S_2/4}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & 1 & 5/4 \\ 0 & 1 & -7/4 & -7/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выпишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$x^1 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + x^5 = \frac{5}{4},$$

$$x^2 - \frac{7}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^4 = -\frac{1}{4}.$$

Отсюда базисные неизвестные x^1 и x^2 находятся очень просто:

$$x^1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^4 - x^5,$$
$$x^2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x^3 + \frac{7}{4}x^4.$$

В результате общее решение можно записать как

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^4 - x^5 \\ -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x^3 + \frac{7}{4}x^4 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем нам потребуется еще одна форма представления общего решения, а именно:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} -1/4 \\ 7/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x^4 \begin{pmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если свободные неизвестные x^3, x^4, x^5 считать для удобства произвольными постоянными C_1, C_2, C_3 соответственно, то общее решение примет вид

$$X = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1/4 \\ 7/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Положив, например, $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, получим частное решение

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8.3}$$

а при $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = 2$ — другое частное решение

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/4 \\ 13/4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

и т.д.

Пример 8.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^1+x^2-x^4+x^5=1;\\ 2x^1+x^3+3x^4-x^5=2;\\ -2x^2+x^3+5x^4-3x^5=0;\\ x^1-3x^2+2x^3+9x^4-5x^5=1. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и проведем указанные элементарные преобразования:

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&1&0&-1&1&1\\ 2&0&1&3&-1&2\\ 0&-2&1&5&-3&0\\ 1&-3&2&9&-5&1 \end{array}\right)\underset{S_4-S_1}{\overset{S_2-2S_1}{\sim}}\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&1&0&-1&1&1\\ 0&-2&1&5&-3&0\\ 0&-2&1&5&-3&0\\ 0&-4&2&10&-6&0 \end{array}\right)\underset{\substack{S_3-S_2\\ S_4-2S_2}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&1&0&-1&1&1\\ 0&-2&1&5&-3&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что система совместна и не определена. Выбрав базисными неизвестными x^1 и x^2, обратным преобразованием можно найти общее решение. Однако обратим внимание, что в данном случае в качестве базовых удобнее выбрать неизвестные x^1 и x^3. При таком выборе сразу получим общее решение в виде

$$\begin{aligned} x^1&=1-x^2+x^4-x^5,\\ x^3&=2x^2-5x^4+3x^5, \end{aligned}$$

где свободными неизвестными являются x^2, x^4, x^5. При необходимости это общее решение можно записать в виде (8.2).

Пример 8.4. Систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x^1+x^2-x^4+x^5=1;\\ 2x^1+x^3+3x^4-x^5=2;\\ -2x^2+x^3+5x^4-3x^5=0;\\ x^1-3x^2+2x^3+9x^4-5x^5=\lambda \end{cases}$$

исследовать на совместность.

Решение. Число уравнений меньше числа неизвестных. Выясним, при каких значениях параметра λ система совместна. Запишем расширенную матрицу системы и проведем указанные элементарные преобразования:

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&1&0&-1&1&1\\ 2&0&1&3&-1&2\\ 0&-2&1&5&-3&0\\ 1&-3&2&9&-5&\lambda \end{array}\right)\underset{S_4-S_1}{\overset{S_2-2S_1}{\sim}}\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&1&0&-1&1&1\\ 0&-2&1&5&-3&0\\ 0&-2&1&5&-3&0\\ 0&-4&2&10&-6&\lambda-1 \end{array}\right)\underset{\substack{S_3-S_2\\ S_4-2S_2}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&1&0&-1&1&1\\ 0&-2&1&5&-3&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda-1 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что система совместна только тогда, когда $\lambda - 1 = 0$, т.е. при $\lambda = 1$. В этом случае $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A} = 2$ и общее решение системы получено в предыдущем примере.

Для всех других λ, т.е. $\lambda \neq 1$ система несовместна, поскольку в эквивалентной расширенной матрице присутствует противоречивая строка

$$(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad \lambda - 1)\,,$$

что соответствует неравенству рангов: $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang} \widetilde{A} = 3$, $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} \widetilde{A}$.

Пример 8.5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 24x^1 + 14x^2 + 30x^3 + 40x^4 + 41x^5 = 28; \\ 36x^1 + 21x^2 + 45x^3 + 61x^4 + 62x^5 = 43; \\ 48x^1 + 28x^2 + 60x^3 + 82x^4 + 83x^5 = 58; \\ 60x^1 + 35x^2 + 75x^3 + 99x^4 + 102x^5 = 69. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и проведем указанные элементарные преобразования:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 24 & 14 & 30 & 40 & 41 & 28 \\ 36 & 21 & 45 & 61 & 62 & 43 \\ 48 & 28 & 60 & 82 & 83 & 58 \\ 60 & 35 & 75 & 99 & 102 & 69 \end{array}\right) \underset{\substack{S_3-2S_1 \\ S_4-S_1-S_2}}{\overset{S_2-S_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 24 & 14 & 30 & 40 & 41 & 28 \\ 12 & 7 & 15 & 21 & 21 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \overset{S_1-2S_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 28 \\ 12 & 7 & 15 & 21 & 21 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{S_3+S_1 \\ S_4-S_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 12 & 7 & 15 & 21 & 21 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выпишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{aligned} 12x^1 + 7x^2 + 15x^3 + 21x^4 + 21x^5 &= 15, \\ 2x^4 + x^5 &= 2. \end{aligned}$$

В качестве базисных неизвестных выберем переменные x^1 и x^4. Выразив x^4 из второго уравнения:

$$x^4 = 1 - \frac{1}{2}x^5$$

и подставив его в первое, найдем

$$12x^1 + 7x^2 + 15x^3 + 21\Big(1 - \frac{1}{2}x^5\Big) + 21x^5 = 15.$$

Отсюда

$$x^1 = -\frac{1}{2} - \frac{7}{12}x^2 - \frac{5}{4}x^3 - \frac{7}{8}x^5.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} &x^1 = -\frac{1}{2} - \frac{7}{12}x^2 - \frac{5}{4}x^3 - \frac{7}{8}x^5, \\ &x^4 = 1 - \frac{1}{2}x^5, \end{aligned}$$

что при необходимости можно записать в виде (8.2).

9. Однородные системы линейных уравнений

Рассмотрим теперь системы линейных однородных уравнений

$$AX = 0, \tag{9.1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

Все предыдущие результаты, полученные для систем линейных уравнений, разумеется, верны и для однородных систем. Из теоремы Кронекера–Капелли следует, что однородная система всегда совместна, поскольку добавление столбца из нулей в расширенную матрицу системы не может повысить ее ранг. Впрочем, это видно и непосредственно — система (9.1) заведомо имеет нулевое решение

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое еще называют *тривиальным.*

Очевидно, что при решении однородных систем наибольший интерес представляет задача о нахождении нетривиальных решений, а такие решения могут иметь только неопределенные системы. Если однородная система — определенная, то ее единственным решением является тривиальное. Условия, при которых однородная система (9.1) является определенной или неопределенной, дает следующая теорема.

Теорема 9.1. *Для того чтобы система* (9.1) *имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы A был меньше числа неизвестных, т.е.* $\operatorname{rang} A < n$.

Доказательство. Как и раньше, обозначим $\operatorname{rang} A = r$. Как следует из теоремы 7.1, если $r = n$, то система (9.1) имеет единственное и, значит, только нулевое решение, вытекающее, например, из (7.4)

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если же $r < n$, то система (9.1) является неопределенной, поскольку несовместной она быть не может, и, значит, она имеет бесчисленное множество решений, в том числе и нетривиальных.

Следствие 9.1.1. *Система n линейных однородных уравнений с n неизвестными тогда и только тогда имеет нетривиальные решения, когда определитель этой системы равен нулю, т.е.* $\det A = 0$.

В самом деле, равенство нулю этого определителя означает, что $\operatorname{rang} A < n$ и система является неопределенной и, следовательно, имеет нетривиальные решения.

Следствие 9.1.2. *Если в системе однородных уравнений* (9.1) *число уравнений меньше числа неизвестных, то система обязательно имеет нетривиальные решения.*

Действительно, в этом случае $\operatorname{rang} A$ не может быть равным числу неизвестных, откуда и вытекает справедливость данного утверждения.

Однородная система (9.1) обладает одним очень важным свойством, которое не имеет места для неоднородных систем уравнений.

Теорема 9.2. *Если $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — решения однородной системы* (9.1), *то всякая линейная комбинация*

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_kX_k \tag{9.3}$$

также будет решением этой системы.

Доказательство. Согласно условию теоремы,

$$AX_1 = 0, \qquad AX_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad AX_n = 0. \tag{9.4}$$

Тогда с учетом свойств матриц получим

$$AX = A(C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n) = C_1AX_1 + C_2AX_2 + \ldots + C_nAX_n = 0,$$

что и требовалось доказать.

В развитие этой теоремы рассмотрим вопрос о существовании такой линейно независимой совокупности решений однородной системы (9.1), через которую выражались бы все остальные ее решения.

Теорема 9.3. *Если ранг матрицы A однородной системы* (9.1) *равен r, т.е. $\operatorname{rang} A = r$, то система имеет $n - r$ линейно независимых решений.*

Доказательство. Если $\operatorname{rang} A = r$, то система (9.1) имеет r линейно независимых уравнений. Выбрав в качестве базисных неизвестных $x^1, x^2, \ldots, x^r$, найдем их выражение через свободные неизвестные $x^{r+1}, x^{r+2}, \ldots, x^n$:

$$\begin{array}{l} a_1^1x^1 + \ldots + a_r^1x^r = -a_{r+1}^1 - \ldots - a_n^1x^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^rx^1 + \ldots + a_r^rx^r = -a_{r+1}^rx^{r+1} - \ldots - a_n^rx^n. \end{array} \tag{9.5}$$

Придадим теперь свободным неизвестным следующие $(n - r)$ наборы значений:

$$\begin{array}{lllll} x^{r+1} = 1, & x^{r+2} = 0, & x^{r+3} = 0, & \ldots, & x^n = 0, \\ x^{r+1} = 0, & x^{r+2} = 1, & x^{r+3} = 0, & \ldots, & x^n = 0, \\ x^{r+1} = 0, & x^{r+2} = 0, & x^{r+3} = 1, & \ldots, & x^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ x^{r+1} = 0, & x^{r+2} = 0, & x^{r+3} = 0, & \ldots, & x^n = 1. \end{array}$$

Для каждого набора значений найдем, например, методом Крамера единственное решение каждой «неоднородной» системы (9.5). Полученные решения запишем в виде

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ \ldots \\ x_1^r \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ \ldots \\ x_2^r \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_{n-r}^1 \\ \ldots \\ x_{n-r}^r \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9.6}$$

Покажем, что эти решения линейно независимы. Из столбцов (9.6) составим матрицу

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{n-r}^1 \\ \hdotsfor{4} \\ x_1^r & x_2^r & \dots & x_{n-r}^r \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Минор M порядка $(n-r)$ этой матрицы, расположенный в $(n-r)$ последних строках, равен единице. Это означает, что ранг этой матрицы равен $(n-r)$, и, следовательно, $(n-r)$ столбцов из (9.6) линейно независимы, что и требовалось доказать.

♦ Совокупность решений (9.6) называется *нормальной фундаментальной системой решений* однородной системы (9.1).

Из нормальной системы (9.6), согласно теореме 9.2, можно составить другие линейно независимые системы решений.

♦ Любая система из $(n-r)$ линейно независимых решений (9.1) называется ее *фундаментальной системой.*

Теорема 9.4. *Если $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ — нормальная фундаментальная система однородной системы* (9.1)*, то любое решение X этой системы представляет собой линейную комбинацию фундаментальных решений, т.е.*

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_{n-r}X_{n-r}. \tag{9.7}$$

Доказательство. Пусть

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ \dots \\ x_1^r \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_{n-r}^1 \\ \dots \\ x_{n-r}^r \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линейную комбинацию

$$X_0 = X - x^{r+1}X_1 - x^{r+2}X_2 - \dots - x^nX_{n-r} \tag{9.8}$$

или в развернутой записи

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \dots \\ x_0^r \\ x_0^{r+1} \\ \dots \\ x_0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} - x^{r+1} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ \dots \\ x_1^r \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} - \dots - x^n \begin{pmatrix} x_{n-r}^1 \\ \dots \\ x_{n-r}^r \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_0^1 \\ \dots \\ \tilde{x}_0^r \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{x}_0^j = x^j - \sum_{l=1}^{n-r} x^{r+l}x_l^j.$$

Из этого соотношения следует, что последние $(n-r)$ элементов линейной комбинации X_0 равны нулю. Но X_0, будучи линейной комбинацией решений (9.1), согласно теореме 9.2, сама будет решением этой системы и, в частности, будет удовлетворять системе (9.5). Если теперь принять во внимание, что свободные неизвестные X_0 как решения равны нулю, то из (9.5) очевидно, что и значения базисных неизвестных $\tilde{x}_0^j$ будут равны нулю. Это означает, что $X_0 = 0$ и, в свою очередь, что разность (9.8) также будет равна нулю:

$$X - x^{r+1}X_1 - x^{r+2}X_2 - \ldots - x_n X_{n-r} = 0.$$

Следовательно, любое решение X будет линейной комбинацией фундаментальной системы, т.е.

$$X = x_{r+1}X_1 + x_{r+2}X_2 + \ldots + x^n X_{n-r}.$$

Переобозначив $x^{r+1}, x^{r+2}, \ldots, x^n$ через $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$, приходим к (9.7), что и требовалось доказать.

Следствие 9.4.1. *Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — любая фундаменальная система решений однородной системы* (9.1)*, то ее общее решение X представляет собой линейную комбинацию*

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_{n-r}X_{n-r} \tag{9.9}$$

с произвольными постоянными $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$.

Действительно, каждое X_i из заданной фундаментальной системы само является линейной комбинацией нормальной фундаментальной системы. Подставив эти комбинации в (9.7) и переобозначив произвольные постоянные C_i, придем к (9.9), что и требовалось доказать.

Пример 9.1. Найти фундаментальную систему и общее решение системы уравнений

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 + 5x^3 &= 0,\\ x^1 - x^2 + 3x^3 &= 0,\\ 3x^1 - 6x^2 - x^3 &= 0,\\ x^1 - x^2 + x^3 &= 0. \end{aligned}$$

Решение. Для однородных систем понятие расширенной матрицы $\widetilde{A}$ теряет смысл, так как она не несет дополнительной информации. Поэтому элементарные преобразования удобнее проводить с матрицей A системы, а не с матрицей $\widetilde{A}$. Выпишем матрицу системы и проделаем указанные элементарные преобразования:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5\\ 1 & -1 & 3\\ 3 & -6 & -1\\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{S_3-3S_1\\ S_4-S_1}}{\overset{S_2-S_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & -12 & -16\\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{S_3-4S_2\\ S_4-S_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & 0 & -8\\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{-S_3/8\\ -S_4/2}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{S_4-S_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что минор 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

отличен от нуля. Следовательно, $\operatorname{rang} A = 3$. Поскольку ранг матрицы A равен числу неизвестных, то система имеет только тривиальное решение

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 9.2. Определить значение параметра λ, при котором система имеет нетривиальные решения, и найти эти решения

$$\begin{gathered} x^1 + \lambda x^2 + 2x^3 = 0, \\ 4x^1 - x^2 + 7x^3 = 0, \\ 2x^1 + x^2 + 3x^3 = 0. \end{gathered}$$

Решение. У рассматриваемой системы число уравнений равно числу неизвестных, т.е. матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{9.10}$$

является квадратной. Согласно следствию 9.1.1, система имеет нетривиальное решение, если $\det A = 0$. Вычислив определитель матрицы (9.10) и приравняв его к нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\lambda + 2 = 0,$$

найдем $\lambda = -1$. Таким образом, исходная система имеет нетривиальное решение при $\lambda = -1$. Подставив $\lambda = -1$ в (9.10) и проделав указанные элементарные преобразования, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{S_3+S_1}{\overset{S_2-S_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \underset{S_3-S_1}{\overset{S_1-S_2/3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rang} A = 2 < 3$, следовательно, система имеет нетривиальное решение. Выбрав в качестве базисных неизвестных x^1 и x^2, найдем

$$x^2 = \frac{1}{3}x^3, \qquad x^1 = -\frac{5}{3}x^3,$$

т.е. решение системы имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} -5x^3/3 \\ x^3/3 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^3 \begin{pmatrix} -5/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Считая x^3 произвольной постоянной C, можем записать

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -5/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9.11}$$

Заметим, что здесь фундаментальная система состоит из одного решения

$$X_1 = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. общее решение можно записать как

$$X = CX_1,$$

где C — произвольная постоянная.

Пример 9.3. Найти фундаментальную систему и общее решение системы уравнений

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 - 2x^3 - x^4 + x^5 &= 0, \\ 3x^1 - x^2 + 4x^3 + 4x^4 + 3x^5 &= 0, \\ x^1 + 5x^2 - 9x^3 - 8x^4 + x^5 &= 0. \end{aligned}$$

Решение. Здесь число уравнений меньше числа неизвестных, следовательно, система имеет нетривиальное решение. Выпишем матрицу системы и проделаем указанные элементарные преобразования:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{S_2-3S_1 \\ S_3-S_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -7 & 0 \end{pmatrix} \overset{S_1+S_2/4}{\underset{S_3+S_1}{\sim}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{-S_2/4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1 & 7/4 & 7/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rang} A = 2 < 5$. Выберем в качестве базисных неизвестных x^1 и x^2, тогда

$$\begin{aligned} x^1 &= -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^4 - x^5, \\ x^2 &= \frac{7}{4}x^3 + \frac{7}{4}x^4, \end{aligned}$$

и решение запишется в виде

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^3/4 - 3x^4/4 - x^5 \\ 7x^3/4 + 7x^4/4 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix}.$$

Это решение можно представить через фундаментальную систему решений, которую можно найти, положив $x^3 = 1$, $x^4 = x^5 = 0$; $x^4 = 1$, $x^3 = x^5 = 0$; $x^5 = 1$, $x^3 = x^4 = 0$. В результате получим следующую нормальную фундаментальную систему решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 7/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9.12}$$

С учетом (9.12) общее решение системы можно записать в виде линейной комбинации

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

10. Связь между решениями однородных и неоднородных систем уравнений

Вернемся к неоднородной системе линейных уравнений

$$AX = B, \tag{10.1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \dots \\ b^m \end{pmatrix}. \tag{10.2}$$

♦ Система линейных однородных уравнений

$$AX = 0 \tag{10.3}$$

с матрицей A из системы (10.1) называется *приведенной системой* для системы (10.1).

Оказывается, между решениями систем (10.1) и (10.3) существует тесная связь.

Теорема 10.1. *Сумма любого решения неоднородной системы* (10.1) *с любым решением ее приведенной системы* (10.3) *также является решением неоднородной системы* (10.1).

Доказательство. Пусть X — решение системы (10.1), а X_0 — решение системы (10.3). Обозначим через $\overline{X}$ их сумму

$$\overline{X} = X + X_0. \tag{10.4}$$

Подставив (10.4) в (10.1), найдем

$$A\overline{X} = A(X + X_0) = AX + AX_0,$$

откуда с учетом (10.1) и (10.3) имеем

$$AX = B + 0 = B,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 10.2. *Разность двух любых решений неоднородной системы* (10.1) *является решением ее приведенной системы* (10.3).

Доказательство. Пусть X_1 и X_2 удовлетворяют уравнению (10.1), т.е.

$$\begin{aligned} AX_1 &= B, \\ AX_2 &= B. \end{aligned} \tag{10.5}$$

Вычтя из первого уравнения (10.5) второе, найдем

$$A(X_1 - X_2) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 10.3 (о структуре общего решения неоднородной системы). *Если $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ — любая фундаментальная система приведенной системы* (10.3)*, а $\widetilde{X}$ — любое частное решение неоднородной системы* (10.3)*, то сумма*

$$X = \widetilde{X} + C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_{n-r}X_{n-r} \qquad (10.6)$$

при любых произвольных постоянных C_j, $j = \overline{1, n-r}$, является общим решением неоднородной системы (10.1).

Доказательство теоремы следует непосредственно из теорем 10.1 и 10.2 с учетом того, что линейная комбинация

$$C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_{n-r}X_{n-r}$$

определяет общее решение приведенной системы (10.3).

Пример 10.1. Найти общее решение системы

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 - 2x^3 - x^4 + x^5 &= 1,\\ 3x^1 - x^2 + x^3 + 4x^4 + 3x^5 &= 4,\\ x^1 + 5x^2 - 9x^3 - 8x^4 + x^5 &= 0, \end{aligned} \qquad (10.7)$$

пользуясь фундаментальным решением приведенной системы.

Решение. Выпишем приведенную систему неоднородной системы (10.7):

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 - 2x^3 - x^4 + x^5 &= 0,\\ 3x^1 - x^2 + x^3 + 4x^4 + 3x^5 &= 0,\\ x^1 + 5x^2 - 9x^3 - 8x^4 + x^5 &= 0. \end{aligned}$$

Как следует из результатов примера 9.3, ее нормальная фундаментальная система имеет вид (9.12):

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1/4\\ 7/4\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -3/4\\ 7/4\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение (10.7) $\widetilde{X}$ найдем, положив, например, $x^3 = x^4 = x^5 = 0$. Тогда из (10.7) следует

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 &= 1,\\ 3x^1 - x^2 &= 4,\\ x^1 + 5x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Выпишем расширенную матрицу этой системы и проделаем указанные элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 4\\ 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \underset{S_3 - S_1}{\overset{S_2 - 3S_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 4 & -1 \end{array}\right) \underset{S_3 + S_2}{\overset{S_1 + S_2/4}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5/4 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{-S_2/4}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5/4 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что $x^1 = 5/4$, $x^2 = -1/4$, и, стало быть, частное решение $\widetilde{X}$ имеет вид

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10.8}$$

Теперь, согласно теореме 10.3, общее решение системы (10.7) запишется как линейная комбинация

$$X = \widetilde{X} + C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$

или в развернутой форме

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1/4 \\ 7/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Отметим, что такой же результат получен в примере 8.2, но методом Гаусса.

Как было показано выше, совместность неоднородной системы (10.1) устанавливается теоремой Кронекера–Капелли. Эта теорема является наиболее распространенным критерием совместности, но не единственным. Ниже мы сформулируем еще один критерий совместности системы (10.1). Для этого наряду с приведенной однородной системой (10.3) нам потребуется еще одна система, называемая *сопряженной однородной* системой системы (10.1).

Транспонируем матрицу A системы (10.1) и рассмотрим систему n уравнений с m неизвестными y^j, $j = \overline{1, m}$,

$$\begin{array}{l} a_1^1y^1 + a_1^2y^2 + \ldots + a_1^my^m = 0, \\ a_2^1y^1 + a_2^2y^2 + \ldots + a_2^my^m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n^1y^1 + a_n^2y^2 + \ldots + a_n^my^m = 0. \end{array}$$

Эту систему можно записать в матричном виде:

$$A^{\intercal}Y = 0, \tag{10.9}$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \ldots \\ y^m \end{pmatrix}.$$

♦ Система (10.9) называется *сопряженной однородной* системой неоднородной системы (9.1).

Теорема 10.4 (Фредгольма). *Для того чтобы неоднородная система линейных уравнений* (10.1) *была совместна, необходимо и достаточно, чтобы каждое решение сопряженной однородной системы* (10.9) *удовлетворяло условию*

$$B^{\intercal}Y = b^1y^1 + b^2y^2 + \ldots + b^my^m = 0, \tag{10.10}$$

где B — столбец из свободных членов системы (10.1).

Доказательство. 1. Достаточность. Пусть условие (10.10) выполняется для всех решений сопряженной системы (10.9). Тогда система

$$\begin{array}{l} a_1^1y^1 + \ldots + a_1^my^m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n^1y^1 + \ldots + a_n^my^m = 0, \\ b^1y^1 + \ldots + b^my^m = 1 \end{array} \tag{10.11}$$

несовместна, поскольку ранг расширенной матрицы системы (10.11) будет больше ранга матрицы этой системы, т.е.

$$\operatorname{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} a_1^1 & \ldots & a_1^m & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^m & 0 \\ b^1 & \ldots & b^m & 1 \end{array}\right) > \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^m \\ b^1 & \ldots & b^m \end{pmatrix}. \tag{10.12}$$

Так как при транспонировании матрицы ее ранг не меняется, то из неравенства (10.12) следует еще одно:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \widetilde{A} \\ ---- \\ 0\ \ldots\ 0\ 1 \end{pmatrix} > \operatorname{rang}\widetilde{A},$$

где

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1^1 & \ldots & a_n^1 & b^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & \ldots & a_n^m & b^m \end{array}\right)$$

— расширенная матрица системы (10.1).

Из последнего неравенства следует, что при упрощении расширенной матрицы $\widetilde{A}$ элементарными преобразованиями строка $(0 \ \ldots \ 1)$ никоим образом не может появиться в упрощенной расширенной матрице, поскольку эта строка не является линейной комбинацией строк расширенной матрицы $\widetilde{A}$. Таким образом, система (10.1) совместна.

2. Необходимость. Пусть условие (10.10) не выполняется для всех решений сопряженной системы (10.9), т.е.

$$B^{\intercal}Y = b^1y^1 + \ldots + b^my^m = \lambda \neq 0. \tag{10.13}$$

Транспонируем уравнение (10.1):

$$(AX)^{\intercal} = B^{\intercal}.$$

С учетом того, что $(AX)^{\intercal} = X^{\intercal}A^{\intercal}$, последнее уравнение перепишется как

$$X^{\intercal}A^{\intercal} = B^{\intercal}.$$

Умножив это уравнение на столбец Y, получим

$$XA^{\intercal}Y = B^{\intercal}Y.$$

Отсюда с учетом (10.9) и (10.13) придем к противоречию

$$0 = \lambda,$$

которое и доказывает вторую часть теоремы.

Пример 10.2. С помощью теоремы Фредгольма исследовать на совместность систему

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 - 2x^3 - x^4 + x^5 &= 1, \\ 3x^1 - x^2 + x^3 + 4x^4 + 3x^5 &= 4, \\ x^1 + 5x^2 - 9x^3 - 8x^4 + x^5 &= 0. \end{aligned}$$

Решение. Поскольку эта система была рассмотрена в примере 10.1, то ответ известен: система совместна. Тем не менее, убедимся в этом, воспользовавшись теоремой Фредгольма. Для этого выпишем сопряженную однородную систему

$$\begin{aligned} y^1 + 3y^2 + y^3 &= 0, \\ y^1 - y^2 + 5y^3 &= 0, \\ -2y^1 + y^2 - 9y^3 &= 0, \\ -y^1 + 4y^2 - 8y^3 &= 0, \\ y^1 + 3y^2 + y^3 &= 0. \end{aligned}$$

Над матрицей сопряженной однородной системы проделаем указанные элементарные преобразования:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -9 \\ -1 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{S_4+S_1 \\ S_5-S_1}}{\overset{\substack{S_2-S_1 \\ S_3+2S_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{S_4+7S_2/4}{\overset{\substack{S_1+3S_2/4 \\ S_3+7S_2/4}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-S_2/4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выбрав в качестве базисных неизвестные y^1 и y^2, получим $y^1 = -4y^3$, $y^2 = y^3$. Отсюда

$$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y^3 \\ y^3 \\ y^3 \end{pmatrix} = y^3 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для проверки условия (10.10) выпишем столбец из свободных членов исследуемой системы

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и вычислим произведение

$$B^{\intercal}Y = (1 \quad 4 \quad 0)\, y^3 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y^3\, (1 \quad 4 \quad 0) \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y^3(-4 + 4 = 0).$$

Таким образом, условие (10.10) выполнено и исследуемая система, как и следовало ожидать, совместна.

Использование теоремы Фредгольма для практических приложений неэффективно, поскольку связано с решением сопряженной системы линейных алгебраических уравнений, что фактически эквивалентно решению исходной системы. Тем не менее, она имеет существенное теоретическое значение, как это будет видно из следующего раздела.

11. Матричные уравнения

Системы линейных уравнений можно решать с помощью обратной матрицы, если исходную систему записать в матричном виде

$$AX = B, \tag{11.1}$$

где A — квадратная матрица порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}, \tag{11.2}$$

а X и B — матрицы-столбцы, содержащие n строк:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \dots \\ b^n \end{pmatrix}. \tag{11.3}$$

Для невырожденной матрицы ($\det A \neq 0$) решение системы записывается как

$$X = A^{-1}B. \tag{11.4}$$

Предположим теперь, что нам требуется решить сразу две системы вида (11.1) с одной матрицей A:

$$AX_1 = B_1, \qquad AX_2 = B_2. \tag{11.5}$$

Понятно, что решение каждой из них можно найти по формуле (11.4). Можно, однако, две системы (11.5) записать одним матричным уравнением вида (11.1), если вместо (11.3) ввести двухстолбцовые матрицы

$$X = (X_1 X_2) = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \\ \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n \end{pmatrix}, \qquad B = (B_1 B_2) = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \\ \dots & \dots \\ b_1^n & b_2^n \end{pmatrix}. \tag{11.6}$$

В этом случае оба решения (11.5) найдутся сразу из (11.4), где матрицы X и B будут определяться соотношениями (11.6).

Если вместо двух систем (11.5) рассмотреть общий случай: l систем с одной матрицей A

$$AX_1 = B_1, \quad AX_2 = B_2, \quad \dots, \quad AX_l = B_l, \tag{11.7}$$

то эти системы также можно объединить матричным уравнением вида (11.1), в котором матрицы A и B будут содержать l столбцов, т.е.

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_l^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & \dots & x_l^n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_l^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ b_1^n & \dots & b_l^n, \end{pmatrix}, \tag{11.8}$$

и решение которого также будет определяться равенством (11.4), но с матрицами (11.8).

Заметим, что для матричного уравнения (11.1) с матрицами X и B вида (11.8) возможна и другая интерпретация, в которой неизвестная матрица X рассматривается как единый объект.

По аналогии с матричным уравнением (11.1), которое называют *правосторонним* по виду произведения AX, можно рассмотреть *левостороннее* матричное уравнение вида

$$XA = B. \tag{11.9}$$

Уравнение (11.9), вообще говоря, операцией транспонирования легко сводится к правостороннему уравнению вида (11.1). Действительно, из (11.9) запишем

$$(XA)^{\intercal} = B^{\intercal}.$$

С учетом

$$(XA)^{\intercal} = A^{\intercal}X^{\intercal}$$

получим матричное уравнение вида (11.1)

$$A^{\intercal}X^{\intercal} = B^{\intercal}. \tag{11.10}$$

Теперь, согласно (11.4), решение уравнения (11.10) определяется формулой

$$X^{\intercal} = (A^{\intercal})^{-1}B^{\intercal},$$

из которой в силу свойств обратной матрицы найдем

$$X^{\intercal} = (A^{-1})^{\intercal}B^{\intercal} = (BA^{-1})^{\intercal}$$

или

$$X = BA^{-1}. \tag{11.11}$$

Впрочем, это решение можно было получить сразу из (11.9) умножением его на A^{-1} справа:

$$XAA^{-1} = X\mathbb{I} = X = BA^{-1}.$$

Поэтому, хотя уравнение (11.9) и сводится к уравнению (11.1), будем рассматривать его как самостоятельный тип уравнения с решением (11.11).

Наряду с правосторонними и левосторонними матричными уравнениями можно рассматривать уравнения вида

$$AXC = B, \tag{11.12}$$

где A, B, C — только квадратные матрицы порядка n. Решение этого уравнения, согласно (11.4) и (11.11), запишется как

$$X = A^{-1}BC^{-1}. \tag{11.13}$$

Пример 11.1. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Решение этого уравнения задается формулой (11.4). Найдем матрицу A^{-1}, вычислив предварительно

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, обратная матрица существует. Найдем

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а затем

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix},$$

откуда

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix},$$

и, следовательно,

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 0 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}. \qquad (11.14)$$

Напомним, что первый столбец решения можно рассматривать как решение системы

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а второй – как решение системы

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Формула (11.4) удобна тем, что позволяет наглядно отслеживать изменение решения системы в зависимости от изменения неоднородности, т.е. правой части системы линейных уравнений.

Пример 11.2. Решить матричное уравнение

$$X\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 1).$$

Решение. *1-й способ.* Решение уравнения определяется формулой (11.11). Поскольку для матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

обратная матрица найдена в предыдущем примере:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix},$$

то

$$X = (1\ 2\ 1)A^{-1} = (1\ 2\ 1)\Big(-\frac{1}{4}\Big)\begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}(5\ \ -14\ 11) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{14}{4} & -\frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

2-й способ. Транспонируем исходное уравнение:

$$(XA)^{\intercal} = A^{\intercal}X^{\intercal} = B^{\intercal} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$X^{\intercal} = (A^{\intercal})^{-1}B^{\intercal} = (A^{-1})^{\intercal}B^{\intercal} =$$
$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -10 & 2 & -8 \\ 9 & -3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/4 \\ 14/4 \\ -11/4 \end{pmatrix}.$$

После транспонирования полученной матрицы приходим к результату, полученному первым способом.

Пример 11.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A уравнения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

то обратная матрица не существует. Чтобы найти матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

выпишем две системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} x_1^1 + 4x_2^1 = 3, \\ 2x_1^1 + 8x_2^1 = 6, \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} x_1^2 + 4x_2^2 = 2, \\ 2x_1^2 + 8x_2^2 = 5 \end{matrix}$$

и их расширенные матрицы

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \end{array}\right),$$

которые после упрощения примут вид

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что первая система имеет множество решений

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 4x_2^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2^1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а вторая система несовместна. Если в исходном матричном уравнении неизвестную матрицу X интерпретировать как единый объект, то матричное уравнение решения не имеет, так как оно не определяет 2-й столбец матрицы X.

В заключение отметим, что к матричному уравнению вида (11.1) сводятся и другие уравнения, например $AX + B = C$, $(A + B)X = C$ и т.д.

Пример 11.4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

то A^{-1} не существует. Тогда

$$\begin{pmatrix} 2x_1^1 + 3x_2^1 & 2x_1^2 + 3x_2^2 \\ 4x_1^1 + 6x_2^1 & 4x_1^2 + 6x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приравняв элементы матриц, стоящих в левой и правой частях последнего уравнения, получим две системы

$$\begin{aligned} 2x_1^1 + 3x_2^1 &= 1, \qquad & 4x_1^1 + 6x_2^1 &= 2, \\ 2x_1^2 + 3x_2^2 &= 2, \qquad & 4x_1^2 + 6x_2^2 &= 4, \end{aligned}$$

из которых находим множество решений матричного уравнения

$$x_1^1 = \frac{1 - 3C_1}{2}, \quad x_1^2 = \frac{2 - 3C_2}{2}, \quad x_2^1 = C_1, \quad x_2^2 = C_2$$

или

$$X = \begin{pmatrix} (1 - 3C_1)/2 & (2 - 3C_2)/2 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

ГЛАВА 3

Линейные пространства

12. Линейные пространства

В школьном курсе геометрии изучаются направленные отрезки — векторы. Для векторов установлены по определенным правилам действия: известно, что означает сумма двух векторов (правило параллелограмма), что означает произведение вектора на вещественное число (направление не меняется, а длина умножается на это число). При этом выполняются обычные законы арифметики.

Определение линейного пространства обобщает определение совокупности всех векторов. Обобщение производится путем отвлечения от конкретной природы объектов и правил операций над ними. Таким образом, приходим к следующему определению.

♦ Множество $\mathcal{L}$ называется линейным (векторным) пространством над числовым полем $\mathcal{K}$, если для его элементов $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\ldots$ установлены операции, называемые сложением: $\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$, $\vec{z}\in\mathcal{L}$, и умножением на число $\lambda\in\mathcal{K}$: $\lambda\vec{x}=\vec{z}$, $\vec{z}\in\mathcal{L}$, и подчиненные следующим аксиомам.

I. Операция сложения векторов коммутативна, т.е. для всех $\vec{x},\vec{y}\in\mathcal{L}$ справедливо $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$.

II. Операция сложения векторов ассоциативна: для всех $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathcal{L}$ справедливо $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$.

III. Для всех $\vec{x}\in\mathcal{L}$ существует нулевой элемент $\vec{0}\in\mathcal{L}$, такой, что $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$.

IV. Для всех $\vec{x}\in\mathcal{L}$ существует такой противоположный элемент $\vec{y}\in\mathcal{L}$, что $\vec{x}+\vec{y}=\vec{0}$.

V. Для всех $\vec{x}\in\mathcal{L}$ существует единичный элемент $1\in\mathcal{K}$, такой, что $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

VI. Операция умножения вектора на число ассоциативна: для любого $\vec{x}\in\mathcal{L}$ и любых $\alpha,\beta\in\mathcal{K}$ справедливо $\alpha(\beta\vec{x})=(\alpha\beta)\vec{x}$.

VII. Операция умножения вектора на сумму чисел дистрибутивна: для любых $\alpha,\beta\in\mathcal{K}$ и любого $\vec{x}\in\mathcal{L}$ справедливо $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$.

VIII. Операция умножения числа на сумму векторов дистрибутивна: для любых $\alpha\in\mathcal{K}$ и любых $\vec{x},\vec{y}\in\mathcal{L}$ справедливо $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$.

♦ Элементы $\vec{x},\vec{y}\in\mathcal{L}$ называются векторами, в частности элемент $\vec{0}$ называется нулевым вектором, а противоположный элемент $\vec{y}$ — противоположным вектором.

♦ Линейное пространство называется действительным, если $\mathcal{K}$ — поле действительных чисел, и комплексным, если $\mathcal{K}$ — поле комплексных чисел.

◊ Как конкретно определены правила «сложения» и «умножения элементов на число», не имеет значения. Важно выполнение аксиом. Одно и то же множество при различных определениях операций над его элементами может образовывать линейное пространство, а может и не образовывать. Так, множество вещественных положительных чисел при обычном определении сложения и умножения линейным пространством не является. Но если определить умножение на число α как $\alpha\cdot x =: x^\alpha$, а сумму как $x+y =: xy$, то, как легко проверить, аксиомы I–VII выполняются.

Отметим, что при невнимательном прочтении определения линейное пространство ошибочно отождествляют с пространством, введенным в курсе геометрии средней школы. Однако это не так. Введенное выше линейное пространство не определяет, например, прямые, угол между прямыми (или векторами), расстояние между точками, и даже само понятие точки оно не определяет.

В этом смысле введенное линейное пространство является фундаментом для построения пространств более сложной конфигурации. Так, дополнение линейного пространства понятием точки превращает его в точечно-векторное, или аффинное, пространство. Введение в последнем понятия скалярного произведения, позволяющего определять длины векторов и углы между ними, делает пространство не только аффинным, но и евклидовым, которое по своим свойствам наиболее близко к пространству, изучаемому в школьном курсе геометрии.

Теорема 12.1. *В любом линейном пространстве существует единственный нуль.*

Доказательство. Пусть существуют $\vec{0}'$ и $\vec{0}'' \in \mathcal{L}$. Положим в аксиоме III $\vec{x} = \vec{0}'$, $\vec{0} = \vec{0}''$ и получим

$$\vec{0}' + \vec{0}'' = \vec{0}'.$$

Положив в той же аксиоме $\vec{x} = \vec{0}''$, $\vec{0} = \vec{0}'$, найдем

$$\vec{0}' + \vec{0}'' = \vec{0}''.$$

Следовательно, $\vec{0}' = \vec{0}''$, что и требовалось доказать.

Теорема 12.2. *В любом линейном пространстве $\mathcal{L}$, $\vec{x} \in \mathcal{L}$, существует единственный противоположный элемент.*

Доказательство. Пусть для некоторого элемента $\vec{x} \in \mathcal{L}$ существуют такие $\vec{y}_1$ и $\vec{y}_2 \in \mathcal{L}$, что $\vec{x} + \vec{y}_1 = 0$, $\vec{x} + \vec{y}_2 = 0$. Тогда

$$\vec{y}_2 = \vec{y}_2 + \vec{0} = \vec{y}_2 + (\vec{x} + \vec{y}_1) = (\vec{y}_2 + \vec{x}) + \vec{y}_1 = \vec{0} + \vec{y}_1 = \vec{y}_1.$$

Следовательно, $\vec{y}_2 = \vec{y}_1$.

Теорема 12.3. *Для любого $\vec{x} \in \mathcal{L}$ и $0 \in \mathcal{K}$ справедливо $0 \cdot \vec{x} = \vec{0} \in \mathcal{L}$.*

Доказательство. Вычислим

$$0 \cdot \vec{x} + \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 1 \cdot \vec{x} = (0 + 1)\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}.$$

Следовательно, $\vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + \vec{x}$, и по определению $\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}$.

$\Diamond$ В дальнейшем для обозначения и нулевого вектора $\vec{0}$, и числа 0 будем использовать один и тот же символ: 0. Из контекста всегда будет ясен его смысл и размерность.

Теорема 12.4. *Для любого $\vec{x} \in \mathcal{L}$ противоположным элементом служит $\vec{y} = (-1)\vec{x}$.*

Доказательство. Согласно предыдущему свойству, $\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}$. Следовательно,

$$0 = 0 \cdot \vec{x} = (1 - 1)\vec{x} = \vec{x} + (-1)\vec{x},$$

т.е. $\vec{y} = (-1)\vec{x}$.

$\blacklozenge$ Пусть $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ — векторы, принадлежащие пространству $\mathcal{L}$, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{K}$. Вектор

$$\vec{y} = \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \vec{x}_l \tag{12.1}$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$, числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — *коэффициентами* этой комбинации.

♦ Система векторов $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \in \mathcal{L}$ называется *линейно зависимой*, если среди коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{K}$ существует по крайней мере одно число $\alpha_j \neq 0$, $j = \overline{1, k}$, такое, что

$$\sum_{l=1}^{k} \alpha_l \vec{x}_l = 0, \tag{12.2}$$

и *линейно независимой*, если равенство (12.2) возможно только при $\alpha_l \equiv 0$, $l = \overline{1, k}$.

♦ Натуральное число n называется *размерностью* линейного пространства $\mathcal{L}$, если в этом пространстве имеется n линейно независимых элементов (векторов), а любые $(n+1)$-е векторы линейно зависимы. Для обозначения размерности линейного пространства используется символ $\dim \mathcal{L} = n$.

◊ Другими словами, размерность пространства равна максимальному числу содержащихся в нем линейно независимых векторов.

♦ Пространство, имеющее конечную размерность, называется *конечномерным*. Если в пространстве можно найти сколь угодно много линейно независимых векторов, то такое пространство называется *бесконечномерным*.

Нашей ближайшей целью является изучение конечномерных пространств.

♦ Упорядоченная совокупность n линейно независимых векторов $\vec{e}_k$, $k = \overline{1, n}$, называется *базисом линейного пространства* $\mathcal{L}$, если для любого вектора $\vec{x}$ существуют такие числа $x^1, x^2, \ldots, x^n$, что[1]

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x^j \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j. \tag{12.3}$$

Эта линейная комбинация называется разложением вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_j$, а числа x^j – координатами вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_j$.

◊ Другими словами, любая система из n линейно независимых векторов, принадлежащих $\mathcal{L}_n$, образует его базис.

Прежде чем перейти к изучению свойств линейных пространств, вытекающих из системы аксиом и определений, рассмотрим несколько примеров. Начнем с систем однородных линейных уравнений, которые мы рассмотрели в предыдущей главе.

Пример 12.1. Показать, что решения однородной системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0,\\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0,\\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \end{aligned} \tag{12.4}$$

образуют линейное пространство. Указать его размерность и базис.

Решение. Напомним, что решение указанной системы имеет вид (см. пример 9.3)

$$X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1/4 - 3C_2/4 - C_3\\ 7C_1/4 + 7C_2/4\\ C_1\\ C_2\\ C_3 \end{pmatrix},$$

[1] Здесь и в дальнейшем, если это не приводит к недоразумениям, мы не будем различать верхние и нижние индексы у координат векторов и компонент матриц: строк и столбцов.

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, определяющие все множество решений $\mathcal{L}$. Из теоремы 9.2 следует, что все решения системы (12.4) удовлетворяют аксиомам I–VIII, поскольку сумма двух ее решений $X = X_1 + X_2$ и произведение αX произвольного действительного числа α на решение X также являются решениями, т.е. принадлежат множеству $\mathcal{L}$. Свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности этих операций естественным образом следуют из свойств матриц-столбцов. Таким образом, множество решений системы (12.4) удовлетворяет аксиомам I–VIII, т.е. действительно образует линейное пространство $\mathcal{L}$. Сами решения системы (12.4) являются его векторами.

Чтобы найти размерность $\mathcal{L}$ и его базис, напомним, что ранг матрицы системы равен трем, в результате чего система (12.4) обладает фундаментальной системой решений, состоящей из трех линейно независимых решений или векторов, согласно введенной выше терминологии. Любой четвертый вектор (или решение) является их линейной комбинацией, следовательно, максимальное число линейно независимых векторов пространства $\mathcal{L}$ равно трем, что определяет и его размерность. Поскольку в линейном пространстве размерности $n = 3$ базис состоит из трех линейно независимых векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, то в их качестве можно выбрать, например, векторы, образующие фундаментальную систему решений:

$$\vec{e}_1 = X_1 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 7/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = X_2 = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{12.5}$$

Тогда любое решение системы (12.4) или любой вектор пространства $\mathcal{L}$ можно разложить по этому базису:

$$X = C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2 + C_3\vec{e}_3,$$

при этом величины C_1, C_2 и C_3 можно рассматривать как координаты вектора X в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Полученный результат можно распространить на общий случай однородных систем линейных уравнений

$$AX = 0 \tag{12.6}$$

с матрицей A размера $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \tag{12.7}$$

и числом неизвестных, равным n:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Действительно, если $\operatorname{rang} A = r < n$, то решения системы (12.6) образуют линейное пространство размерности $(n - r)$ с базисом, состоящим из $(n - r)$ линейно независимых векторов $\vec{e}_i$, $i = \overline{1, n - r}$, коими являются $(n - r)$ решений фундаментальной системы однородной системы (12.6).

Если же $\operatorname{rang} A = r = n$, то мы получим пространство, состоящее из одного вектора – тривиального решения

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Такое пространство называется *нулевым*. Единственный нулевой вектор является по необходимости противоположным самому себе. Операции в нулевом пространстве задаются равенствами $0 \pm 0 = 0$, $\alpha 0 = 0$.

Интересно, что системы вида (12.6) порождают еще одно пространство. Действительно, если рассматривать все множество матриц (12.7), определяющих системы (12.6), то они образуют линейное пространство матриц размера $m \times n$. Это следует из примера.

Пример 12.2. Показать, что множество матриц размера $m \times n$ образует линейное пространство размерности (mn) с базисом

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ \dots,$$

$$\vec{e}_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \dots, \ \vec{e}_{mn-n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_{mn-(n-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \vec{e}_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{12.8}$$

Решение. Воспользовавшись введенными ранее для матриц операциями сложения и умножения на число, легко убедиться, что аксиомы I–VIII для них выполняются. Так же несложно убедиться в линейной независимости векторов (12.8). Действительно, линейная комбинация

$$a_1^1\vec{e}_1 + a_2^1\vec{e}_2 + \ldots + a_n^m\vec{e}_{mn} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \tag{12.9}$$

обращается в нуль только в случае равенства нулю всех коэффициентов a_j^i, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Число базисных векторов равно mn. Это же число, следовательно, определяет и размерность пространства.

Разложение (12.9) можно рассматривать как разложение вектора, которым является матрица размера $m \times n$, по базису (12.8). Интересно, что элементы матрицы в этом случае являются одновременно ее координатами в базисе (12.8).

Еще раз подчеркнем, что такие понятия, как длина матрицы, расстояния и угол между матрицами в этом линейном пространстве не допускают прямой геометрической интерпретации.

Частными случаями пространства, рассмотренного в примере 12.2, являются пространства, образованные матрицами-строками или матрицами-столбцами, которые еще называются *арифметическими векторами*. Например, матрицы-столбцы (арифметические векторы)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{12.10}$$

образуют линейное пространство размерности n с базисом

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{12.11}$$

В таком базисе вектор (12.10) состоит из своих координат

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n. \tag{12.12}$$

Пример 12.3. Показать, что множество всех полиномов

$$P_n(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n \tag{12.13}$$

с естественным образом введенными для них операциями сложения и умножения на число образуют линейное пространство. Рассмотреть случаи конечномерного или бесконечномерного пространств.

Решение. Зададим произвольное число n и рассмотрим множество всех полиномов, степень которых не выше n. Легко проверить, что на любом конечном промежутке $x \in]a, b[$ аксиомы линейного пространства для такого множества выполняются. Роль нуля при этом играет полином, все коэффициенты которого равны нулю. Таким образом, все полиномы (12.13) образуют линейное пространство. Выделим в этом пространстве векторы

$$\vec{e}_1 = 1, \quad \vec{e}_2 = x, \quad \vec{e}_3 = x^2, \quad \dots, \quad \vec{e}_{n+1} = x^n. \tag{12.14}$$

Линейная комбинация этих векторов

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{n+1}\vec{e}_{n+1}$$

обращается в нуль только в случае равенства нулю всех коэффициентов α_j, $j = \overline{1, n+1}$. Это означает, что система векторов (12.14) является линейно независимой и любой другой многочлен степени не выше n является их линейной комбинацией:

$$P_n(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n.$$

Стало быть, систему векторов (12.14) можно выбрать в качестве базиса конечномерного размерности $(n+1)$ линейного пространства полиномов (12.13) n-й степени.

С ростом числа n размерность пространства возрастает, поэтому линейное пространство полиномов произвольной степени будет, согласно определению, бесконечномерным.

По аналогии с примером 12.3 можно говорить о бесконечномерном пространстве $\mathbb{C}$ функций, непрерывных на некотором отрезке $[a, b]$, если сложение функций и их умножение на действительное число понимать так, как это принято в теории функций, т.е. как сложение или умножение значений функций на число.

Иногда, как это было сделано в примерах, разложение вектора по базису (12.5) будем записывать в матричной форме

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \vec{e}_j x^j = \vec{\mathcal{E}}X, \tag{12.15}$$

обозначив

$$\vec{\mathcal{E}} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \dots\ \vec{e}_n) \tag{12.16}$$

строкой и представив координаты вектора в этом базисе столбцом

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{12.17}$$

Элементы этого столбца в базисе (12.16) определяются однозначно. Действительно, пусть вектор $\vec{x}$ имеет два разложения $\vec{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \vec{e}_j x^j = \sum\limits_{j=1}^{n} \vec{e}_j \tilde{x}^j$. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} \vec{e}_j (x_j - \tilde{x}^j) = 0$, а поскольку $\vec{e}_j$ — линейно независимая система, то $x^j - \tilde{x}^j = 0$ или $x^j = \tilde{x}^j$ для всех j, что означает тождественность исходных разложений. Сам базис (12.16) в линейном пространстве можно выбрать неограниченным количеством способов. Рассмотрим пример.

Пример 12.4. Пусть $\vec{\mathcal{E}} = (\vec{e}_1\,\vec{e}_2\ \dots\ \vec{e}_n)$ — базис некоторого линейного пространства $\mathcal{L}_n$. Перейти от этого базиса к новому и найти связь координат вектора $\vec{x} \in \mathcal{L}_n$ в старом и новом базисах.

Решение. По условию задачи имеем разложение произвольного вектора $\vec{x} \in \mathcal{L}_n$ в базисе $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^n$ с координатами $\{x^j\}_{j=1}^n$:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \vec{e}_j x^j. \tag{12.18}$$

Поскольку в определение базиса входит требование упорядоченности, то наиболее простым способом получения нового базиса является перенумерация линейно независимых векторов $\vec{e}_j$. При этом новые координаты получаются аналогичной перенумерацией старых координат.

Другим способом построения нового базиса $\vec{\mathcal{E}}' = (\vec{e}\,'_1\,\vec{e}\,'_2\ \dots\ \vec{e}\,'_n)$ является составление новых линейно независимых комбинаций из векторов исходного базиса. Положим, например,

$$\begin{aligned} &\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1, \\ &\vec{e}\,'_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &\vec{e}\,'_n = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \ldots + \vec{e}_n. \end{aligned} \tag{12.19}$$

Легко проверить, что система (12.19) определяет базис в $\mathcal{L}_n$. Действительно, эта система представляет собой n линейно независимых векторов, и, кроме того, для любого $\vec{x} \in \mathcal{L}_n$ всегда можно подобрать числа $(x')^j$ так, что

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \vec{e}\,'_j (x')^j. \tag{12.20}$$

Числа $(x')^j$ являются координатами вектора $\vec{x}$ в новом базисе (12.19). Для определения связи между координатами x^j и $(x')^j$ подставим (12.19) в (12.20):

$$\vec{x} = \vec{e}_1 (x')^1 + (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)(x')^2 + \ldots + (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \ldots + \vec{e}_n)(x')^n =$$

$$= \vec{e}_1[(x')^1 + (x')^2 + \ldots + (x')^n] + \vec{e}_2[(x')^2 + (x')^3 + \ldots + (x')^n] + \ldots$$

$$\ldots + \vec{e}_{n-1}[(x')^{n-1} + (x')^n] + \vec{e}_n(x')^n = \sum_{j=1}^{n} \vec{e}_j \bigg(\sum_{k=j}^{n} (x')^k \bigg). \tag{12.21}$$

Сравнив (12.21) с (12.18), найдем искомую связь

$$x^j = \sum_{k=j}^{n} (x')^k, \quad j = \overline{1, n}. \tag{12.22}$$

Вводя по аналогии с (12.19) любую другую линейно независимую систему $\vec{\mathcal{E}}' = (\vec{e}'_1\, \vec{e}'_2\, \ldots\, \vec{e}'_n)$, можно получать различные базисы в заданном линейном пространстве $\mathcal{L}_n$. Более подробно вопрос о преобразовании базиса мы рассмотрим ниже, а сейчас сформулируем полезное в дальнейшем и вытекающее из примера свойство.

Теорема 12.5. *Любую упорядоченную линейно независимую систему из $k < n$ векторов в n-мерном линейном пространстве можно дополнить до некоторого базиса этого пространства. В частности, до базиса можно дополнить любой ненулевой вектор пространства $\mathcal{L}_n$.*

♢ Наличие базиса позволяет линейные операции в пространстве $\mathcal{L}$, заданные абстрактно, свести к обычным операциям с числами — координатами векторов относительно этого базиса.

Теорема 12.6. *При сложении двух векторов пространства $\mathcal{L}$ их координаты относительно любого базиса складываются. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.*

Доказательство. Действительно, пусть существуют

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x^j \vec{e}_j, \qquad \vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y^j \vec{e}_j.$$

Тогда в силу аксиом I–VIII

$$\vec{x} + \vec{y} = \sum_{j=1}^{n} (x^j + y^j)\vec{e}_j, \quad \lambda\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \lambda x^j \vec{e}_j,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 12.6.1. Если два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ равны, то их координаты относительно любого базиса совпадают.

Доказательство. Если два вектора равны, то $\vec{x} - \vec{y} = 0$. Если при этом

$$\vec{x} = x^k \vec{e}_k, \qquad \vec{y} = y^k \vec{e}_k,$$

то

$$\vec{x} - \vec{y} = (x^k - y^k)\vec{e}_k = 0.$$

Следовательно, $x^k - y^k = 0$.

В заключение этого раздела рассмотрим обобщение задачи из примера 12.4 о замене одного базиса линейного пространства $\mathcal{L}_4$ другим.

Пусть
$$\vec{\mathcal{E}} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \ldots\ \vec{e}_n), \qquad \vec{\mathcal{E}}' = (\vec{e}\,'_1\ \vec{e}\,'_2\ \ldots\ \vec{e}\,'_n) \tag{12.23}$$
— два базиса в $\mathcal{L}_n$. Первый из них будем называть старым базисом, а второй — новым.

Каждый вектор нового базиса может быть, согласно определению, разложен по векторам старого как
$$\vec{e}\,'_j = p^1_j\vec{e}_1 + p^2_j\vec{e}_2 + \ldots + p^n_j\vec{e}_n = \sum_{k=1}^{n} p^k_j\vec{e}_k, \quad j = \overline{1,n}, \tag{12.24}$$
где p^k_j — некоторые числа, представляющие собой координаты вектора $\vec{e}\,'_j$ нового базиса в старом. Изменив индекс j от 1 до n, получим n столбцов из коэффициентов p^k_j, которые можно объединить в квадратную матрицу порядка n:
$$P = \|p^k_j\|, \quad k, j = \overline{1,n}. \tag{12.25}$$
С ее помощью систему (12.24) можно записать в векторной форме
$$(\vec{e}\,'_1\ \vec{e}\,'_2\ \ldots\ \vec{e}\,'_n) = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \ldots\ \vec{e}_n)P$$
или коротко
$$\vec{\mathcal{E}}' = \vec{\mathcal{E}}P. \tag{12.26}$$

Поскольку столбцы матрицы P представляют собой координатные столбцы новых базисных векторов в старом базисе, то они, очевидно, являются линейно независимыми. Отсюда следует, что
$$\det P \neq 0. \tag{12.27}$$

♦ Матрицу P (12.25) называют *матрицей перехода* от старого базиса $\{\vec{e}_j\}^n_{j=1}$ к новому базису $\{\vec{e}\,'_j\}^n_{j=1}$.

◊ Из условия (12.27) следует, что любая невырожденная матрица соответствующего размера может быть матрицей перехода от одного базиса к другому.

Найдем теперь, как связаны между собой координаты одного и того же вектора $\vec{x}$ в старом и новом базисе. Пусть вектор $\vec{x}$ в старом базисе имеет столбец координат
$$X = \begin{pmatrix} x^1, \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$
а в новом
$$X' = \begin{pmatrix} (x')^1 \\ \vdots \\ (x')^n \end{pmatrix},$$
т.е.
$$\vec{x} = \vec{\mathcal{E}}X = \vec{\mathcal{E}}'X'. \tag{12.28}$$
Подставив сюда (12.26), получим
$$\vec{\mathcal{E}}X = \vec{\mathcal{E}}PX'$$

или

$$X = PX'. \tag{12.29}$$

Поскольку матрица P является невырожденной, то для нее существует обратная матрица P^{-1}. Умножив уравнение (12.29) на P^{-1} слева, получим искомую связь:

$$X' = P^{-1}X. \tag{12.30}$$

Обратим внимание на то, что при переходе от старого базиса к новому с помощью матрицы перехода P по закону (12.26) столбец координат некоторого фиксированного вектора $\vec{x}$ преобразуется при этом с помощью обратной матрицы P^{-1} согласно (12.30). Эти преобразования имеют, как говорят, контравариантный (от лат. «противопреобразующий») характер.

Забегая несколько вперед и предваряя понятие тензора, отметим, что числа x^j (индекс именно вверху), $j = \overline{1,n}$, представляют собой координаты так называемого контравариантного тензора первого ранга (одновалентного), если при преобразовании базиса по закону (12.26) имеет место закон преобразования (12.30).

Таким образом, примером одновалентного контравариантного тензора являются координаты x^j фиксированного (неизменного, инвариантного) вектора $\vec{x}$. Поскольку вектор $\vec{x}$ фиксирован, координаты x^j имеют определенные численные значения в каждом базисе и преобразуются по закону (12.30).

Пример 12.5. Записать преобразование координат инвариантного вектора $\vec{x}$ при преобразовании базиса (12.19) из предыдущего примера.

Решение. Запишем преобразование (12.19) в матричной форме:

$$(\vec{e}\,'_1\ \vec{e}\,'_2\ \ldots\ \vec{e}\,'_n) = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \ldots\ \vec{e}_n)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что матрица перехода P имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная к ней матрица была найдена в примере 5.2 и имеет вид

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно (12.30), координаты вектора $\vec{x}$ в новом базисе определяется как

$$X' = \begin{pmatrix} (x')^1\\ (x')^2\\ \vdots\\ (x')^{n-1}\\ (x')^n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^{n-1}\\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^{n-1}\\ x^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^1 - x^2 \\ x^2 - x^3 \\ \vdots \\ x^{n-1} - x^n \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Этот же результат получается при решении системы (12.22).

Пример 12.6. Вектор $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет вид $\vec{x} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Найти его разложение в новом базисе $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$, $\vec{e}\,'_3$, который определяется как

$$\begin{aligned} \vec{e}\,'_1 &= 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \\ \vec{e}\,'_2 &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \\ \vec{e}\,'_3 &= -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3. \end{aligned} \tag{12.31}$$

Решение. Запишем преобразование базиса (12.31) в матричной форме:

$$(\vec{e}\,'_1\ \vec{e}\,'_2\ \vec{e}\,'_3) = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3) \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что матрица перехода P имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & 4 & 17 \end{pmatrix}.$$

Поскольку, согласно условию, вектор $\vec{x}$ в старом базисе имеет координаты

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

то его координаты в новом базисе найдутся, согласно (12.30):

$$X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & 4 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 6 \\ -27 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что искомое разложение вектора $\vec{x}$ в новом базисе примет вид

$$\vec{x} = -13\vec{e}\,'_1 + 6\vec{e}\,'_2 - 27\vec{e}\,'_3.$$

13. Подпространства

♦ Непустое множество M векторов линейного пространства $\mathcal{L}$ называется подпространством, если

I. для любых $\vec{x}, \vec{y} \in M$ $\vec{x} + \vec{y} \in M$;

II. для любого $\vec{x} \in M$ и любого $\alpha \in \mathcal{K}$ $\alpha\vec{x} \in M$.

Подпространство M обладает следующими свойствами: всякое подпространство линейного пространства есть линейное пространство; размерность подпространства не превосходит размерности исходного пространства.

Действительно, согласно условию II, множество M содержит нулевой вектор, поскольку если $\alpha\vec{x} \in M$ для всех α, то M содержит и $\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}$. Вместе с тем, множество M наряду с вектором $\vec{x}$ содержит и противоположный ему вектор $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$. Теперь, уже в силу свойства I, к M принадлежит и разность любых двух векторов из M. Очевидно, что остальные аксиомы линейного пространства будут выполняться в M, поскольку они выполнялись в $\mathcal{L}$.

Утверждение о размерности подпространства M вытекает из того, что линейно независимые векторы, принадлежащие M, будут линейно независимыми и во всем пространстве $\mathcal{L}$, а, значит, максимальное число линейно независимых векторов подпространства M не может превосходить максимального числа линейно независимых векторов всего пространства. Это и означает, что размерность M не превосходит размерности $\mathcal{L}$. Впрочем, это утверждение вытекает из теоремы 13.1.

Заметим, что множество, состоящее из одного нулевого вектора, обладает свойствами I, II и, следовательно, является линейным подпространством в $\mathcal{L}$, которое называется еще нулевым подпространством. С другой стороны, само пространство $\mathcal{L}$ можно также рассматривать как свое собственное линейное подпространство.

♦ Нулевое подпространство и само пространство $\mathcal{L}$ называются *тривиальными подпространствами* пространства $\mathcal{L}$. Все остальные называются *нетривиальными* или *истинными*.

Теорема 13.1. *Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$ — базис подпространства $M \subset \mathcal{L}$, причем $k < n$. Тогда можно дополнительно выбрать векторы $\vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n$ так, чтобы система векторов*

$$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n$$

была базисом пространства $\mathcal{L}$.

Доказательство вытекает из теоремы 12.5.

Важным способом построения подпространств является задание линейной оболочки системы векторов.

♦ Линейной оболочкой M, заданной конечной совокупностью $\mathcal{P}$ векторов $\vec{x}_j \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$, $j = \overline{1, k}$, называется множество всех линейных комбинаций этих векторов, т.е.

$$\vec{y} = \sum_{j=1}^{k} C^j \vec{x}_j. \tag{13.1}$$

♦ Совокупность векторов $\mathcal{P}$ называется *порождающей системой* данной линейной оболочки M.

Свойства линейной оболочки:

1) линейная оболочка M элементов линейного пространства $\mathcal{L}$ является подпространством линейного пространства $\mathcal{L}$;

2) если какой-либо вектор порождающей системы $\mathcal{P}$ есть линейная комбинация остальных векторов, то его можно удалить из порождающей системы, не изменив линейной оболочки M.

Действительно, так как сумма линейных комбинаций (13.1) и произведение линейной комбинации (13.1) на число снова являются линейными комбинациями (13.1), то выполняются условия I, II, и, следовательно, линейная оболочка M есть подпространство пространства $\mathcal{L}$. Если же из порождающей системы векторов $\mathcal{P}$ удалить те, что линейно зависят от остальных (если такие есть), то получится максимальная система линейно независимых векторов, которую можно рассматривать как базис подпространства M. Очевидно, что такая операция не может изменить подпространство M, т.е. линейную оболочку порождающей системы $\mathcal{P}$.

В связи с этим любое подпространство M пространства $\mathcal{L}$ можно рассматривать как линейную оболочку своего базиса. При этом тривиальные подпространства 0 и $\mathcal{L}_n$ можно рассматривать как линейные оболочки соответственно нулевого вектора $\vec{0}$ и полного базиса $\vec{\mathcal{E}} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$.

$\Diamond$ Иногда линейную оболочку M порождающей системы $\vec{x}_j \in \mathcal{P}$, $j = \overline{1, k}$, называют *подпространством* M, *натянутым на систему векторов* $\vec{x}_j$. Следовательно, любое подпространство M пространства $\mathcal{L}$ является подпространством, натянутым на свой базис.

Пример 13.1. Показать, что линейная оболочка системы полиномов

$$-3t^2 - 1, \qquad 2t^2 + t, \qquad -t$$

совпадает с пространством $\mathcal{L}_3$ всех полиномов степени $n \leqslant 2$.

Решение. В пространстве полиномов рассмотрим систему векторов

$$\vec{x}_1 = -3t^2 - 1, \quad \vec{x}_2 = 2t^2 + t, \quad \vec{x}_3 = -t. \tag{13.2}$$

Будем считать ее порождающей системой $\mathcal{P}$ некоторой линейной оболочки M. Исследуем эту систему на линейную зависимость, т.е. рассмотрим, обращается ли в нуль их линейная комбинация

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3.$$

Подставив сюда вектор (13.2), запишем

$$\alpha_1(-3t^2 - 1) + \alpha_2(2t^2 + t) + \alpha_3(-t) = 0$$

или

$$-\alpha_1 + t(\alpha_2 - \alpha_3) + t^2(-3\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0.$$

Для любых t эта сумма обращается в нуль при условиях

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= 0, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Полученная система имеет только тривиальное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Из этого следует, что порождающая система векторов (13.2) является линейно независимой и может рассматриваться как базис в подпространстве полиномов. С другой стороны, в пространстве $\mathcal{L}_3$ полиномов степени $n \leqslant 2$ в качестве базиса можно выбрать векторы

$$1, \quad t, \quad t^2. \tag{13.3}$$

Но порождающая система $\mathcal{P}$ (13.2) представляет собой линейную комбинацию из векторов базиса (13.3). Следовательно, линейная оболочка M векторов (13.2) действительно является пространством $\mathcal{L}_3$.

Пример 13.2. Найти размерность и какой-либо базис линейной оболочки системы векторов

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{13.4}$$

Решение. Из столбцов (13.4) составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

и найдем ее ранг. Для этого выполним указанные элементарные преобразования

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{R_4-R_3}{\overset{R_2-R_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{R_4-R_5}{\overset{R_2-R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{13.5}$$

Отсюда следует, что все миноры 4-го порядка матрицы A равны нулю и существует минор 3-го порядка, например

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

который отличен от нуля. Это означает, что $\operatorname{rang} A = 3$. Из (13.5) видно, что векторы $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_4$ являются линейными комбинациями векторов $\vec{x}_1$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_5$. Таким образом, линейная оболочка векторов (13.4) имеет размерность, равную трем, а в качестве ее базиса можно выбрать векторы $\vec{e}_1 = \vec{x}_1$, $\vec{e}_2 = \vec{x}_3$, $\vec{e}_3 = \vec{x}_5$.

Пример 13.3. Показать, что линейное пространство решений однородной системы

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ &3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ &x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \end{aligned} \tag{13.6}$$

представляет собой линейную оболочку, для которой порождающей системой $\mathcal{P}$ является фундаментальная система решений, и что эта линейная оболочка есть подпространство векторного пространства размерности, равной пяти.

Решение. Из результатов примера 9.3 следует, что третье уравнение этой системы является линейной комбинацией первых двух, причем система (13.6) эквивалентна системе двух уравнений

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5, \\ x_2 &= \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4. \end{aligned} \tag{13.7}$$

Поскольку ранг матрицы этой системы равен двум, то она имеет фундаментальную систему решений, состоящую из трех $(5-2=3)$ векторов. Обозначим их через $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$, $\vec{e}_5$. Эти векторы, согласно (9.12), можно записать в виде

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 7/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13.8}$$

Поскольку любое решение системы (13.6) представляет собой линейную комбинацию

$$\vec{x} = x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4 + x_5\vec{e}_5, \tag{13.9}$$

то трехмерное пространство решений (13.9) системы (13.6) представляет собой линейную оболочку, натянутую на фундаментальную систему решений системы (13.8). Она же является и ее базисом. Этот базис, согласно теореме 13.1, можно дополнить до базиса пятимерного пространства, например, следующим образом:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 7/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13.10}$$

В том, что система (13.10) образует базис, можно убедиться, составив матрицу из столбцов (13.10):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & -3/4 & -1 \\ 0 & 1 & 7/4 & 7/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проведя над ней указанные элементарные преобразования, найдем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & -3/4 & -1 \\ 0 & 1 & 7/4 & 7/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_5+R_1}{\overset{\substack{R_3-R_1/4-7R_2/4 \\ R_4+3R_1/4-7R_2/4}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rang} A = 5$, т.е. система векторов (13.10) линейно независима и действительно образует базис в пространстве $\mathcal{L}_5$.

Если теперь вектор $\vec{x}$ (13.9) рассматривать как вектор из пространства $\mathcal{L}_5$, то в базисе (13.10) он имеет координаты $x_1 = x_2 = 0$:

$$\vec{x} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4 + x_5\vec{e}_5,$$

т.е. пространство решений (13.9) образует линейную оболочку фундаментальной системы векторов (13.8), являющуюся трехмерным подпространством пространства L_5.

Покажем, что условия $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ определяют трехмерное подпространство в любом базисе пространства $\mathcal{L}_5$. Рассмотрим вместо базиса (13.10) новый базис

$$\vec{e}\,'_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}\,'_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}\,'_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}\,'_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}\,'_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{13.11}$$

Базис (13.11) — его еще называют каноническим — связан с базисом (13.10) матрицей перехода

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1/4 & 3/4 & 1\\ 0 & 1 & -7/4 & -7/4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно (12.29), координатный столбец X в базисе (13.10) и координатный столбец X' в базисе (13.11) связаны соотношениями

$$X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = P\widehat{X}' = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1/4 & 3/4 & 1\\ 0 & 1 & -7/4 & -7/4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\\x'_4\\x'_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x' - \dfrac{1}{4}x'_3 + \dfrac{3}{4}x'_4 + x'_5\\ x'_2 - \dfrac{7}{4}x'_3 - \dfrac{7}{4}x'_4\\ x'_3\\ x'_4\\ x'_5\end{pmatrix}.$$

Из условий $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ найдем

$$\begin{gathered} x'_1 - \frac{1}{4}x'_3 + \frac{3}{4}x'_4 + x'_5 = 0,\\ x'_2 - \frac{7}{4}x'_3 - \frac{7}{4}x'_4 = 0, \end{gathered}$$

и, как было показано выше, эта система будет определять трехмерное подпространство в пространстве $\mathcal{L}_5$.

Отметим, что результаты приведенных выше примеров остаются справедливыми и при более общих предположениях. Так, например, все полиномы степени не выше k образуют подпространство $\mathcal{L}_k$ в пространстве $\mathcal{L}_n$ полиномов степени $n > k$. С другой стороны, каждое подпространство $\mathcal{L}_n$ содержится в качестве подпространства в пространстве $\mathcal{L}$ всех полиномов с вещественными коэффициентами, которое, в свою очередь, является подпространством пространства всех непрерывных функций и т.д.

Результаты примера 13.3 допускают следующее обобщение. Если $\mathcal{L}_k$ — подпространство пространства $\mathcal{L}_n$, то в соответствующем базисе $\mathcal{L}_n$ векторы из пространства (и только они) будут иметь координаты x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n, равные нулю, т.е.

$$x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0. \tag{13.12}$$

Равенства (13.12) можно рассматривать как систему линейных уравнений, связывающую координаты вектора $\vec{x}$. Эта система имеет ранг $n-k$, и множество ее решений составляет пространство $\mathcal{L}_k$, причем в любом базисе $\mathcal{L}_n$ подпространство $\mathcal{L}_k$ будет определяться однородной системой уравнений ранга $n-k$. При $n = k$, т.е. когда $\mathcal{L}_k$ совпадает с $\mathcal{L}_n$, эта система имеет ранг 0, и, следовательно, она не содержит ни одного нетривиального решения.

Таким образом, однородные системы линейных уравнений, которые можно рассматривать как математические модели физических, экономических и других задач, в терминах линейного пространства имеют смысл некоторой линейной оболочки. Аналогично неоднородные системы линейных уравнений можно рассматривать как линейные многообразия некоторого линейного пространства.

♦ Если $\mathcal{L}_k$ — некоторое подпространство линейного пространства $\mathcal{L}_n$, то множество векторов

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_0, \tag{13.13}$$

где $\vec{x}, \vec{x}_0 \in \mathcal{L}_n$, $\vec{x}_1 \in \mathcal{L}_k$, называется *линейным многообразием*, полученным сдвигом в пространстве $\mathcal{L}_n$ подпространства $\mathcal{L}_k$ на вектор $\vec{x}_0$.

Пример 13.4. Задана система уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ &3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ &x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{aligned} \tag{13.14}$$

1. Доказать, что множество решений этой системы есть линейное многообразие в пространстве $\mathcal{L}_5$.
2. Определить, сдвигом в каком пространстве получается это линейное многообразие. Найти размерность и какой-либо базис этого подпространства.
3. Найти какой-либо вектор сдвига.

Решение. В предыдущем примере было показано, что решение приведенной (однородной) системы для системы (13.14) представляет собой трехмерное подпространство $\mathcal{L}_3$ пространства $\mathcal{L}_5$ с базисом, состоящим из векторов фундаментальной системы решений (13.8), т.е.

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 7/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, из теоремы 10.3 (о структуре общего решения неоднородной системы) следует, что решение системы (13.14) можно записать в виде суммы

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1, \tag{13.15}$$

где $\vec{x}_0$ — любое частное решение неоднородной системы (13.14), а $\vec{x}_1$ — общее решение (13.9) ее приведенной системы

$$\vec{x}_1 = x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4 + x_5\vec{e}_5.$$

Поскольку $\vec{x}_1 \in \mathcal{L}_3$, а $\vec{x}_0 \in \mathcal{L}_5$, то, согласно определению, множество векторов вида (13.15) образует линейное многообразие, полученное из подпространства $\mathcal{L}_3$. Это подпространство образовано из пространства решений однородной системы сдвигом на произвольное частное решение неоднородной системы (13.14) — вектор $\vec{x}_0 \in \mathcal{L}_5$. Если воспользоваться результатами примера 8.2, то в качестве частного решения можно выбрать, например, вектор

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда многообразие (13.15) можно записать в виде

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1/4 \\ -7/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь два линейных подпространства $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ из линейного пространства $\mathcal{L}$.

♦ *Суммой подпространств* $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ называется линейная оболочка их объединения $\mathcal{L}' \cup \mathcal{L}''$.

Если $\vec{\mathcal{E}}'$ — базис подпространства $\mathcal{L}'$, а $\vec{\mathcal{E}}''$ — базис подпространства $\mathcal{L}''$, то их объединение можно рассматривать как порождающую систему линейной оболочки, представляющей собой сумму подпространств $\mathcal{L}' + \mathcal{L}''$. Из порождающей системы, не меняя ее линейной оболочки (свойство 2), можно удалить векторы, являющиеся линейными комбинациями остальных. Максимальное число линейно независимых векторов из $\vec{\mathcal{E}}'$ и $\vec{\mathcal{E}}''$ образует базис суммы подпространств $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ и определяет ее размерность как подпространства пространства $\mathcal{L}$. Очевидно, что эта размерность не превосходит размерности самого пространства $\mathcal{L}$.

♦ *Пересечением подпространств* $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$ называется множество векторов, принадлежащих одновременно обоим подпространствам.

Выше мы отмечали, что подпространства $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ определяются решениями однородных систем уравнений. Тогда пересечение $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$ будет задаваться объединением этих систем, а фундаментальная система решений такой объединенной системы будет определять базис пересечения $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$ как некоторого подпространства.

♦ Сумма подпространств $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$, для которых их пересечение $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$ является нулевым пространством, называется *прямой суммой* и обозначается $\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$ (или $\mathcal{L}' \dotplus \mathcal{L}''$).

Связь между размерностями пространств $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$, а также размерностями их суммы и пересечения определяется следующей теоремой.

Теорема 13.2. *Сумма размерностей двух подпространств складывается из размерности их пересечения и размерности суммы этих подпространств, т.е.*

$$\dim \mathcal{L}' + \dim \mathcal{L}'' = \dim(\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}'') + \dim(\mathcal{L}' + \mathcal{L}''). \tag{13.16}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}'_k$ и $\mathcal{L}''_m$ — два подпространства размерности k и m соответственно в пространстве $\mathcal{L}_n$. В подпространстве $\mathcal{L}'_k \cap \mathcal{L}''_m$ выберем какой-нибудь базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_l$. Дополним его векторами $\vec{f}_{l+1}, \vec{f}_{l+2}, \ldots, \vec{f}_k$ до базиса в $\mathcal{L}'_k$ и векторами $\vec{g}_{l+1}, \vec{g}_{l+2}, \ldots, \vec{g}_m$ до базиса в $\mathcal{L}''_m$. Покажем, что система векторов

$$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_l, \vec{f}_{l+1}, \ldots, \vec{f}_k, \vec{g}_{l+1}, \ldots, \vec{g}_m \tag{13.17}$$

образует базис в подпространстве $\mathcal{L}'_k + \mathcal{L}''_m$. Для этого убедимся, что, во-первых, каждый вектор $\vec{x} \in (\mathcal{L}'_k + \mathcal{L}''_m)$ является линейной комбинацией векторов (13.17) и, во-вторых, система (13.17) линейно независима.

Справедливость первого утверждения вытекает из того, что $\vec{x} \in (\mathcal{L}'_k + \mathcal{L}''_m)$ представляет собой сумму $\vec{x} = \vec{x}\,' + \vec{x}\,''$, в которой вектор $\vec{x}\,'$ разлагается по векторам $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_l$, $\vec{f}_{l+1}, \ldots, \vec{f}_k$, а вектор $\vec{x}\,''$ — по векторам $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_l$, $\vec{g}_{l+1}, \ldots, \vec{g}_m$. Значит, сам вектор $\vec{x}$ разлагается по системе векторов (13.17), т.е. представляет их линейную комбинацию.

Теперь рассмотрим линейную комбинацию из векторов — решений системы (13.17), — равную нулю:

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \vec{e}_i + \sum_{i=l+1}^{k} \beta_i \vec{f}_i + \sum_{i=l+1}^{m} \gamma_i \vec{g}_i = 0. \tag{13.18}$$

Вектор $\vec{x} = \sum\limits_{i=l+1}^{k} \beta_i \vec{f}_i$ принадлежит пространству $\mathcal{L}'_k$. С другой стороны, согласно (13.18),

$$\vec{x} = -\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \vec{e}_i - \sum_{i=l+1}^{m} \gamma_i \vec{g}_i$$

принадлежит также и $\mathcal{L}''_m$. Отсюда следует, что $\vec{x}$ принадлежит сразу $\mathcal{L}'_k$ и $\mathcal{L}''_m$, т.е. их пересечению $\mathcal{L}'_k \cap \mathcal{L}''_m$, и, стало быть, $\beta_{l+1} = \ldots = \beta_k = \gamma_{l+1} = \ldots = \gamma_m = 0$. В силу этого линейная комбинация (13.18) примет вид

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \vec{e}_i = 0,$$

если $\mathcal{L}'_k \cap \mathcal{L}''_m$ не является нулевым пространством. Но совокупность векторов $\vec{e}_i$, $i = \overline{1, l}$, линейно независима, поскольку является базисом в $\mathcal{L}'_k \cap \mathcal{L}''_m$, а значит, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_l = 0$.

Таким образом, линейная комбинация (13.18) является тривиальной, а соответствующая система векторов (13.17) — линейно независимой, что и требовалось доказать.

Мы доказали, что система векторов (13.17) образует базис в пространстве $(\mathcal{L}'_k + \mathcal{L}''_m)$. Следовательно, число векторов, равное $l + (k-l) + (m-l) = k+m-l$, определяет его размерность: $\dim(\mathcal{L}'_k + \mathcal{L}''_m) = k + m - l$. Отсюда с учетом того, что $k = \dim \mathcal{L}'_k$, $m = \dim \mathcal{L}''_m$, $l = \dim(\mathcal{L}'k \cap \mathcal{L}''_m)$, приходим к равенству

$$\dim(\mathcal{L}' + \mathcal{L}'') = \dim \mathcal{L}' + \dim \mathcal{L}'' - \dim(\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}'')$$

и соответственно к (13.16).

Из формулы (13.16) непосредственно вытекают очевидные следствия.

Следствие 1. Два подпространства, сумма размерностей которых превосходит n — размерность всего пространства, обязательно имеют ненулевое пересечение.

Следствие 2. Размерность прямой суммы двух подпространств равна сумме их размерностей:

$$\dim(\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}'') = \dim \mathcal{L}' + \dim \mathcal{L}''. \tag{13.19}$$

Следствие 3. Каждый вектор $\vec{x}$ из прямой суммы $\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$ разлагается в сумму векторов $\vec{x}\,'$ из $\mathcal{L}'$ и $\vec{x}\,''$ из $\mathcal{L}''$ единственным образом, т.е. $\vec{x} = \vec{x}\,' + \vec{x}\,''$.

Пример 13.5. Определить размерности подпространств $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ пространства $\mathcal{L}_5$, определяемых системами

$$\begin{array}{ll} & x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ \mathcal{L}': & 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \end{array} \tag{13.20}$$

$$x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0$$

и

$$\mathcal{L}'' : \quad \begin{aligned} &2x_1 + 6x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 3x_5 = 0, \\ &3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ &x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 8x_4 + 2x_5 = 0, \end{aligned} \tag{13.21}$$

а также размерности их суммы и пересечения. В каждом пространстве указать какой-либо его базис.

Решение. Система (13.20) рассматривалась в примере 13.3. Там было показано, что ее общее решение

$$\vec{x} = x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4 + x_5\vec{e}_5$$

образует трехмерное пространство, т.е. $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_3$ с базисом (13.8):

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 7/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь систему (13.21). Выполнив над матрицей этой системы указанные элементарные преобразования, получим

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -10 & -9 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -8 & 2 \end{pmatrix} \overset{S_1-S_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -8 & 2 \end{pmatrix} \underset{S_3-S_1}{\overset{S_2-3S_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{S_3+S_2}{\overset{S_1+S_2/4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 5/4 \\ 0 & -4 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-S_2/4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 5/4 \\ 0 & 1 & 0 & -7/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен трем, следовательно, система имеет общее решение

$$\vec{x} = x_4\vec{e}_4 + x_5\vec{e}_5,$$

образующее двумерное пространство, т.е. $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}_2$ с базисом

$$\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_5 = \begin{pmatrix} -5/4 \\ -7/4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13.22}$$

Согласно определению, сумма подпространств $\mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_2$ является линейной оболочкой векторов двух базисов: (13.8) и (13.22). Из столбцов этих векторов составим матрицу и определим ее ранг, выполнив указанные элементарные преобразования:

$$\begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 & -1 & -3/4 & -5/4 \\ 7/4 & 7/4 & 0 & 7/4 & -7/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_5+R_1-R_3}{\overset{R_4-R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 & -1 & 0 & 0 \\ 7/4 & 7/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что ранг этой матрицы равен трем, причем векторы базиса (13.22) представляют собой линейную комбинацию векторов базиса (13.8). Таким образом, пространство $\mathcal{L}_2$ является подпространством не только $\mathcal{L}_5$, но и $\mathcal{L}_3$. В силу этого базисом суммы подпространств $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ является базис пространства $\mathcal{L}_3$, т.е. (13.8), а базисом их пересечения $\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3$ — базис подпространства $\mathcal{L}_2$, т.е. (13.22).

Размерность подпространства $\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3$ можно было найти также из формулы (13.16). Поскольку $\dim \mathcal{L}_2 = 2$, $\dim \mathcal{L}_3 = 3$, $\dim(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3) = 3$, то $\dim(\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3) = 2+3-3 = 2$. Кроме того, базис подпространства $\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3$ можно найти из общего решения объединенной системы (13.20) и (13.21) с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 \\ 2 & 6 & -10 & -9 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

После известных уже элементарных преобразований ее можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3/4 & 5/4 \\ 0 & 1 & 0 & -7/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

который соответствует системе уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + \frac{3}{4}x_4 + \frac{5}{4}x_5 = 0, \\ &x_2 - \frac{7}{4}x_4 + \frac{7}{4}x_5 = 0, \\ &x_3 + x_5 = 0 \end{aligned}$$

с общим решением

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}x_4 - \frac{5}{4}x_5 \\ \frac{7}{4}x_4 - \frac{7}{4}x_5 \\ -x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что объединенная система однородных уравнений (13.20) и (13.21) имеет фундаментальную систему решений

$$\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_5 = \begin{pmatrix} -5/4 \\ -7/4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которая и является базисом не только в $\mathcal{L}_2$ (13.22), но и в $\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3$.

Пример 13.6. Для двух нетривиальных подпространств из пространства $\mathcal{L}_4$ рассмотреть возможные значения размерности их пересечений и объединений.

Решение. Наибольший интерес представляют подпространства размерности не менее двух.

I. Пусть $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}_2$. Если подпространства совпадают, т.е. $\mathcal{L}' = \mathcal{L}''$, то их сумма и пересечение тоже двумерны в полном соответствии с (13.16): $2+2 = 2+2$. Если же подпространства не совпадают, то они могут пересекаться либо по нулевому подпространству: $2+2 = 4+0$, либо по одномерному: $2+2 = 3+1$.

II. Пусть $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}_3$. В отличие от предыдущего случая, эти подпространства либо совпадают и тогда $3+3 = 3+3$, либо пересекаются только по двумерному пространству, поскольку $3+3 = 4+2$ ($\dim[\mathcal{L}' + \mathcal{L}'']$ не превышает четырех).

III. Пусть $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}_3$. В этом случае эти подпространства либо пересекаются по одномерному пространству: $2+3 = 4+1$, либо $\mathcal{L}'$ содержится в $\mathcal{L}''$: $2+3 = 3+2$.

Понятия суммы двух подпространств и их пересечения достаточно просто обобщаются на любое число подпространств. При этом сумма нескольких подпространств переходит в прямую их сумму, если каждое из них имеет нулевое пересечение с суммой остальных. В силу этого, если $\vec{e}_i$, $i = \overline{1, n}$, — базис линейного пространства L_n, а $\mathcal{L}_i$, $i = \overline{1, n}$, — линейная одномерная оболочка базисного вектора $\vec{e}_i$, то пространство L_n является прямой суммой одномерных подпространств $\mathcal{L}_i$, т.е.

$$L_n = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i. \tag{13.23}$$

Другими словами, любое линейное пространство можно рассматривать как прямую сумму линейных подпространств, натянутых на соответствующий вектор его базиса.

$\Diamond$ Такой подход позволяет взглянуть с другой стороны на введенное ранее требование линейной независимости векторов базиса, связи размерности пространства с числом векторов базиса, а также операции сложения векторов как суммы только одноименных координат и т.д.

ГЛАВА 4

Аффинные пространства

14. Аффинные пространства

Центральным понятием курса геометрии в средней школе является понятие точки, которое принимается за одно из исходных. Точка не может быть определена через другие, более общие объекты, т.е. является неопределяемой. Понятие вектора как направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, принадлежащего некоторому пространству (плоскому или трехмерному), есть производное от понятия точки, если вектор рассматривается как упорядоченная пара точек A и B, поскольку она однозначно определяет $\overrightarrow{AB}$.

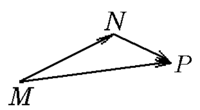
В разделе «Линейное пространство» было введено понятие линейного (векторного) пространства, элементы которого называются векторами. Для того чтобы сопоставить линейное пространство с пространствами, свойства которых изучались в школьном курсе геометрии, линейное пространство необходимо дополнить новым объектом – точкой. Такие пространства будем называть точечно-векторными или аффинными.

Пусть $\mathcal{A}$ — некоторое множество, элементы которого будем называть точками и обозначать прописными буквами латинского алфавита $A, B, \ldots, M, N$. Далее, пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем $\mathcal{K}$. Каждой упорядоченной паре точек M, N из A сопоставим вектор $\vec{x}$ из $\mathcal{L}$, который будем обозначать $\vec{x} = \overrightarrow{MN}$.

♦ *Аффинным* (от латинского «родственный») пространством $\mathcal{A}$ над векторным пространством $\mathcal{L}$ называется совокупность точек, каждой паре которых M, N поставлен в соответствие вектор $\vec{x}$ из $\mathcal{L}$ при условии, что

1) для каждой точки M и каждого вектора $\vec{x}$ найдется одна и только одна точка N такая, что $\overrightarrow{MN} = \vec{x}$;
2) для любых трех точек M, N, P выполняется равенство

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}. \tag{14.1}$$



Другими словами, аффинное пространство $\mathcal{A}$ — это множество элементов двух видов: точек и векторов, связь между которыми задается с помощью следующей операции. Если из произвольной точки M построить некоторый вектор $\vec{x}$, то можно определить некоторую точку N такую, что $\overrightarrow{MN} = \vec{x}$. Точка M называется *началом*, а точка N — *концом* вектора $\overrightarrow{MN}$. Сами векторы $\overrightarrow{MN}$ называются *свободными векторами* пространства $\mathcal{A}$.

Из определения аффинного пространства следуют почти очевидные утверждения.

Теорема 14.1. *Для четырёх точек M, M' и N, N' аффинного пространства $\mathcal{A}$ равенство*

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'} \tag{14.2}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}. \tag{14.3}$$

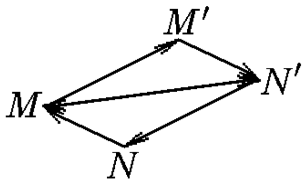


Рис. 2.

Доказательство. Согласно (14.1), для трех точек M, M' и N' справедливо равенство

$$\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN'}. \tag{14.4}$$

В свою очередь, для трех точек M и N, N', согласно той же формуле, можно записать

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{MN'}. \tag{14.5}$$

Сравнив (14.4) с (14.5), можно заключить, что из условия (14.3) следует (14.2) и наоборот (см. рис. 2).

Теорема 14.2. *Каждой точке (паре совпадающих точек) из $\mathcal{A}$ соответствует нулевой вектор из $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Пусть M — произвольная точка в $\mathcal{A}$. Положив в (14.1) $N = M$, получим

$$\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MP}. \tag{14.6}$$

Обозначив векторы $\overrightarrow{MM}$ и $\overrightarrow{MP}$ как векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из $\mathcal{L}$, можем, согласно (14.6), записать $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}$, откуда в соответствии с аксиомами линейного пространства следует, что $\overrightarrow{MM} = \vec{x} = 0$.

Следствие 14.2.1. Вектор $\overrightarrow{NM}$ является противоположным вектору $\overrightarrow{MN}$.

Действительно, согласно теореме 14.2, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM} = 0$. Это означает, что $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$.

♦ Аффинное пространство называется *действительным* (*комплексным*), если соответствующее линейное пространство $\mathcal{L}$ является действительным (комплексным).

♦ Аффинное пространство называется *конечномерным* (*бесконечномерным*), если соответствующее линейное пространство $\mathcal{L}$ является конечномерным (бесконечномерным).

♦ Аффинное пространство будем называть *n-мерным* и обозначать через $\mathcal{A}_n$, если соответствующее линейное пространство $\mathcal{L}_n$ является n-мерным.

Если $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ — базис линейного пространства $\mathcal{L}_n$, то любой вектор линейного пространства характеризуется своими координатами в этом базисе:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n. \tag{14.7}$$

Введём аналогичную характеристику и для таких объектов аффинного пространства, как точки.

Пусть O — некоторая точка аффинного пространства $\mathcal{A}_n$. Тогда, согласно определению, конец вектора $\vec{x}$, принадлежащего $\mathcal{L}_n$ и исходящего из точки O, определит единственную точку M. Если точку O зафиксировать, назвав её начальной, то все точки аффинного пространства можно получить как множество концов всех векторов, образующих $\mathcal{L}_n$ и исходящих из начальной точки O. Это позволяет наряду со свободными векторами рассматривать так называемые радиус-векторы.

♦ *Радиус-вектором* точки M относительно начальной точки O называется вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{x} \in \mathcal{L}_n$ с фиксированным началом в точке O.

Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми радиус-векторами $\overrightarrow{OM}$ и точками M аффинного пространства.

Базис $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$, линейного пространства дополним точкой O. Такое дополнение приводит нас к новому понятию, характеризующему аффинное пространство и называемому репером.

♦ *Репером* аффинного пространства называется совокупность базисных векторов его линейного пространства $\mathcal{L}_n$ и начальной точки O: $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

Пусть теперь M — произвольная точка из $\mathcal{A}_n$, определяемая радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$. Сам радиус-вектор как элемент векторного пространства $\mathcal{L}_n$ разлагается, согласно (14.7):

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n. \tag{14.8}$$

♦ Коэффициенты x_i, $i = \overline{1, n}$, разложения (14.8) радиус-вектора, определяющего точку M, называются *координатами* (или *аффинными координатами*) этой точки относительно выбранного репера аффинного пространства $\mathcal{A}_n$.

Другими словами, если в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$ выбран некий репер, то каждой точке $M \in \mathcal{A}_n$ будет однозначно сопоставлен столбец из n чисел — её координат, называемый координатным столбцом точки M: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\intercal$. Все координаты точки O равны нулю, так как ей соответствует нулевой вектор $\overrightarrow{OO}$. Очевидно, что в выбранном репере любая точка однозначно определяется столбцом её координат.

Если M и N — две точки аффинного пространства с координатами $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $N(y_1, y_1, \ldots, y_n)$, то в силу равенства (14.1) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$ или $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$, т.е. координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ равны разности координат его конца и начала: $\overrightarrow{MN}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)$. Соответственно, координатный столбец вектора $\overrightarrow{MN}$ равен разности координатных столбцов точек N и M.

Рассмотрим теперь, как преобразуются координаты точки аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ при переходе от одного репера к другому.

Пусть начальная точка зафиксирована, а в линейном пространстве $\mathcal{L}_n$, соответствующем $\mathcal{A}_n$, выбирается новый базис. Старый базис $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^n$ и новый $\{\vec{e}\,'_j\}_{j=1}^n$ связаны соотношением (12.26), где P — матрица перехода (12.25). Так как координаты точки M — это, по определению, координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, то новые координаты x'_i, $i = \overline{1, n}$, будут выражаться через старые x_i, $i = \overline{1, n}$, согласно (12.30).

Рассмотрим теперь преобразование, не определенное ранее для линейного пространства: пусть начальная точка O заменяется новой начальной точкой O', координаты которой в старом репере равны $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Для любой точки M из $\mathcal{A}_n$, согласно (14.6), имеем

$$\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM}. \tag{14.9}$$

Координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вектора $\overrightarrow{OM}$ — это координаты точки M в старом репере. Координаты $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ вектора $\overrightarrow{O'M}$ — это координаты точки M в новом репере. Из равенства (14.9) получим $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$ или в координатах

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \alpha_1 \\ x_2 - \alpha_2 \\ \ldots \\ x_n - \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{14.10}$$

♦ Преобразование репера (14.9), (14.10) называется *параллельным переносом.*

В общем случае, когда осуществляются параллельный перенос (14.9) и преобразование базиса линейного пространства (12.26), новые координаты точки M будут определяться соотношением

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{14.11}$$

Это соотношение останется справедливым и в том случае, если координаты x_i' и x_i рассматривать как координаты вектора $\overrightarrow{OM}$. В такой интерпретации формула (14.11) указывает на основное различие между линейными и аффинными пространствами: возможность параллельного переноса в аффинном пространстве.

Аффинное пространство ближе к пространству, изучаемому в элементарной геометрии, чем линейное. Однако в аффинном пространстве по-прежнему не определены такие понятия, как длина, площадь, угол и т.д. Именно поэтому в аффинном пространстве можно исследовать только объекты, не связанные с этими понятиями. Такими объектами являются прямые, плоскости, гиперплоскости и их совокупности.

♢ Несмотря на кажущуюся на первый взгляд ограниченность и простоту этих объектов, их исследование позволяет решать целый класс задач в самых различных приложениях.

15. Плоскости в аффинном пространстве

Понятие плоскости в аффинном пространстве можно ввести, отталкиваясь от понятия многообразия (13.13) линейного пространства. Мы поступим, однако, по-другому.

Пусть в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$ с репером $(0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ задана точка N, а в соответствующем линейном пространстве $\mathcal{L}_n$ зафиксировано некоторое подпространство $\mathcal{L}_r$.

♦ Множество всех точек $M \in \mathcal{A}_n$, для которых $\overrightarrow{NM} \in \mathcal{L}_r$, называется *$r$-мерной плоскостью* π_r, проходящей через точку N параллельно подпространству $\mathcal{L}_r$. При этом подпространство $\mathcal{L}_r$ называется *направляющим подпространством*, а точка M — *текущей точкой* плоскости π_r.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) если $r = 0$, то плоскость состоит из одной точки N. Поэтому каждую точку аффинного пространства можно рассматривать как нульмерную плоскость;
б) если $r = n$, то плоскость совпадает со всем пространством $\mathcal{A}_n$;
в) если $r = 1$, то такую плоскость называют прямой;
г) если $r = n - 1$, то такую плоскость называют гиперплоскостью.

♢ Для трехмерного аффинного пространства $\mathcal{A}_3$ одномерные плоскости совпадают с прямыми линиями, рассматриваемыми в элементарной геометрии. Аналогично двумерные плоскости (гиперплоскости) в этом случае совпадают с обычными плоскостями.

Теорема 15.1. *Всякая r-мерная плоскость π_r аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ сама является r-мерным аффинным пространством $\mathcal{A}_r$.*

Доказательство. Пусть π_r — плоскость пространства $\mathcal{A}_n$, проходящая через точку N параллельно подпространству $\mathcal{L}_r \subset \mathcal{L}_n$. Выберем в этой плоскости (рис. 3) две произвольные точки M_1 и M_2. По определению аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ им соответствует вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, принадлежащий $\mathcal{L}_n$. С другой стороны, по определению плоскости π_r, векторы $\overrightarrow{NM_1}$ и $\overrightarrow{NM_2}$ принадлежат подпространству $\mathcal{L}_r$. Но тогда, согласно (14.1), вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{NM_2} - \overrightarrow{NM_1}$ также принадлежит $\mathcal{L}_r$.

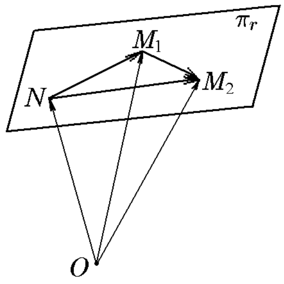


Рис. 3.

Таким образом, каждому вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$ из $\mathcal{L}_r$ поставлена в соответствие упорядоченная пара точек M_1 и M_2. Это и означает, что на пространстве $\mathcal{L}_r$ определено аффинное пространство $\mathcal{A}_r$.

Следствие 15.1.1. Если плоскость π_r проходит через начальную точку O (N совпадает с O) параллельно подпространству $\mathcal{L}_r$, то множество радиус-векторов её точек образует линейное пространство, совпадающее с $\mathcal{L}_r$.

Следствие 15.1.2. Если точкам $N, M_1, M_2, \ldots, M_r \in \mathcal{A}_n$ соответствует линейно независимая система векторов $\overrightarrow{NM_1}$, $\overrightarrow{NM_2}$, $\ldots$, $\overrightarrow{NM_r}$, то через эти точки проходит r-мерная плоскость π_r и притом только одна.

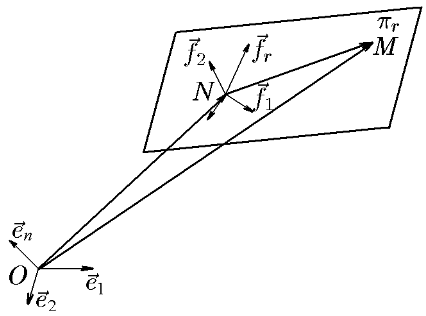


Рис. 4.

Рассмотрим теперь, каким образом определяются координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ текущей точки M заданной плоскости π_r из аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ с репером $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$.

Пусть π_r — плоскость, проходящая через точку N параллельно подпространству $\mathcal{L}_n$. Будем считать, что точка N задается координатами $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, а направляющее подпространство $\mathcal{L}_r$ — линейная оболочка линейно независимой системы векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_r$. Тогда радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ текущей точки плоскости (рис. 4) можно записать в виде

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{ON} + t_1\vec{f}_1 + t_2\vec{f}_2 + \ldots + t_r\vec{f}_r, \tag{15.1}$$

где $t_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, r}$, — некоторые параметры.

Поскольку вектор $\overrightarrow{ON}$ и векторы $\vec{f}_i$, $i = \overline{1, r}$, можно разложить по базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ как

$$\begin{gathered} \overrightarrow{ON} = x_1^{(0)}\vec{e}_1 + x_2^{(0)}\vec{e}_2 + \ldots + x_n^{(0)}\vec{e}_n, \\ \vec{f}_i = f_{i1}\vec{e}_1 + f_{i2}\vec{e}_2 + \ldots + f_{in}\vec{e}_n, \quad i = \overline{1, r}, \end{gathered} \tag{15.2}$$

то из векторного равенства (15.1) получим n покоординатных равенств

$$\begin{aligned} &x_1 = x_1^{(0)} + f_{11}t_1 + f_{21}t_2 + \ldots + f_{r1}t_r, \\ &x_2 = x_2^{(0)} + f_{12}t_1 + f_{22}t_2 + \ldots + f_{r2}t_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_n = x_n^{(0)} + f_{1n}t_1 + f_{2n}t_2 + \ldots + f_{rn}t_r. \end{aligned} \tag{15.3}$$

♦ Равенства (15.3) называются *параметрическими уравнениями плоскости* π_r в репере $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$.

Легко установить, что геометрическое место точек, определяемых параметрическими уравнениями (15.3) при всевозможных значениях параметров t_i, $i = \overline{1, r}$, есть плоскость π_r, проходящая через точку $N(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ параллельно подпространству $\mathcal{L}_r$ с базисом $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_r)$. Действительно, система (15.3) равносильна векторному равенству (15.1), которое означает, что $\overrightarrow{NM}$ принадлежит $\mathcal{L}_r$, т.е. точка M есть текущая точка плоскости π_r.

Если в системе (15.3) величины $x_i^{(0)}$, $i = \overline{1, n}$, положить равными нулю, то такая однородная система

$$\begin{aligned} x_1 &= f_{11}t_1 + f_{21}t_2 + \ldots + f_{r1}t_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= f_{1n}t_1 + f_{2n}t_2 + \ldots + f_{rn}t_r \end{aligned} \tag{15.4}$$

будет представлять систему параметрических уравнений направляющего подпространства $\mathcal{L}_r$.

Действительно, при $x_i^{(0)} = 0$, $i = \overline{1, n}$, система (15.4) определяет плоскость, проходящую через начальную точку O, которая, согласно следствию 15.1.2, совпадает с $\mathcal{L}_r$.

Рассмотрим частный случай системы (15.3) при $r = 1$. В этом случае параметрические уравнения

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(0)} + f_1 t, \\ x_2 &= x_2^{(0)} + f_2 t, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= x_n^{(0)} + f_n t \end{aligned} \tag{15.5}$$

определяют одномерную плоскость π_1, т.е. прямую. Исключив в системе (15.5) параметр t, получим

$$\frac{x_1 - x_1^{(0)}}{f_1} = \frac{x_2 - x_2^{(0)}}{f_2} = \ldots = \frac{x_n - x_n^{(0)}}{f_n} = t. \tag{15.6}$$

♦ Уравнения (15.6) называются *каноническими*, а (15.5) — *параметрическими уравнениями прямой в пространстве* $\mathcal{A}_n$.

◊ Уравнения (15.6) имеют смысл и в том случае, если некоторые из знаменателей обращаются в нуль. Тогда следует приравнять нулю и соответствующий числитель.

Пример 15.1. Записать канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки: $N(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, $N_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$.

Решение. В этом случае базис направляющего пространства $\mathcal{L}_1$ состоит из одного вектора $\overrightarrow{NN_1} = (x_1^{(1)} - x_1^{(0)}, x_2^{(1)} - x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(1)} - x_n^{(0)})$, в результате чего система (15.6) примет вид

$$\frac{x_1 - x_1^{(0)}}{x_1^{(1)} - x_1^{(0)}} = \frac{x_2 - x_2^{(0)}}{x_2^{(1)} - x_2^{(0)}} = \ldots = \frac{x_n - x_n^{(0)}}{x_n^{(1)} - x_n^{(0)}} = t. \tag{15.7}$$

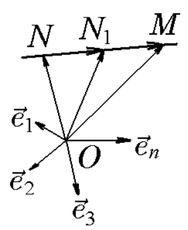


Рис. 5.

♦ Уравнение (15.7) называется *уравнением прямой, проходящей через две заданные точки*.

Пример 15.2. Записать параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку $N(1,2,1,4) \in \mathcal{A}_4$ в направлении подпространства, которым является линейная оболочка порождающей системы векторов

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}. \qquad (15.8)$$

Решение. Как было показано в примере 13.2, порождающая система векторов (15.8) определяет линейное подпространство $\mathcal{L}_3$, базисом которого можно выбрать, например, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_5$. Воспользовавшись формулой (15.1), можно записать уравнение искомой плоскости в векторной форме

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \vec{e}_1 t_1 + \vec{e}_3 t_2 + \vec{e}_5 t_3, \qquad (15.9)$$

где $\overrightarrow{ON}$ — радиус-вектор, координаты которого совпадают с координатами точки N.

Координатная запись векторного уравнения (15.9) с учетом (15.8) имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + t_1 + t_2, \\ x_2 &= 2 + t_2 + t_3, \\ x_3 &= 1 + t_2 + 2t_3, \\ x_4 &= 4 - t_1 + t_2 + 3t_3 \end{aligned} \qquad (15.10)$$

и является системой параметрических уравнений плоскости типа (15.3). Таким образом, искомая плоскость представляет собой трехмерное аффинное пространство $\mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}_4$.

$\Diamond$ Рассмотренные ранее неоднородные (10.1) и однородные (10.3) системы линейных уравнений допускают геометрическую интерпретацию в терминах плоскостей и прямых в аффинном пространстве.

Запишем неоднородную

$$AX = B \qquad (15.11)$$

и однородную

$$AX = 0 \qquad (15.12)$$

системы линейных уравнений, где

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rang} A = s, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (15.13)$$

Теорема 15.2. *Все решения системы* (15.11) *образуют в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$ плоскость π_r размерности $r = n - s$, где $s = \operatorname{rang} A$. Справедливо и обратное утверждение.*

Доказательство. Напомним, что решения системы (15.11) определяются формулами (10.6), которые можно рассматривать как параметрические уравнения (15.3) плоскости π_r. Действительно, частным решением неоднородной системы $\widetilde{X}$ в (10.6) задается координатный столбец точки, через которую проходит плоскость π_r. При этом линейное оболочка фундаментальной системы решений $\mathcal{L}_r$, $r = n - s$, является направляющим подпространством плоскости. Наконец, произвольные постоянные C_i, $i = \overline{1, r}$, пробегая всевозможные значения независимо друг от друга, играют роль параметров t_i из (15.3).

Смысл обратного утверждения заключается в том, что в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$ любая плоскость π_r может быть задана системой линейных уравнений вида (15.11) с матрицей A ранга $s = n - r$.

Действительно, исключив в параметрических уравнениях (15.3) параметры t_i, $i = \overline{1, r}$, получим систему уравнений вида (15.11) с матрицей A ранга $s = n-r$, что и подтверждает высказанное выше утверждение.

Следствие 15.2.1. Однородная система (15.12) определяет плоскость, проходящую через начальную точку. Напротив, только плоскость, проходящая через начальную точку, описывается однородной системой (15.12).

Следствие 15.2.2. Нетривиальные решения однородной системы (15.12) определяют подпространство $\mathcal{L}_r$, которое является направляющим пространством плоскости, задаваемой неоднородной системой (15.11).

Тривиальное решение (15.12) определяет нульмерное направляющее подпространство. При этом соответствующая неоднородная система (15.11) имеет единственное решение и определяет нульмерную плоскость, представляющую собой точку, координаты которой задаются решением этой системы.

Следствие 15.2.3. Гиперплоскость определяется одним линейным алгебраическим уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b. \tag{15.14}$$

Согласно определению, гиперплоскость представляет собой $(n - 1)$-мерную плоскость π_{n-1}. Следовательно, ранг системы линейных уравнений, определяющей эту плоскость, должен быть равен единице. Но это и означает, что система состоит из одного уравнения.

В связи с этим каждое из уравнений системы (15.11) можно рассматривать как уравнение некоторой гиперплоскости. В результате каждую r-мерную плоскость можно рассматривать как пересечение некоторых гиперплоскостей, количество которых равно $s = n - r$. В частности, прямая в $\mathcal{A}_n$ всегда всегда есть пересечение $(n - 1)$ гиперплоскостей. Например, в трехмерном пространстве $\mathcal{A}_3$ прямая есть пересечение двух двумерных гиперплоскостей (двух обычных плоскостей в смысле элементарной геометрии).

Следствие 15.2.4. Если система линейных уравнений (15.11) имеет единственное решение и определяет нульмерное пространство, т.е. точку, то эта точка принадлежит сразу всем гиперплоскостям из системы (15.11) и является точкой их пересечения.

Следствие 15.2.5. Если система (15.11) несовместна, то геометрически это означает, что нет ни одной точки, принадлежащей сразу всем гиперплоскостям, которые задаются уравнениями системы (15.11).

Следствие 15.2.6. Из свойств системы линейных уравнений (15.11) известно, что она имеет бесконечное множество эквивалентных ей систем. Возможность перехода от системы (15.11) к эквивалентным ей системам геометрически означает, что плоскость π_r можно определять как пересечение различных наборов независимых $s = n-r$ гиперплоскостей. Независимость гиперплоскостей (15.14) понимается в смысле линейной независимости уравнений, входящих в любую систему, определяющую плоскость π_r.

Пример 15.3. Найти параметрическое уравнение плоскости, заданной системой линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5&=1,\\ 3x_1-x_2+x_3+4x_4+3x_5&=4,\\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4+x_5&=0. \end{aligned} \tag{15.15}$$

В аффинном пространстве $\mathcal{A}_5$ указать какую-либо точку, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство этой плоскости.

Решение. Воспользуемся результатами примера 10.1, в котором получено общее решение системы (15.15). Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 положим равными параметрам t_1, t_2, t_3. Получим систему параметрических уравнений плоскости

$$\begin{aligned} x_1&=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}t_1-\frac{3}{4}t_2-t_3,\\ x_2&=-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}t_1+\frac{7}{4}t_2,\\ x_3&=t_1,\\ x_4&=t_2,\\ x_5&=t_3. \end{aligned} \tag{15.16}$$

Из (15.16) следует, что система (15.15) определяет в аффинном пространстве $\mathcal{A}_5$ трехмерную плоскость π_3, проходящую через точку N с координатами $(5/4, -1/4, 0, 0, 0)$. Придавав параметрам t_1, t_2, t_3 другие значения, можно получить координаты других точек, принадлежащих плоскости π_3. Например, при $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ получим точку N_1 с координатами $(-3/4, 13/4, 1, 1, 1)$.

Из примера 10.1 также следует, что приведенная система системы (15.15), т.е. однородная система

$$\begin{aligned} x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5&=0,\\ 3x_1-x_2+x_3+4x_4+3x_5&=0,\\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4+x_5&=0 \end{aligned} \tag{15.17}$$

обладает фундаментальной системой решений

$$X_1=\begin{pmatrix}-1/4\\7/4\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}-3/4\\7/4\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad X_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{15.18}$$

Поскольку векторы (15.18) являются линейно независимыми, то их линейная оболочка и образует направляющее подпространство $\mathcal{L}_3$ плоскости π_3.

Пример 15.4. При каких значениях λ система линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1+\lambda x_2+2x_3&=0,\\ 4x_1-x_2+7x_3&=0,\\ 2x_1+x_2+3x_3&=0 \end{aligned} \tag{15.19}$$

определяет прямую линию в трехмерном аффинном пространстве $\mathcal{A}_3$. Записать каноническое уравнение этой прямой.

Решение. Система (15.19) была рассмотрена в примере 9.2, где было найдено, что матрица системы
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
имеет ранг $\operatorname{rang} A = 3$ при $\lambda \neq -1$ и $\operatorname{rang} A = 2$ при $\lambda = -1$.

В первом случае, при $\lambda \neq -1$, однородная система (15.19) имеет только тривиальное решение, т.е. определяет нульмерное пространство, которым является начальная точка $O(0, 0, 0)$. Во втором случае, при $\lambda = -1$, система имеет нетривиальное решение, при этом фундаментальная система решений состоит из одного вектора
$$X_1 = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{15.20}$$
т.е. система (15.19) определяет прямую линию. С помощью вектора (15.20) легко записать ее параметрические уравнения
$$x_1 = -\frac{5}{3}t, \qquad x_2 = \frac{1}{3}t, \qquad x_3 = t.$$
Исключив параметр t, получим каноническое уравнение прямой
$$-\frac{3}{5}x_1 = 3x_2 = x_3.$$
Нетрудно заметить, что прямая проходит через начальную точку $O(0, 0, 0)$.

Пример 15.5. Записать систему линейных уравнений плоскости π_3 в форме (15.11), заданной в примере 15.2 параметрическими уравнениями.

Решение. Запишем систему параметрических уравнений
$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + t_1 + t_2, \\ x_2 &= 2 + t_2 + t_3, \\ x_3 &= 1 + t_2 + 2t_3, \\ x_4 &= 4 - t_1 + t_2 + 3t_3. \end{aligned} \tag{15.21}$$
Из первых трех уравнений выразим параметры t_1, t_2, t_3 через координаты x_1, x_2, x_3 текущей точки плоскости π_3. Для этого уравнения перепишем в виде
$$\begin{aligned} t_1 + t_2 &= 1 - x_1, \\ t_2 + t_3 &= 2 - x_2, \\ t_2 + 2t_3 &= 1 - x_3. \end{aligned} \tag{15.22}$$
Проведя над расширенной матрицей системы (15.22) следующие элементарные преобразования:
$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 - x_2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 - x_3 \end{array}\right) \underset{S_3 - S_2}{\sim} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 - x_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 + x_2 - x_3 \end{array}\right) \overset{S_2 - S_3}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 - x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 - 2x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 + x_2 - x_3 \end{array}\right) \overset{S_1 - S_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 - x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 - 2x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 + x_2 - x_3 \end{array}\right),$$

получим

$$\begin{aligned} t_1 &= -2 - x_1 + 2x_2 - x_3, \\ t_2 &= 3 - 2x_2 + x_3, \\ t_3 &= -1 + x_2 - x_3. \end{aligned} \tag{15.23}$$

Подставив (15.23) в четвертое уравнение системы (15.21), найдем связь между координатами текущей точки плоскости π_3:

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 6. \tag{15.24}$$

Неудивительно, что мы получили одно уравнение, поскольку трехмерная плоскость π_3 в четырехмерном аффинном пространстве $\mathcal{A}_4$ является гиперплоскостью, которая, согласно следствию 15.2.4, всегда задаётся одним уравнением.

Пример 15.6. Найти размерность n аффинного пространства, в котором прямая является одновременно гиперплоскостью.

Решение. В двумерном аффинном пространстве $\mathcal{A}_2$ гиперплоскостью является одномерная плоскость, т.е. прямая. Следовательно, $n = 2$.

Пример 15.7. Найти общее уравнение гиперплоскости аффинного пространства $\mathcal{A}_n$, проходящей через n точек $N_1, N_2, \ldots, N_n$.

Решение. В параметрической форме решение этой задачи даётся формулой (15.1), в которой роль векторов $\overrightarrow{ON}$, $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_{n-1}$ играют векторы $\overrightarrow{ON_1}$ и $\overrightarrow{N_1N_2}$, $\overrightarrow{N_1N_3}$, $\ldots$, $\overrightarrow{N_1N_n}$ соответственно. Однако, как показано в примере 15.5, переход от параметрических уравнений к общим связан с большим объемом вычислений. Поэтому возникает потребность в получении общего уравнения, не требующего предварительного нахождения параметрических уравнений.

Итак, пусть $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n)}$, $i = \overline{1,n}$, — координаты точек $N_1, \ldots, N_n$ соответственно. Согласно следствию 15.2.3, уравнение гиперплоскости всегда задаётся одним уравнением (15.14), а именно

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{15.25}$$

где x_i, $i = \overline{1,n}$, — координаты текущей точки гиперплоскости $N(x_1, \ldots, x_n)$. Так как искомая гиперплоскость проходит через точки $N_1, \ldots, N_n$, то их координаты должны удовлетворять уравнениям (15.25), т.е. должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} &a_1x_1^{(1)} + a_2x_2^{(1)} + \ldots + a_nx_n^{(1)} = b, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &a_1x_1^{(n)} + a_2x_2^{(n)} + \ldots + a_nx_n^{(n)} = b, \end{aligned} \tag{15.26}$$

каждое из которых определяет правую часть уравнения гиперплоскости (15.25), т.е. величину b через коэффициенты a_i, $i = \overline{1,n}$.

Вычтя любое из уравнений (15.26), например первое, из остальных, а также из уравнения (15.25), получим однородную систему n уравнений

$$AY = 0 \tag{15.27}$$

с матрицей

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_1^{(1)} & x_2 - x_2^{(1)} & \dots & x_n - x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} - x_1^{(1)} & x_2^{(2)} - x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(2)} - x_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} - x_1^{(1)} & x_2^{(n)} - x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(n)} - x_n^{(1)} \end{pmatrix} \qquad (15.28)$$

и столбцом

$$Y = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}. \qquad (15.29)$$

Систему (15.27) можно рассматривать как линейную алгебраическую систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_i из (15.25), составляющих столбец Y. Поскольку коэффициенты a_i не должны быть равны нулю одновременно, то система (15.27) должна иметь нетривиальные решения. Как известно, условием существования нетривиального решения однородной системы является равенство нулю определителя матрицы ее системы, т.е.

$$\det A = \begin{vmatrix} x_1 - x_1^{(1)} & x_2 - x_2^{(1)} & \dots & x_n - x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} - x_1^{(1)} & x_2^{(2)} - x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(2)} - x_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} - x_1^{(1)} & x_2^{(n)} - x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(n)} - x_n^{(1)} \end{vmatrix} = 0. \qquad (15.30)$$

Если

$$\operatorname{rang} \tilde{A} = n - 1, \qquad (15.31)$$

где $\tilde{A}$ — матрица, полученная из A удалением i-й строки, то уравнение (15.30) есть уравнение искомой гиперплоскости. Действительно, разложив определитель (15.30) по элементам первой строки, получим уравнение

$$a_1(x_1 - x_1^{(1)}) + a_2(x_2 - x_2^{(1)}) + \ldots + a_n(x_n - x_n^{(1)}) = 0 \qquad (15.32)$$

с коэффициентами a_i, равными определителям $(n-1)$-го порядка, порождаемым матрицей A. Согласно условию (15.31), среди этих определителей есть хотя бы один, отличный от нуля, и, следовательно, хотя бы один отличный от нуля коэффициент a_i.

При выводе уравнения (15.30) мы особо выделили точку N_1. Очевидно, что вместо неё аналогичным образом можно использовать любую другую точку. Более того, уравнение (15.30) можно записать в виде, «симметричном» относительно всех точек, определяющих плоскость:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (15.33)$$

Действительно, вычтя в определителе (15.33) вторую строку из всех остальных и разложив его затем по последнему столбцу, получим уравнение (15.30). Заметим, что на практике удобнее использовать ту строку, которая в определителях (15.30) или (15.33) даёт наибольшее количество нулей.

Отметим, что если n точек дополнить $(n+1)$-й точкой с координатами $N_{n+1}(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, \ldots, x_n^{(n+1)})$, то условие (15.30) в виде

$$\begin{vmatrix} x_1^{(n+1)} - x_1^{(1)} & x_2^{(n+1)} - x_2^{(1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} - x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} - x_1^{(1)} & x_2^{(2)} - x_2^{(1)} & \ldots & x_n^{(2)} - x_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n)} - x_1^{(1)} & x_2^{(n)} - x_2^{(1)} & \ldots & x_n^{(n)} - x_n^{(1)} \end{vmatrix} = 0$$

или условие (15.31) в виде

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} & 1 \\ x_1^{(n+1)} & x_2^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{15.34}$$

можно рассматривать как условие принадлежности точки N_{n+1} к некоторой гиперплоскости π_{n-1} из пространства $\mathcal{A}_n$.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\operatorname{rang} \tilde{A} \leqslant n-2. \tag{15.35}$$

В этом случае нетривиальное решение системы $\tilde{A}Y = 0$ определено, по меньшей мере, с точностью до двух произвольных постоянных:

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ \ldots \\ a_n^{(1)} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} a_1^{(2)} \\ \ldots \\ a_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Подставив это решение в (15.25), получим

$$C_1 \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)}(x_i - x_i^{(1)}) + C_2 \sum_{i=1}^{n} a_i^{(2)}(x_i - x_i^{(1)}) = 0. \tag{15.36}$$

Отсюда следует, что различным не пропорциональным между собой постоянным C_1 и C_2 будут соответствовать заведомо разные плоскости, проходящие через заданные n точек. По сути, это означает, что система векторов $\overrightarrow{N_1N_2}, \ldots, \overrightarrow{N_1N_n}$ линейно зависима, т.е. по крайней мере один из векторов этой системы является линейной комбинацией остальных. Если из $(n-1)$-го вектора этой системы можно выбрать $n-2$ линейно независимых, то их линейную оболочку можно рассматривать как направляющее подпространство плоскости π_{n-2} размерности $n-2$, которая проходит через эти точки. Тогда множество гиперплоскостей, определяемых уравнением (15.36), будет представлять собой так называемый пучок гиперплоскостей, проходящих через плоскость π_{n-2}, которая, в свою очередь, проходит через заданные n точек.

Отметим, что по мере уменьшения ранга матрицы A число линейно независимых векторов уменьшается вплоть до единственного вектора. В этом случае все n точек лежат на одной прямой π_1, через которую и проходит множество гиперплоскостей (15.27).

Пример 15.8. Для аффинного пространства $\mathcal{A}_4$ записать уравнение гиперплоскости π_3, проходящей через четыре точки: $N_1(1,2,1,4)$, $N_2(2,2,1,3)$, $N_3(2,3,2,5)$, $N_4(1,3,3,7)$.

Решение. Воспользовавшись формулой (15.33), имеем

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычтя вторую строку этого определителя из всех остальных и разложив его затем по первой строке

$$(x_1-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - (x_2-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (x_3-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - (x_4-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

найдем искомое уравнение гиперплоскости

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2.$$

Это уравнение совпадает с уравнением гиперплоскости (15.24), найденным в примере 15.5 и имеющим параметрическую форму (15.21). Легко проверить, что заданные точки N_1, N_2, N_3, N_4 соответствуют значениям параметров $t_1 = t_2 = t_3 = 0$; $t_1 = 1$, $t_2 = t_3 = 0$; $t_2 = 2$, $t_1 = t_3 = 0$; $t_3 = 1$, $t_1 = t_2 = 0$ соответственно.

Пример 15.9. Существует ли в аффинном пространстве $\mathcal{A}_4$ гиперплоскость, проходящая через пять точек: $N_1(1,2,1,4)$, $N_2(2,2,1,3)$, $N_3(2,3,2,5)$, $N_4(1,3,3,7)$, $N_5(3,4,4,7)$.

Решение. Условие принадлежности $(n+1)$-ой точки некоторой гиперплоскости пространства $\mathcal{A}_n$ задается формулой (15.34). Согласно этой формуле, следует проверить выполнение равенства

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Для вычисления этого определителя проведем следующие преобразования:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{S_4-S_1 \\ S_5-S_1}}{\overset{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-S_1}}{\sim}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \underset{S_5-S_2-S_3-S_4}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Наличие в определителе нулевой строки означает выполнение требуемого равенства (15.34), из чего следует существование гиперплоскости, проходящей через заданные точки. Для записи уравнения этой гиперплоскости достаточно четырех точек. Если отбросить точку N_5, оставив точки N_1, N_2, N_3, N_4, то уравнение этой плоскости, как показано в примере 15.8, имеет вид

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2.$$

Пример 15.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением следующих гиперплоскостей аффинного пространства $\mathcal{A}_5$:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 2, \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 = 2. \end{array} \tag{15.37}$$

Решение. Как показано в примере 8.4, система линейных уравнений (15.37) несовместна. Следовательно, нет ни одной точки, принадлежащей сразу всем гиперплоскостям, которые задаются уравнениями системы (15.37).

Пример 15.11. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением следующих гиперплоскостей из аффинного пространства $\mathcal{A}_5$:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 2, \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 = 1. \end{array} \tag{15.38}$$

Решение. Система (15.38) отличается от системы (15.37) из предыдущего примера только правой частью в последнем уравнении. Однако, как показано в примере 8.3, в этом случае система (15.38) совместна и эквивалентна системе

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_2 - x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 0, \end{array} \tag{15.39}$$

которая определяет плоскость, являющуюся трехмерным аффинным пространством как пересечение гиперплоскостей.

Чтобы записать параметрические уравнения плоскости, нужно найти координаты какой-либо точки N, ей принадлежащей, и направляющее подпространство $\mathcal{L}_3$ этой плоскости. Система (15.39) позволяет легко сделать это. Так, положив $x_2 = x_4 = x_5 = 0$, получим $x_1 = 1$, $x_3 = 0$. Это означает, что координаты точки N образуют столбец $(1, 0, 0, 0, 0,)^{\mathsf{T}}$. Учтем, что для системы (15.39) приведенная система

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_2 - x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 0, \end{array}$$

общее решение которой можно записать в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_4 - x_5 \\ x_2 \\ 2x_2 - 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix},$$

имеет фундаментальную систему решений

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то именно её можно выбрать в качестве базиса направляющего подпространства $\mathcal{L}_3$.

В результате, следуя определению (15.3), запишем параметрическую систему уравнений плоскости пересечения гиперплоскостей (15.38)

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - t_1 + t_2 - t_3, \\ x_2 &= t_1, \\ x_3 &= 3t_1 - 5t_2 + 3t_3, \\ x_4 &= t_2, \\ x_5 &= t_3. \end{aligned}$$

$\Diamond$ Рассмотренное выше понятие пересечения гиперплоскостей в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$ можно обобщить на плоскости меньшей размерности и ввести понятия параллельных и скрещивающихся плоскостей.

Исследуем вопрос о взаимном расположении плоскостей в аффинном пространстве.

16. Взаимное расположение плоскостей в аффинном пространстве

I. Пересекающиеся плоскости

$\blacklozenge$ *Пересечением двух плоскостей* π_k и π_l, представленных аффинными пространствами $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{A}_l$ над линейными пространствами $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{L}_l$ соответственно, называется плоскость, представляющая собой аффинное пространство над пересечением линейных пространств $\mathcal{L}_k \cap \mathcal{L}_l$ с начальной точкой, принадлежащей пространствам $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{A}_l$ одновременно.

Рассмотрим некоторые свойства пересечения плоскостей, вытекающие из его определения.

1. Если пересечением пространств $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{L}_l$ является нулевое подпространство, то плоскости пересекаются в одной точке.

2. Если одно из пространств пересекающихся плоскостей является подпространством другого, то соответствующая плоскость целиком принадлежит другой, при этом плоскость пересечения совпадает с исходной плоскостью меньшей размерности. Например, если $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}_l$, то $\pi_k \subset \pi_l$, причём $\pi_m = \pi_k$, где π_m — плоскость пересечения. Очевидно, что при $k = l = m$ все три плоскости совпадают: $\pi_k = \pi_l = \pi_m$.

3. Если плоскость π_m является пересечением плоскостей π_k и π_l, то существует единственная плоскость π_r размерности $r = k + l - m$, содержащая π_k и π_l, причём ни в какую плоскость меньшей размерности плоскости π_k и π_l не могут быть вложены одновременно. Направляющее подпространство $\mathcal{L}_r$ плоскости π_r является суммой направляющих подпространств $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{L}_l$. Эта сумма является прямой суммой только в том случае, когда π_k и π_l пересекаются по нулевому пространству $m = 0$, т.е. в одной точке. Если же $k + l - m = r = n$, роль плоскости π_r играет всё аффинное пространство $\mathcal{A}_n$.

4. Если пересекающиеся плоскости π_k и π_l содержатся в какой-либо плоскости π_r, то размерность m их плоскости пересечения π_m удовлетворяет неравенству

$$m \geqslant k + l - r. \tag{16.1}$$

В частности,

$$m \geqslant k + l - n \tag{16.2}$$

для любых двух пересекающихся плоскостей π_k, π_l из $\mathcal{A}_n$.

Из (16.2) следует, например, что две двумерные плоскости в трехмерном пространстве $\mathcal{A}_3$ не могут пересекаться в одной точке, а пересекаются только по прямой ($m \geqslant 2+2-3=1$) или совпадают ($m=2$). Интересно, что уже в четырехмерном пространстве $\mathcal{A}_4$ две двумерные плоскости могут пересекаться в одной точке (см. пример 16.1), поскольку, согласно (16.2), $m \geqslant 2+2-4=0$ и т.д.

Справедливость сформулированных выше утверждений естественным образом вытекает из теоремы 15.2 и её следствий.

Пример 16.1. Найти пересечение прямой

$$\pi_1 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \tag{16.3}$$

и плоскости

$$\pi_2 : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \tag{16.4}$$

из пространства $\mathcal{A}_3$. Как преобразуются эти уравнения при переносе начальной точки репера в точку пересечения?

Решение. *Первый способ.* Согласно определению, пересечение плоскостей π_1 и π_2 задается решением объединенной системы (16.3) и (16.4):

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ &x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ &2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1. \end{aligned}$$

Эта система имеет единственное решение $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ (см. пример 16.2), что соответствует точке пересечения M с координатным столбцом $(2, -2, 1)^\intercal$.

Второй способ. Запишем уравнения прямой (16.3) в параметрической форме. Для этого выпишем расширенную матрицу системы (16.3) и проведем указанные элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{S_2 - S_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{array}\right) \underset{2S_2/3}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{S_1 + 2S_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

В результате получим общее решение системы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x_3 \\ -2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Заменив свободное неизвестное x_3 параметром t, запишем параметрические уравнения

$$x_1 = 1 + t, \qquad x_2 = -2, \qquad x_3 = t. \tag{16.5}$$

Подставив (16.5) в (16.4), найдем значение параметра $t = 1$, соответствующее точке пересечения прямой и плоскости. Теперь, подставив это значение параметра в (16.5), получим координаты точки пересечения: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, совпадающие с вычисленными первым способом.

Рассмотрим теперь, как преобразуются уравнения прямой (16.3) и плоскости (16.4) при переносе начальной точки репера $O(0,0,0)$ в точку их пересечения $M(2,-2,1)$. Такое преобразование соответствует параллельному переносу на вектор $\overrightarrow{OM} = (2,-2,1)$, при котором координаты преобразуются по закону (14.10). В нашем случае это соответствует преобразованию координат

$$x_1 = x_1' + 2, \qquad x_2 = x_2' - 2, \qquad x_3 = x_3' + 1. \tag{16.6}$$

Подстановка (16.6) в неоднородные уравнения (16.3), (16.4) преобразует их в однородные:

$$\begin{aligned} &x_1' + 2x_2' - x_3' = 0, \\ &x_1' - x_2' - x_3' = 0 \end{aligned}$$

для плоскости и

$$2x_1' + 3x_2' + x_3' = 0$$

для прямой.

Пример 16.2. Найти пересечение двух двумерных плоскостей

$$\pi_2 : \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

и

$$\pi_2' : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10 \end{cases}$$

из четырехмерного аффинного пространства $\mathcal{A}_4$.

Решение. Согласно теореме 15.2, пересечение плоскостей определяется решением объединенной системы

$$\begin{aligned} &4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ &3x_2 + 2x_3 = 1, \\ &2x_1 + 3x_2 - x_4 = 10, \\ &x_1 + x_2 - 5x_3 = -10. \end{aligned}$$

Решение этой системы получено в примере 7.2 и имеет вид

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = 2, \qquad x_4 = -2.$$

Это означает, что в четырехмерном пространстве $\mathcal{A}_4$ две двумерные плоскости π_2 и π_2' пересекаются в одной точке M с координатами $(1,-1,2,-2)^\intercal$.

Пример 16.3. В пространстве $\mathcal{A}_5$ найти пересечение плоскостей, проходящих через начало репера:

$$\pi : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0; \end{cases} \tag{16.7}$$

$$\pi' : \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases} \tag{16.8}$$

Решение. Эти системы рассматривались в примерах 13.3 и 13.5, где было показано, что в пространстве $\mathcal{A}_5$ плоскость π представляет собой трехмерное аффинное пространство $\mathcal{A}_3$, а плоскость π' — двумерное аффинное пространство $\mathcal{A}_2$. Поэтому плоскость π обозначим через π_3, а π' — через π_2.

Согласно теореме 15.2, пересечение плоскостей определяется решением объединенной системы (16.7) и (16.8). Общее решение этой системы было получено в примере 13.5 и совпадает с общим решением системы (16.8), определяющей плоскость π_2. Таким образом, плоскость π_2 целиком принадлежит плоскости π_3, и, следовательно, плоскость пересечения совпадает с исходной плоскостью меньшей размерности, т.е. с π_2.

II. Параллельные плоскости

♦ Плоскость π_k, проходящая через точку M в направлении подпространства $\mathcal{L}_k$, называется *параллельной* плоскости π_l, проходящей через точку N в направлении подпространства $\mathcal{L}_l$, если $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}_l$. При этом принято говорить, что плоскость π_l также параллельна плоскости π_k.

Легко убедиться, что в трехмерном пространстве такое определение полностью согласуется с определением параллельных прямых и плоскостей в элементарной геометрии.

Рассмотрим два частных случая, когда совпадают либо точки M и N, либо размерности плоскостей $k = l$.

Если точек M и N совпадают, то плоскость π_k целиком принадлежит плоскости π_l. Такое включение $\pi_k \subset \pi_l$ означает, что эти плоскости не только пересекаются (по плоскости π_k), но и является параллельными. Так, например, если прямая принадлежит некоторой плоскости, прямая и плоскость являются одновременно как пересекающимися, так и параллельными.

Если же плоскости π_k и π_l имеют одинаковую размерность $k = l$, то подпространства $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{L}_l$ совпадают.

Теорема 16.1. *Для того чтобы плоскости одинаковой размерности π_k и π'_k были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие им приведенные однородные системы уравнений были эквивалентны.*

Доказательство. Пусть плоскость π_k описывается системой $AX = B$, а плоскость π'_k — системой $A'X = B'$. Тогда их направляющие подпространства $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{L}'_k$ описываются однородными системами

$$AX = 0, \qquad A'X = 0, \tag{16.9}$$

соответственно.

Докажем необходимость условия теоремы. Если плоскости π_k и π'_k параллельны, то их направляющие подпространства, согласно определению, совпадают, т.е. $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}'_k$, но это и означает эквивалентность однородных систем (16.9).

Докажем теперь достаточность условия теоремы. Если однородные системы (16.9) эквивалентны, то линейные оболочки их фундаментальных решений определяют одно и то же направляющее подпространство, что и требовалось доказать.

Следствие 16.1.1. Две гиперплоскости параллельны только тогда, когда в заданном репере они определяются уравнениями

$$\begin{aligned} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b,\\ a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n = b' \end{aligned} \tag{16.10}$$

с пропорциональными коэффициентами при координатах текущих точек:

$$\frac{a_1}{a'_1} = \frac{a_2}{a'_2} = \ldots = \frac{a_n}{a'_n}. \tag{16.11}$$

Если все коэффициенты уравнений (16.10) пропорциональны:

$$\frac{a_1}{a'_1} = \frac{a_2}{a'_2} = \ldots = \frac{a_n}{a'_n} = \frac{b}{b'}, \tag{16.12}$$

то гиперплоскости совпадают.

Следствие 16.1.2. В аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$ существует единственная плоскость π'_k, проходящая через данную точку N параллельно заданной плоскости π_k той же размерности. Если $N \in \pi_k$, то π'_k и π_k совпадают, если же $N \notin \pi_k$, плоскости π'_k и π_k не пересекаются.

Пример 16.4. Исследовать взаимное расположение прямой

$$\pi_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \tag{16.13}$$

и плоскости

$$\pi_2 : 4x_1 - x_2 + 3x_3 = \lambda \tag{16.14}$$

в пространстве $\mathcal{A}_3$ в зависимости от значений параметра λ.

Решение. Составим расширенную матрицу системы (16.13) и проведем указанные элементарные преобразования:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{S_2+S_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{S_1-2S_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} -5 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

В результате общее решение системы (16.13) имеет вид $x_2 = -2-5x$, $x_3 = -1-3x_1$. Тогда параметрические уравнения прямой π_1 можно записать следующим образом:

$$x_1 = t, \qquad x_2 = -2 - 5t, \qquad x_3 = -1 - 3t. \tag{16.15}$$

Как следует из (16.15), заданная прямая проходит через точку M с координатами $(0, -2, -1)^\intercal$ (при $t = 0$) в направлении подпространства $\mathcal{L}_1$, являющегося линейной оболочкой вектора $\vec{e} = (1, -5, -3)$.

Чтобы найти направляющее подпространство плоскости π_2, рассмотрим однородное уравнение

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \tag{16.16}$$

отвечающее (16.13). Его общее решение имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 4x_1 + 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \tag{16.17}$$

где x_1 и x_3 — свободные неизвестные. Положив, например, $x_1 = 1$, $x_3 = 0$ или $x_1 = 0$, $x_3 = 1$, найдем два линейно независимых столбца, образующих фундаментальную систему решений уравнения (16.16):

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В силу линейной независимости столбцов X_1 и X_2 векторы

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16.18}$$

можно рассматривать как некоторый базис, линейная оболочка которого определяет двумерное пространство $\mathcal{L}_2$, являющееся направляющим подпространством плоскости π_2.

Нетрудно убедиться, что базисный вектор $\vec{e} = (1, -5, -3)$ направляющего подпространства $\mathcal{L}_1$ прямой π_1 является линейной комбинацией векторов (16.18). Действительно, линейная комбинация $\vec{e} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$ или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

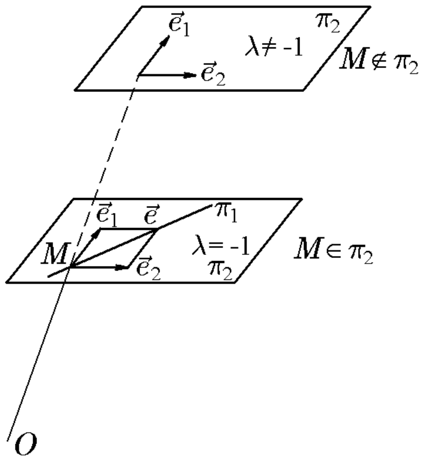


Рис. 6.

имеет место при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -3$. Это означает, что подпространство $\mathcal{L}_1$ целиком принадлежит $\mathcal{L}_2$, т.е. $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$. Отсюда, согласно определению, следует, что плоскость π_2 и прямая π_1 параллельны, причем при любых λ.

Ранее мы установили, что прямая π_1 проходит через точку M с координатами $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$. Определим, при каких значениях λ эта точка будет принадлежать и плоскости π_2. Подставив координаты точки M в уравнение (16.14), найдем, что при $\lambda = 2 - 3 = -1$ точка M принадлежит и прямой, и плоскости.

Таким образом, прямая π_1 и плоскость π_2 параллельны при любых λ. Однако при $\lambda \neq -1$ они параллельны и не пересекаются, тогда как при $\lambda = -1$ прямая π_1 целиком лежит в плоскости π_2, т.е. π_1 и π_2 параллельны и пересекаются по прямой π_1 (рис. 6).

Этот же вывод можно было получить, решив объединенную систему уравнений (16.13) и (16.14), поскольку при $\lambda = -1$ эта система имеет нетривиальное решение (см. пример 7.6), соответствующее прямой π_1, а при $\lambda \neq -1$ она несовместна.

Пример 16.5. Записать уравнение прямой π_1, проходящей через точку $N(1, -4, 2) \in \mathcal{A}_3$ параллельно прямой

$$\pi_1' : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases} \tag{16.19}$$

Решение. *1-й способ.* Как уже было показано в предыдущем примере, прямая π_1' может быть задана параметрическими уравнениями

$$x_1 = t, \quad x_2 = -2 - 5t, \quad x_3 = -1 - 3t. \tag{16.20}$$

Как следует из (16.20), данная прямая проходит через точку M с координатами $(0, -2, -1)^\intercal$ в направлении подпространства $\mathcal{L}_1$, являющегося линейной оболочкой вектора $\vec{e} = (1, -5, -3)$.

Как следует из теоремы 16.1, искомая и заданная прямые должны иметь одно направляющее подпространство. Следовательно, если в уравнениях (16.19) координаты точки M заменить координатами точки N, то мы получим параметрические уравнения искомой прямой π_1 как прямой, проходящей через точку N параллельно прямой π_1' (см. рис. 7):

$$x_1 = 1 + t, \qquad x_2 = -4 - 5t, \qquad x_3 = 2 - 3t. \tag{16.21}$$

Выразив параметр t из первого уравнения и подставив его в остальные два, получим представление прямой π_1 как пересечения двух плоскостей трехмерного пространства $\mathcal{A}_3$:

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &= 1,\\ 3x_1 + x_3 &= 5. \end{aligned} \tag{16.22}$$

2-й способ. Как следует их теоремы 16.1, искомая и заданная прямые должны описываться системами уравнений, приведенные (однородные) системы которых эквивалентны. Следовательно, уравнение прямой π_1 можно искать в виде

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= \lambda,\\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= \mu. \end{aligned} \tag{16.23}$$

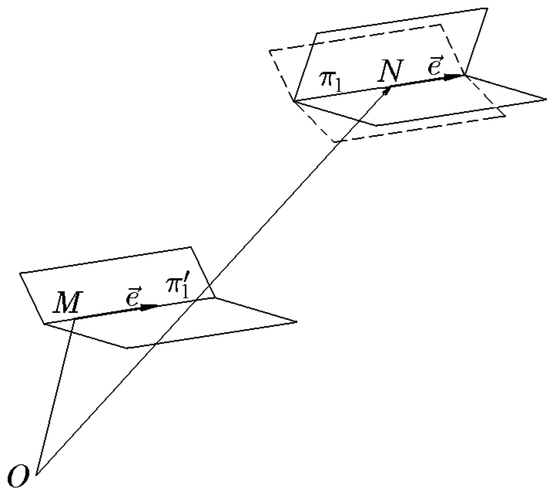


Рис. 7.

Значения величин λ и μ можно найти из условия принадлежности точки N прямой π_1. Подставив координаты точки N $x_1 = 1$, $x_2 = -4$, $x_3 = 2$ в уравнения (16.23), найдем $\lambda = 9$, $\mu = -4$. Таким образом, прямая π_1 является пересечением двух плоскостей

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 9,\\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -4. \end{aligned} \tag{16.24}$$

Нетрудно установить, что система (16.24) эквивалентна системе (16.22), полученной первым способом. Действительно, выписав расширенную матрицу системы (16.22) и проведя указанные элементарные преобразования:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 9\\ 2 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \underset{S_2+S_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 9\\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{S_1-2S_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} -5 & -1 & 0 & -1\\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right),$$

придем к системе

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &= 1,\\ 3x_1 + x_3 &= 5, \end{aligned}$$

совпадающей с (16.22), что и требовалось показать.

Пример 16.6. В пространстве $\mathcal{A}_3$ найти уравнение плоскости π_2, проходящей через точку $N(0, -3, -1)$ параллельно двум прямым

$$\pi_1: \ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9,\\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned} \tag{16.25}$$

и

$$\pi_1': \ \begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 - x_3 &= 25,\\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4. \end{aligned} \tag{16.26}$$

Решение. Как показано в примере 8.1, объединенная система (16.25) и (16.26) имеет единственное решение $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$. Это означает, что плоскости π_1 и π'_1 пересекаются в единственной точке M с такими же координатами. Нетрудно проверить, что заданная точка $N(0, -3, -1)$ не принадлежит ни прямой π_1, ни прямой π'_1. Найдем теперь направляющие подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}'_1$ плоскостей π_1 и π'_1 соответственно. Для этого выпишем приведенные однородные системы систем (16.25) и (16.26)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0,\\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{aligned} \tag{16.27}$$

и

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 0,\\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{aligned} \tag{16.28}$$

Система (16.27) имеет фундаментальную систему решений, состоящую из одного вектора, который обозначим как $\vec{e}_1 = (-11, -2, 3)$ и линейная оболочка которого определяет направляющее подпространство $\mathcal{L}_1$. Соответственно, система (16.28) определяет единственный вектор $\vec{e}\,'_1 = (-7, -4, 3)$, линейная оболочка которого, в свою очередь, определяет линейное подпространство $\mathcal{L}'_1$.

В силу линейной независимости векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}\,'_1$ мы можем построить двумерное пространство $\mathcal{L}_2$, являющееся прямой суммой подпространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}'_1$, т.е. $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}'_1$ с базисом из $\vec{e}_1$ и $\vec{e}\,'_1$. Теперь, следуя определению (15.1) и (15.2), можно записать параметрические уравнения плоскости π_2, проходящей через точку N в направлении подпространства $\mathcal{L}_2$, т.е. параллельно как прямой π_1, так и прямой π'_1:

$$\begin{aligned} x_1 &= -11t_1 - 7t_2,\\ x_2 &= -3 - 2t_1 - 4t_2,\\ x_3 &= -1 + 3t_1 + 3t_2. \end{aligned} \tag{16.29}$$

Выразив из 2-го и 3-го уравнений системы (16.29) параметры t_1 и t_2 через x_2 и x_3:

$$t_1 = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{2}{3}x_3, \qquad t_2 = -\frac{11}{6} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{3}x_3$$

и подставив их в первое уравнение (16.29), получим искомое уравнение плоскости

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -11.$$

Пример 16.7. Исследовать взаимное расположение плоскостей

$$\pi : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0,\\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0,\\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

и

$$\pi' : \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 3x_5 = 0,\\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0,\\ x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 8x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

из пространства $\mathcal{A}_5$.

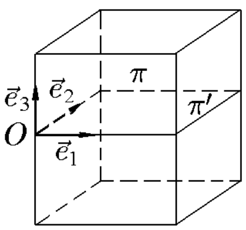


Рис. 8.

Решение. В примере 16.2 было показано, что плоскость π является трехмерной плоскостью в пространстве $\mathcal{A}_5$, а плоскость π' – двумерной, причем плоскость π' целиком принадлежит плоскости π. Согласно определению, такие плоскости считаются не только пересекающимися, но и параллельными (рис. 8).

III. Скрещивающиеся плоскости

♦ Две плоскости называются *скрещивающимися*, если они не пересекаются и не параллельны.

Из элементарной геометрии хорошо известно, что на плоскости нет скрещивающихся прямых. Прямые на плоскости либо пересекаются, либо параллельны. Но уже в трехмерном пространстве $\mathcal{A}_3$ скрещивающиеся прямые существуют. Зато в трехмерном пространстве нет скрещивающихся плоскостей: плоскости либо пересекаются, либо параллельны. Очевидно, что вопрос о существовании пересекающихся плоскостей упирается в соотношение размерностей рассматриваемых плоскостей и аффинного пространства, в котором они расположены. С увеличением размерности пространства его свойства становится более «богатыми», в результате чего появляется возможность строить в нем скрещивающиеся плоскости любых размерностей. Рассмотрим общий прием построения скрещивающихся плоскостей в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$.

Пусть в пространстве $\mathcal{A}_n$ задана плоскость π_l и пусть необходимо построить некоторую скрещивающуюся с ней плоскость π_k. Как следует из примеров, приведенных выше, размерность этой плоскости должна подчиняться некоторому ограничению. Для выяснения этого ограничения предположим, что существует некоторая плоскость π'_k той же размерности k, которая пересекается с плоскостью π_l, но ни в коем случае не параллельна ей. Обозначим через π_m плоскость, по которой пересекаются плоскости π'_k и π_l, а через π_r — плоскость наименьшей размерности, содержащую π'_k и π_l одновременно.

Согласно соотношению (16.1), размерности указанных плоскостей связаны равенством $r = k+l-m$. Если $r = k+l-m < n$, то плоскость π_r не исчерпывает все пространство $\mathcal{A}_n$. В силу этого существует множество точек, не принадлежащих π_r. Из этого множества можно выбрать, если она не задана, некоторую точку M и через эту точку провести искомую плоскость π_k, параллельную π'_k. Последнее осуществляется достаточно просто, поскольку для плоскости π_k в качестве направляющего подпространства следует выбрать направляющее подпространство плоскости π'_k.

Проведя обратные рассуждения, убедимся в правильности нашего построения: плоскость π_k скрещивается с заданной плоскостью π_l. Действительно, плоскость π_k не может быть параллельной плоскости π_l, так как в противном случае или $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}_l$, или $\mathcal{L}_k \supset \mathcal{L}_l$, а это противоречит условию расположения π'_k и π_l: $\mathcal{L}_l \cap \mathcal{L}_k = \mathcal{L}_m$. Теперь убедимся, что π_k и π_l не пересекаются. Проведем через точку M вспомогательную плоскость π'_r, параллельную π_r. Тогда $\pi_k \subset \pi'_r$, и поэтому π_k не может пересечь π_l, ибо в противном случае точка их пересечения принадлежала бы параллельным плоскостям π_r и π'_r. Это означает, что π_k и π_l действительно скрещиваются. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 16.2. *Пусть π'_k, π_m, π_r — плоскости размерностей k, m и r соответственно, причем $\pi_m = \pi'_k \cap \pi_l$, а π_r — плоскость наименьшей размерности, такая, что $\pi'_k \subset \pi_r$, $\pi_l \subset \pi_r$. Тогда если $r = k + l - m < n$, то всякая k-мерная плоскость, которая параллельна плоскости π'_k и не лежит в плоскости π_r, скрещивается с плоскостью π_l.*

Следствие 16.2.1. Если четыре целых положительных числа k, l, m, n удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant m < k, \qquad 0 \leqslant m < l, \qquad k + l - m < n, \tag{16.30}$$

то в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$ всегда найдется пара скрещивающихся плоскостей π_k и π_l с направляющими подпространствами $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{L}_l$ соответственно, пересечение которых $\mathcal{L}_k \cap \mathcal{L}_l = \mathcal{L}_m$ имеет размерность m.

Следствие 16.2.2. Существует единственная плоскость π_{r+1} размерности $r + 1 = k+l-m+1$, содержащая скрещивающиеся плоскости π_k и π_l, определенные в следствии 16.2.1.

$\Diamond$ Смысл последнего утверждения становится прозрачным, если вспомнить, что единственная трехмерная плоскость (пространство) π_3 содержит две скрещивающиеся прямые π_1 и π_1': $r + 1 = 1 + 1 - 0 + 1 = 3$.

Следующее следствие, по сути, обобщает предыдущее.

Следствие 16.2.3. Если скрещивающиеся плоскости π_k и π_l лежат в некоторой плоскости π_s, то

$$s \geqslant k + l - m + 1. \tag{16.31}$$

Следствие 16.2.4. Если скрещивающиеся плоскости π_k и π_l лежат в некотором аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$, то

$$k \leqslant n - 2, \qquad l \leqslant n - 2. \tag{16.32}$$

Эти неравенства следуют из (16.31) при $s = n$ и (16.30), если соотношения $m < k$ и $m < l$ записать в виде $k - m \geqslant 1$, $l - m \geqslant 1$.

Следствие 16.2.5. Гиперплоскость не может скрещиваться с плоскостью любой размерности из заданного пространства $\mathcal{A}_n$.

Действительно, в этом случае условия (16.32) не выполняются, поскольку размерность гиперплоскости равна $n-1$, и, следовательно, должно быть $n-1 \leqslant n - 2$ или $0 \geqslant 1$, что невозможно.

Проиллюстрируем приведенные выше утверждения примерами.

Пример 16.8. Записать уравнение какой-либо плоскости, скрещивающейся в аффинном пространстве $\mathcal{A}_3$ с прямой

$$\pi_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases} \tag{16.33}$$

Решение. С учетом размерности пространства $\mathcal{A}_3$ и плоскости π_1, имеем $n = 3$, $k = 1$. Следовательно, первое неравенство (16.32) выполняется. Из второго неравенства найдем $l \leqslant 1$. Случай $l = 0$ тривиален (так как определяет точку), а случай $l = 1$ соответствует одномерной плоскости π_1'. Таким образом, плоскостью, скрещивающейся с прямой π_1 (16.33), является другая прямая π_1'. Чтобы ее найти, построим вспомогательную прямую π_1'', пересекающуюся с прямой π_1. Это можно сделать, оставив в (16.33) первое уравнение (или первую гиперплоскость) без изменения, а в левой части второго уравнения заменить любой, например первый, коэффициент уравнения. Геометрически такая замена соответствует замене одной гиперплоскости другой, пересекающейся с ней. Итак, для вспомогательной прямой π_1'' имеем

$$\pi_1'' : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases} \tag{16.34}$$

Следующим шагом, согласно теореме 16.2, должно быть построение плоскости π_2, содержащей прямые π_1 и π_1''. Предварительно, однако, убедимся, что прямые π_1 и π_1'' пересекаются, и определим точку их пересечения. Для этого рассмотрим объединенную систему из (16.33) и (16.34)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1. \end{aligned} \tag{16.35}$$

Выписав расширенную матрицу системы (16.35) и проведя указанные элементарные преобразования:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{S_3-S_1}{\overset{S_2-S_4}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{S_4+S_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

найдем решение системы (16.35), или координаты точки пересечения плоскостей π_1 и π_1'':

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -1. \tag{16.36}$$

Вернемся теперь к определению уравнения, описывающего плоскость π_2, которая в пространстве $\mathcal{A}_3$ является гиперплоскостью.

Для этого можно воспользоваться схемой построения решения, примененной в примере 16.6, а можно поступить проще. Непосредственно из системы (16.34) для вспомогательной прямой π_1'' следует, что и прямая π_1, и прямая π_1'' лежат в одной плоскости π_2:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \tag{16.37}$$

Из этого уравнения легко найти точку, лежащую вне этой плоскости. Положив $x_2 = x_3 = 0$, получим $x_1 = 0$. Если мы теперь вместо $x_1 = 0$ выберем, например, $x_1 = 1$, то точка N с координатами $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ не будет принадлежать плоскости π_2, что нам и требуется.

Уравнение искомой прямой π_1', согласно теореме 16.2, будем искать как уравнение прямой, проходящей через точку $N(1, 0, 0)$ и параллельной прямой π_1''. Эти уравнения, как показано в примере 16.5, следует искать в виде, аналогичном (16.34), т.е.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= \mu, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= \nu. \end{aligned} \tag{16.38}$$

Подставив в (16.38) координаты точки $N(1, 0, 0)$, найдем $\mu = 1$, $\nu = 1$.

Таким образом, уравнение прямой π_1', скрещивающейся с исходной прямой π_1, задается системой

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1, \end{aligned} \tag{16.39}$$

которую по стандартной схеме (см. пример 16.6) можно записать в параметрической форме

$$x_1 = 1 - t, \qquad x_2 = 3t, \qquad x_3 = 2t. \tag{16.40}$$

Легко проверить, что прямая π_1' не параллельна прямой π_1 и не пересекается с ней (см. примеры 16.4, 16.5 и рис. 9). Из рис. 9 видно, что линейные оболочки векторов $\vec{e}$ и $\vec{e}\,'$ являются направляющими подпространствами прямых π_1 и π', π_1'' соответственно. Точка N не принадлежит прямым π_1 и π_1''. Плоскость π_2 содержит прямые π_1 и π_1'', а π_2' и содержит прямую π'.

2-й способ. Предложенный метод позволил не только найти уравнение прямой, но и проиллюстрировать общий метод построения скрещивающихся плоскостей. С другой стороны, решение данной конкретной задачи может быть

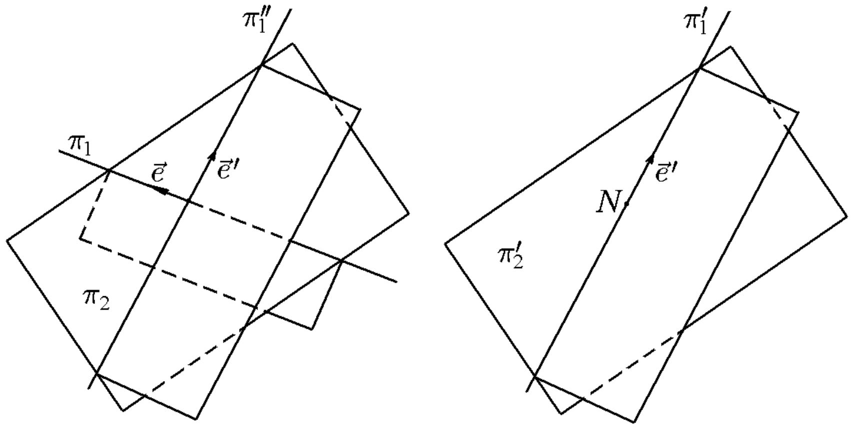


Рис. 9.

упрощено. Действительно, как показано в примере 16.5, исходные уравнения прямой π_1 (16.33) можно записать в параметрической форме:

$$x_1 = t, \qquad x_2 = -2 - 5t, \qquad x_3 = -1 - 3t. \tag{16.41}$$

Отсюда следует, что прямая π_1 проходит через точку $M(0, -2, -1)$ в направлении вектора $\vec{e} = (1, -5, -3)$. Изменив одну из координат точки и вектора, можно получить различные различные прямые, скрещивающиеся с исходной прямой π_1, например

а) $x_1 = 1 + 2t, \qquad x_2 = -2 - 5t, \qquad x_3 = -1 - 3t,$
б) $x_1 = t, \qquad x_2 = 2t, \qquad x_3 = -1 - 3t.$

Если же выбрать $N(1, 0, 0)$ и $\vec{e}' = (-1, 3, 2)$, то получим прямую (16.39), (16.40), найденную первым способом (см. рис. 9).

Пример 16.9. Записать уравнение плоскости, скрещивающейся в аффинном пространстве $\mathcal{A}_4$ с плоскостью

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 5. \tag{16.42}$$

Решение. Плоскость (16.42) в аффинном пространстве $\mathcal{A}_4$ является гиперплоскостью. Таким образом, согласно следствию 16.2.4, не существует никакой плоскости, скрещивающейся с заданной плоскостью.

Напомним, что условия, при выполнении которых две плоскости скрещиваются, задаются теоремой 16.2, а условия их параллельности — теоремой 16.1. В заключение докажем теорему, определяющую достаточные условия пересечения двух плоскостей.

Теорема 16.3 (достаточное условие пересечения плоскостей). *Если π_k и π_l — плоскости из аффинного пространства $\mathcal{A}_n$, причем*

$$k + l - m \geqslant n, \tag{16.43}$$

где m — размерность пересечения $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_k \cap \mathcal{L}_l$ направляющих подпространств $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{L}_l$, то такие плоскости пересекаются.

Доказательство. При $k = l = n$ справедливость утверждения очевидна. При

$$k < l, \qquad l < n$$

плоскости либо параллельны, либо скрещиваются, либо пересекаются. Если π_k и π_l параллельны, то для размерности m, согласно определению, имеем оценку $m = \min(k, l)$. Если π_k и π_l скрещиваются, то, согласно теореме 16.2, выполняется неравенство $k + l - m < n$. Поскольку оба соотношения противоречат (16.43), плоскости π_k и π_l пересекаются, что и требовалось доказать.

До сих пор, чтобы найти пересечение плоскостей, мы искали решение объединенной системы уравнений плоскостей. С этой точки зрения, две плоскости пересекаются, если их объединенная система совместна. Неравенство (16.43) зачастую позволяет ответить на вопрос: пересекаются плоскости или нет, хотя и не дают возможность найти явный вид самого пересечения.

Пример 16.10. Указать наименьшую размерность аффинного пространства, в котором две двумерные плоскости могут пересекаться: а) по одномерной плоскости (прямая), б) по нульмерной плоскости (точка).

Решение. В случае а) размерность пересечения $m = 1$. Отсюда, согласно (16.42), $n = 3$. В случае б) размерность пересечения $m = 0$, отсюда $n = 4$ – больше, чем в предыдущем случае.

17. Системы линейных неравенств и многогранники

В предыдущем разделе мы установили связь между системами линейных уравнений и их геометрической интерпретацией как плоскостей в аффинном пространстве.

Теперь мы попытаемся рассмотреть эти же системы, заменив в них знаки равенства на знаки неравенств, установить геометрический смысл таких систем неравенств и их возможные приложения. Еще раз подчеркнем, что мы рассматриваем действительное аффинное пространство. Это особенно важно именно для этого раздела, что будет объяснено ниже.

Пусть $\mathcal{A}_n$ — аффинное пространство с репером $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$. Пусть в заданном репере координаты точки M определяются столбцом $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^{\intercal}$ и задан вектор $\vec{s}$ с координатами $(s_1, s_2, \dots, s_n)$. Через точку M в направлении вектора $\vec{s}$ проведем прямую, параметрическое уравнение которой, согласно (15.5), имеет вид

$$x_i = x_i^{(0)} + s_i t, \quad i = \overline{1, n}, \tag{17.1}$$

где параметр t может принимать любые значения.

Частным случаем прямой (17.1) являются прямые, проходящие через начальную точку репера в направлении вектора $\vec{s}$ из линейной оболочки какого-либо базисного вектора, например $\vec{e}_j$. Тогда $\vec{s} = (0, 0, \dots, s_j, \dots, 0)$ и параметрические уравнения прямой запишутся как

$$\begin{aligned} &x_i = 0, \qquad i = \overline{1, n}, \quad i \neq j,\\ &x_j = s_j t, \qquad -\infty < t < \infty. \end{aligned} \tag{17.2}$$

♦ Прямые (17.2), $j = \overline{1, n}$, называются *координатными прямыми* или *осями* аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ и обозначаются Ox_j. При этом начальную точку репера называют еще началом координат.

♦ Гиперплоскости $x_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, называются *координатными гиперплоскостями* пространства $\mathcal{A}_n$.

◊ Как следует из (17.2), пересечения определенных координатных гиперплоскостей дают координатные прямые.

♦ В аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$ точка P называется лежащей между точками M и N, если существует такое t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, что

$$\overrightarrow{MP} = t\overrightarrow{MN}. \tag{17.3}$$

Из определения следует, что если точка P лежит между M и N, то все три точки лежат на одной прямой. Кроме того, отношение «лежать между» симметрично: если P лежит между M и N, то P лежит и между N и M.

Пусть M, N, P — попарно различные точки, лежащие на одной прямой π_1, причем $\overrightarrow{MP} = t\overrightarrow{MN}$. Если

а) $t < 0$, то точка M лежит между P и N (рис. 10,*а*);

б) $0 \leqslant t \leqslant 1$, то точка P лежит между M и N (рис. 10,*б*);

в) $t > 0$, то точка N лежит между M и P (рис. 10,*в*).

♦ Точка P называется лежащей по одну сторону с точкой N относительно точки M, если она лежит между M и N (рис. 10,*б*) или N лежит между M и P (рис. 10,*в*). В противном случае точки P и N лежат по разные стороны точки M (рис. 10,*а*).

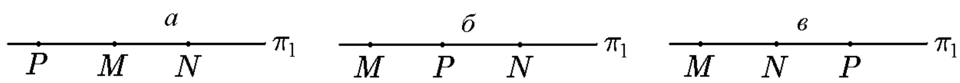


Рис. 10.

♦ *Отрезком MN в пространстве $\mathcal{A}_n$* называется совокупность всех точек, лежащих между M и N, включая сами точки M и N, которые называются *концами отрезка*. Отрезок MM состоит из одной точки M.

Пусть на прямой (17.2) выбраны две точки M и N. Соответствующие им значения параметра t обозначим через t_1 и t_2. Предположим, что $t_1 < t_2$. Тогда отрезок MN можно описать уравнением (17.2) при условии, что параметр t пробегает значения

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{17.4}$$

Если точка M имеет координаты $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, а точка N — соответственно $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, то в качестве направляющего вектора прямой можно выбрать вектор $\vec{s} = \overrightarrow{MN}$ (см. пример 15.1). Тогда $s_i = x_i^{(1)} - x_i^{(0)}$, и для текущей точки, согласно (15.7) имеем

$$x_i = x_i^{(0)} + (x_i^{(1)} - x_i^{(0)})t = (1-t)x_i^{(0)} + x_i^{(1)}t. \tag{17.5}$$

В соотношении (17.5) $t = 0$ соответствует точке M, а $t = 1$ — точке N. В результате отрезок MN будет задан неравенством

$$0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{17.6}$$

Обозначив $\lambda_1 = 1 - t$ и $\lambda = t$, для точек отрезка будем иметь

$$\begin{gathered} x_i = \lambda_1 x_i^{(0)} + \lambda_2 x_i^{(1)}, \qquad i = \overline{1, n}; \\ \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \end{gathered} \tag{17.7}$$

♦ Точка, в которой $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}5$, называется *серединой отрезка MN*.

Наряду с понятием отрезка введем еще одно, более широкое понятие. Пусть точки O и M — некоторые различные точки аффинного пространства.

♦ Совокупность точек $\pi_1(OM)$ аффинного пространства называется *лучом* (*полупрямой*), если $\pi_1(OM)$ состоит из всех точек P, лежащих по ту же сторону точки O, что и точка M. Точка O называется *вершиной луча* $\pi_1(OM)$.

Из определения ясно, что все точки луча $\pi_1(OM)$ принадлежат прямой π_1, проходящей через две точки O и M. Если в подпространстве π_1 выбрать репер $\{O, \overrightarrow{OM}\}$ в качестве координатного, то каждому $x_0 \in \mathbb{R}$ будет отвечать точка P с координатой x_0, для которой $\overrightarrow{OP} = x_0\overrightarrow{OM}$. Ясно, что луч (или полупрямая) $\pi_1(OM)$ состоит из точек прямой π_1, имеющих неотрицательную координату $x_0 \geqslant 0$. Отсюда, в частности, следует, что каждый луч имеет лишь одну вершину O, и если точка N, отличная от O, лежит на луче $\pi_1(OM)$, то лучи $\pi_1(OM)$ и $\pi_1(ON)$ совпадают.

Если теперь на прямой π_1, содержащей луч $\pi_1(OM)$, выбрать точку N, лежащую по другую сторону точки O, нежели точка M, то мы получим другой луч или другую полупрямую, координаты всех точек которой $x_0 \leqslant 0$. Таким образом, на любой прямой π_1 всегда можно выбрать точку O, которая делит эту прямую на два луча (или две полупрямые), причем на одном луче $x_0 > 0$, а на другом $x_0 < 0$. Координата самой точки O считается нулевой (т.е. $x_0 = 0$).

Если прямую π_1 рассматривать как одномерное аффинное пространство $\mathcal{A}_1$, то точка O является для него гиперплоскостью, которая делит его на два луча или два полупространства, для которых $x_0 > 0$ и $x_0 < 0$ соответственно.

Для многомерных плоскостей пространства $\mathcal{A}_n$ аналогом луча, или полупрямой, служит полуплоскость и, в частности, полупространство, к определению которых мы и переходим.

♦ *Открытыми полупространствами* пространства $\mathcal{A}_n$ называются две его части, которые получаются разбиением исходного пространства некоторой гиперплоскостью

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - b = 0. \tag{17.8}$$

Полупространства характеризуются неравенствами

$$\begin{aligned} &a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - b > 0,\\ &a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - b < 0 \end{aligned} \tag{17.9}$$

соответственно.

♦ Открытые полупространства (17.9), дополненные гиперплоскостью (17.8), называются *замкнутыми полупространствами*. Одно из них состоит из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - b \geqslant 0, \tag{17.10}$$

а другое

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - b \leqslant 0. \tag{17.11}$$

◊ Если концы отрезка M и N принадлежат разным открытым полупространствам (17.9), то отрезок MN, согласно следствию 16.2.5, обязательно пересекает гиперплоскость (17.8). Здесь существенно, что аффинное пространство $\mathcal{A}_n$ вещественно, поскольку можно показать, что в комплексном пространстве никакая гиперплоскость не разделяет пространство подобно тому, как одна прямая не разделяет трехмерное действительное пространство. Другими словами, это означает, что если точки M и N в комплексном пространстве не принадлежат какой-либо гиперплоскости, то их можно соединить линией, не пересекающей эту гиперплоскость.

Мы рассмотрели два предельных случая: лучи или полупрямые и полупространства. Однако понятие полуплоскости легко обобщить и на любую плоскость π_k произвольной размерности $k < n$ из $\mathcal{A}_n$. В самом деле, согласно теореме 15.1, плоскость π_k можно рассматривать как подпространство $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_n$. Применив к аффинному пространству $\mathcal{A}_k$ процедуру разбиения (17.10), (17.11), получим понятие полупространства пространства $\mathcal{A}_k$. Эти полупространства называются *полуплоскостями* плоскости π_k.

♦ Множество G точек аффинного пространства называется *выпуклым*, если две произвольные точки M, N, принадлежащие G, можно соединить отрезком MN, целиком лежащим в G.

Простейшими примерами выпуклых множеств служат отрезки, плоскости любой размерности, все пространство $\mathcal{A}_n$. Множество, состоящее из одной точки, и пустой множество также считаются выпуклыми по определению.

Для двумерной плоскости π_2 на рис. 11,*а* изображено выпуклое множество точек, а на рис. 11,*б* — невыпуклое.

Непосредственно из определения следует, что пересечение любой совокупности выпуклых множеств само является выпуклым множеством. Действительно, если точки M и N принадлежат пересечению некоторой совокупности выпуклых множеств, то отрезок MN принадлежит каждому из этих множеств, а значит, и их пересечению.

♦ Точка M выпуклого множества G называется *крайней* (*угловой*), если через нее нельзя провести ни один отрезок, который состоял бы только из точек данного множества и для которого она была бы внутренней точкой.

◊ Точки A, B, C, D на рис. 11,*в* являются крайними (угловыми).

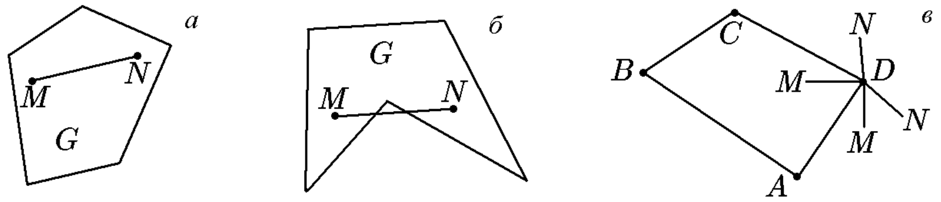


Рис. 11.

Теорема 17.1. *Каждое полупространство является выпуклым множеством.*

Доказательство. Рассмотрим, например, полупространство (17.10), которому принадлежат точки M и N с координатами $(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0})$ и $(x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1})$ соответственно. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{(0)} - b \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{(1)} - b \geqslant 0.$$

Для произвольной точки $P(x_1,\dots,x_n)$ отрезка MN с учетом (17.7) и условия $\lambda_1+\lambda_2 = 1$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - b = \sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda_1 x_i^{(0)} + \lambda_2 x_i^{(1)}) - b(\lambda_1+\lambda_2) =$$
$$= \lambda_1\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{(0)} - b\Big) + \lambda_2\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{(1)} - b\Big) \geqslant 0.$$

Таким образом, точка P, взятая произвольно на отрезке MN, принадлежит полупространству (17.10), следовательно, и весь отрезок принадлежит этому полупространству, что и требовалось доказать.

♦ *Выпуклым многогранником* называется непустое пересечение конечного числа полупространств.

Далее мы будем рассматривать в основном многогранники, образованные пересечением замкнутых полупространств.

Выпуклый многогранник можно рассматривать как часть пространства, вырезанную несколькими гиперплоскостями. На рис. 12 изображены различные многогранники в пространстве $\mathcal{A}_3$. Особенность многогранника на рис. 12,*б* состоит в том, что что он не ограничен, по этой причине его еще иногда называют многогранным телом. Особенностью же многогранника на рис. 12,*в* является то, что он целиком принадлежит некоторой двумерной плоскости π_2 из $\mathcal{A}_3$. В элементарной геометрии такие фигуры называются многоугольниками, мы же будем по-прежнему называть их многогранниками, поскольку понятие угла пока еще не введено.

Пусть в пространстве $\mathcal{A}_n$ заданы k замкнутых полупространств

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i - b_j \leqslant 0, \quad j = \overline{1,k}. \tag{17.12}$$

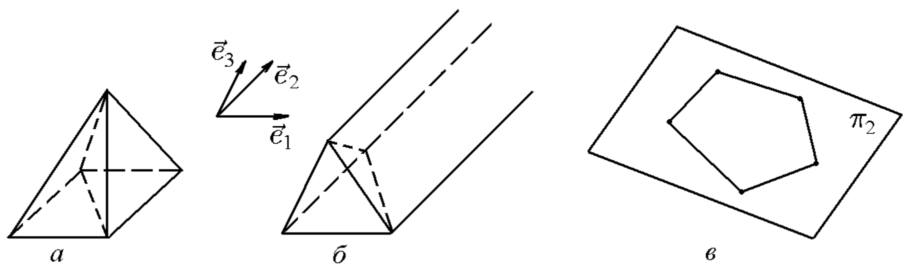


Рис. 12.

Пересечением этих замкнутых полупространств, согласно определению, является некоторый многогранник. Координаты точек, принадлежащих этому многограннику, удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{aligned} &a_1^1x_1+\ldots+a_n^1x_n-b_1\leqslant 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &a_1^kx_1+\ldots+a_n^kx_n-b_k\leqslant 0, \end{aligned} \tag{17.13}$$

т.е. множество решений этой системы линейных неравенств можно интерпретировать как некоторый замкнутый многогранник.

$\lozenge$ Знаки неравенства в (17.13) при необходимости всегда можно поменять на противоположные умножением его коэффициентов на -1.

$\blacklozenge$ Многогранник называется *n-мерным параллелепипедом* в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$, если он задается неравенствами

$$x_i^{(0)}\leqslant x_i\leqslant x_i^{(1)},\qquad i=\overline{1,n}, \tag{17.14}$$

по каждой координатной прямой (17.1). Если числа $x_i^{(0)}=0$, $x_i^{(1)}=1$, т.е.

$$0\leqslant x_i\leqslant 1,\qquad i=\overline{1,n}, \tag{17.15}$$

то он называется параллелепипедом, построенным на базисных векторах $\vec e_1,\ldots,\vec e_n$, исходящих из начала координат — точки O.

$\lozenge$ С помощью преобразований репера $\mathcal{A}_n$ параллелепипед (17.14) всегда можно привести к виду (17.15).

С точки зрения определения (17.14), отрезок является одномерным параллелепипедом, параллелограмм — двумерным параллелепипедом и т.д.

$\blacklozenge$ Часть параллелепипеда (17.15), лежащая в какой-либо координатной плоскости $x_i=0$ или гиперплоскости $x_i=1$, сама является $(n-1)$-мерным параллелепипедом и называется *$(n-1)$-мерной гранью параллелепипеда* (17.15).

Аналогично можно рассматривать грани этих $(n-1)$-мерных граней, грани их граней и т.д. Такой подход приводит к набору k-мерных $(n-1\leqslant k\leqslant 1)$ параллелепипедов. Одномерные грани называются ребрами, а их концы — вершинами параллелепипеда. Очевидно, что вершины параллелепипеда являются его угловыми точками, поскольку вершины — это только те точки, у которых каждая координата равна либо нулю, либо единице.

$\blacklozenge$ Множество точек аффинного пространства $\mathcal{A}_n$, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$|x_i|\leqslant M,$$

называется *ограниченным*.

Очевидно, что множество ограничено только в том случае, если оно целиком содержится в некотором параллелепипеде (17.14). Ограниченные многоугольники показаны на рис. 12,*а* и *в*.

Пример 17.1. На рис. 13,*а* изображено невыпуклое множество G, ограниченное ломаной $ABCDEA$. Показать, что это множество не является пересечением конечного числа полуплоскостей. Построить выпуклый многогранник, содержащий в себе исходное невыпуклое множество G.

Решение. Для наглядности будем штриховать край полуплоскости так, чтобы линии штриховки принадлежали полуплоскости (см. рис. 13). После этого сразу становится видно, что пересечением полуплоскостей могут быть многогранники $AA'CB$, $DD'BC$ или $EDBCA'$ — все они являются выпуклыми. Множество G, ограниченное ломаной $ABCDEA$, не является пересечением всех исходных полуплоскостей, поскольку многогранники AED' и DEA не могут одновременно принадлежать пересечениям всех изображенных полуплоскостей.

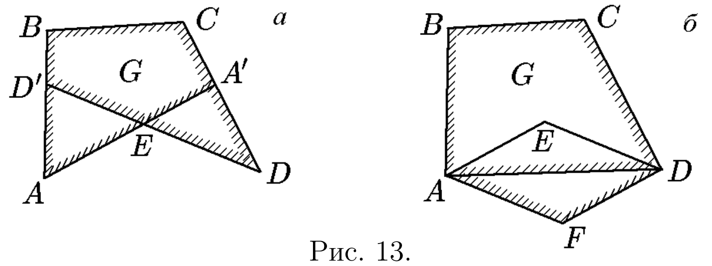


Рис. 13.

Перейдем ко второй части задачи. Если через точки A и D провести полуплоскость в соответствии со штриховкой, приведенной на рис. 13,*б*, то в результате получим выпуклый многогранник $ABCD$, содержащий исходное невыпуклое множество G. Однако такое решение не единственно. Можно, например, провести две дополнительные полуплоскости через отрезки AF и FD в соответствии со штриховкой, приведенной на рис. 13,*б*. В результате получим выпуклый многогранник $ABCDF$, который содержит исходное невыпуклое множество G и, кроме того, выпуклый многогранник $ABCD$.

Указанный пример естественным образом подводит к такому понятию, как выпуклая оболочка множества точек в аффинном пространстве. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое, не обязательно выпуклое, множество точек. Обозначим через $\overline{\mathcal{M}}$ пересечение всех выпуклых множеств, содержащих $\mathcal{M}$. Тогда выпуклое множество $\overline{\mathcal{M}}$ содержит $\mathcal{M}$ и само как пересечение множеств содержится во всяком выпуклом множестве, содержащем $\mathcal{M}$. Тогда выпуклую оболочку можно определить следующим образом.

♦ *Выпуклой оболочкой* множества точек $\mathcal{M}$ аффинного пространства называется минимальное выпуклое множество $\overline{\mathcal{M}}$, содержащее множество $\mathcal{M}$.

Так, многогранник $ABCD$ (рис. 13,*б*) является выпуклой оболочкой множества G.

В тех случаях, когда множество $\mathcal{M}$ состоит из конечного числа точек P_0, P_1, …, P_n, их выпуклая оболочка представляет собой выпуклый многогранник, вершинами которого являются некоторые (не обязательно все!) точки из $\mathcal{M}$. Размерность такого многогранника определяется наибольшим числом линейно независимых векторов $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$, …, $\overrightarrow{P_0P_n}$.

Справедливо и обратное утверждение: всякий выпуклый многогранник представляет собой выпуклую оболочку совокупности своих вершин.

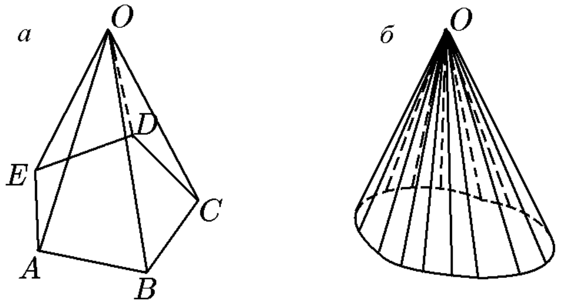


Рис. 14.

Среди всех выпуклых оболочек, как мы увидим ниже, особую роль играют конусы (хотя точнее было бы их называть полуконусами).

♦ *Выпуклым конусом* с вершиной в точке O, натянутым на множество $\mathcal{M}$, называется выпуклая оболочка $\overline{\mathcal{M}}$ множества $\mathcal{M}$, представляющего собой совокупность всех точек некоторого количества лучей с общей вершиной в точке O.

На рис. 14 изображены конусы с конечным и бесконечным количеством лучей в π_3. В частности, аффинное пространство $\mathcal{A}_n$ можно рассматривать как конус с вершиной в начале координат O.

Отметим простейшие свойства выпуклых оболочек, вытекающие из определения.

Свойство 1. Множество $\mathcal{M}$ совпадает со своей выпуклой оболочкой $\overline{\mathcal{M}}$ тогда и только тогда, когда оно выпукло.

Свойство 2. Если $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то выпуклая оболочка множества $\overline{\mathcal{M}}_1$ содержится в $\overline{\mathcal{M}}_2$.

Свойство 3. Если $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ и $\overline{\mathcal{M}}_1$ — выпуклая оболочка множества $\mathcal{M}_1$, то выпуклая оболочка $\overline{\mathcal{M}}$ множества $\mathcal{M}$ совпадает с выпуклой оболочкой объединения $\overline{\mathcal{M}}_1 \cup \mathcal{M}_2$.

Рассмотрим более подробно свойства выпуклых оболочек конечного множества точек. Предварительно проиллюстрируем эти свойства примером.

Пример 17.2. Найти координаты точек выпуклой оболочки $\overline{M}$ множества M, состоящего из трех точек N_1, N_2, N_3.

Решение. Пусть $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, $x_i^{(3)}$, $i = \overline{1,n}$, — координаты точек N_1, N_2, N_3 соответственно. Если точки лежат на одной прямой (рис. 15,*а*), то они образуют некоторый отрезок, например N_1N_2 (или N_1N_3 и др.). Координаты x_i, $i = \overline{1,n}$, любой точки этого отрезка задаются уравнениями (17.7)

$$\begin{gathered} x_i = \lambda_1 x_i^{(1)} + \lambda_2 x_i^{(2)}, \qquad i = \overline{1,n}; \\ \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \end{gathered} \tag{17.16}$$

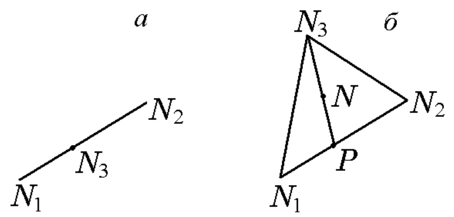


Рис. 15.

Если же точки не лежат на одной прямой, то они образуют трехгранник $N_1N_2N_3$, являющийся выпуклой оболочкой этих точек.

Обозначим через y_i, $i = \overline{1,n}$, координаты произвольной точки P отрезка N_1N_2, а через x_i, $i = \overline{1,n}$, — координаты произвольной точки N отрезка PN_3 (рис. 15,*б*). Координаты точки P, согласно (17.16), удовлетворяют соотношениям

$$y_i = \lambda_1' x_i^{(1)} + \lambda_2' x_i^{(2)}, \quad \lambda_1' + \lambda_2' = 1, \quad \lambda_1' \geqslant 0, \quad \lambda_2' \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{17.17}$$

а координаты точки N — соответственно соотношениям

$$x_i = \lambda_1'' y_i + \lambda_2'' x_i^{(3)}, \quad \lambda_1'' + \lambda_2'' = 1, \quad \lambda_1'' \geqslant 0, \quad \lambda_2'' \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{17.18}$$

Подставив (17.17) в (17.18), найдем

$$x_i = \lambda''(\lambda_1' x_i^{(1)} + \lambda_2' x_i^{(2)}) + \lambda_2' x_i^{(3)} = \lambda_1''\lambda_1' x_i^{(1)} + \lambda_1''\lambda_2' x_i^{(2)} + \lambda_2' x_i^{(3)}.$$

Введя обозначения

$$\lambda_1''\lambda_1' = \lambda_1, \qquad \lambda_1''\lambda_2' = \lambda_2, \qquad \lambda_2 = \lambda_3$$

и учтя, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1''(\lambda_1' + \lambda_2') + \lambda_2'' = \lambda_1'' + \lambda_2'' = 1, \qquad \lambda_k \geqslant 0, \quad k = 1,2,3,$$

имеем

$$\begin{gathered} x_i = \lambda_1 x_i^{(1)} + \lambda_2 x_i^{(2)} + \lambda_3 x_i^{(3)}, \qquad i = \overline{1,n}; \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad \lambda_k \geqslant 0, \quad k = 1,2,3. \end{gathered} \tag{17.19}$$

Перемещая точку P вдоль отрезка N_1N_2, а точку N вдоль отрезка PN_3, мы исчерпаем все множество точек трехгранника $N_1N_2N_3$. Следовательно, координаты точек трехгранника $N_1N_2N_3$ описываются уравнениями (17.19), что и требовалось получить.

Рассуждая аналогичным образом, для k точек $N_1, N_2, \ldots, N_k$ из $\mathcal{A}_n$ получим следующее утверждение.

Теорема 17.2. *Координаты всех точек* $N_1(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $N_2(x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$, $\ldots$, $N_k(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ *выпуклой оболочки* $\overline{\mathcal{M}}$ *(и только их) из* $\mathcal{A}_n$ *можно представить в виде*

$$x_i = \lambda_1 x_i^{(1)} + \lambda_2 x_i^{(2)} + \ldots + \lambda_k x_i^{(k)}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{17.20}$$

где все

$$\lambda_j \geqslant 0, \qquad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1. \tag{17.21}$$

Пример 17.3. Многогранник в некотором базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ задан как выпуклая оболочка системы точек пространства $\mathcal{A}_4$: $O(0,0,0,0)$, $A(1,0,0,0)$, $B(0,1,0,0)$, $C(1,1,0,0)$, $D(0,0,1,0)$, $E(0,0,0,1)$, $F(0,0,1,1)$. Написать систему линейных неравенств, задающих этот многогранник. Найти все его трехмерные грани и координаты всех точек многогранника.

Решение. Начнем с системы неравенств, определяющих выпуклую оболочку заданных точек. Заметим, что координата x_4 у всех заданных точек равна либо 0, либо 1 (рис. 16). Это означает, что гиперплоскость $x_4 = 0$, которая разделяет все пространство $\mathcal{A}_4$ на два полупространства $x_4 < 0$ и $x_4 > 0$, содержит точки O, A, B, C, D, имеющие координату $x_4 = 0$, а точки E и F с координатой $x_4 = 1$ лежат по одну сторону от гиперплоскости $x_4 = 0$ и принадлежат полупространству $x_4 > 0$. Поэтому неравенство $x_4 \geqslant 0$ является первым из искомой системы неравенств, определяющих выпуклую оболочку заданных точек $OABCDEF$. Аналогично можно установить, что гиперплоскость $x_3 = 0$, разделяющая пространство $\mathcal{A}_4$ на два полупространства $x_3 < 0$ и $x_3 > 0$, содержит пять точек O, A, B, C, E, а остальные две точки F и D принадлежат полупространству $x_3 > 0$. Таким образом, координаты всех точек удовлетворяют неравенству $x_3 \geqslant 0$, которое следует включить в систему неравенств, определяющих выпуклую оболочку этих точек. Далее устанавливаем, что гиперплоскость $x_2 = 0$ содержит пять точек O, E, F, D, A и две точки B и C принадлежат полупространству $x_2 > 0$. В свою очередь, гиперплоскость $x_1 = 0$ содержит пять точек O, E, F, D, B и две точки A и C принадлежат полупространству $x_1 > 0$. Таким образом, координаты всех точек удовлетворяют неравенствам $x_2 \geqslant 0$ и $x_1 \geqslant 0$.

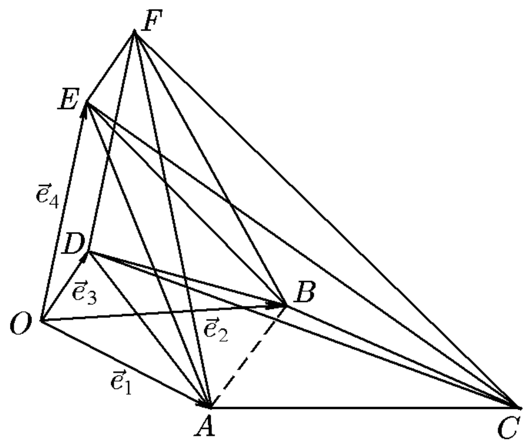


Рис. 16.

Заметим, что координаты всех точек удовлетворяют еще четырем неравенствам: $x_1 + x_3 \leqslant 1$, $x_1 + x_4 \leqslant 1$, $x_2 + x_3 \leqslant 1$, $x_2 + x_4 \leqslant 1$. Действительно, точки A, D, C, F принадлежат гиперплоскости $x_1 + x_3 = 1$, а точки O, B, E — полупространству $x_1 + x_3 < 1$; точки A, E, C, F — гиперплоскости $x_1 + x_4 = 1$, а точки O, B, D — полупространству $x_1 + x_4 < 1$; точки B, D, C, F — гиперплоскости $x_2 + x_3 = 1$, а точки O, A, E — полупространству $x_2 + x_3 < 1$ и, наконец, точки B, E, C, F принадлежат гиперплоскости $x_2 + x_4 = 1$, а точки O, A, D — полупространству $x_2 + x_4 < 1$. Других неравенств, которым бы удовлетворяли координаты сразу всех точек, не существует. Например, координаты точек A, D, E, C удовлетворяют уравнению $x_1 + x_3 + x_4 = 1$, т.е. эти точки принадлежат гиперплоскости $x_1 + x_3 + x_4 = 1$, однако точки O, B и точка F лежат по разные стороны этой гиперплоскости, поскольку координаты точек O, B удовлетворяют неравенству $x_1 + x_3 + x_4 < 1$, а координаты точки F — неравенству $x_1 + x_3 + x_4 > 1$.

Мы привели только один пример гиперплоскости, относительно которой заданные точки лежат по разные стороны. Мы не будем перебирать все возможные гиперплоскости и исследовать взаимное расположение заданных точек и этих гиперплоскостей, хотя для полноценного решения это необходимо. Вместо этого мы рассмотрим другой метод решения задачи, который и подтвердит, что выпуклая оболочка заданной системы точек определяется восемью неравенствами

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0, \tag{17.22}$$

$$x_1 + x_3 \leqslant 1, \quad x_1 + x_4 \leqslant 1, \quad x_2 + x_3 \leqslant 1, \quad x_2 + x_4 \leqslant 1. \tag{17.23}$$

При этом мы одновременно решим вторую часть задачи по нахождению всех трехмерных граней четырехмерного многогранника, являющегося выпуклой оболочкой заданной системы точек.

Заметим прежде, что систему неравенств (17.22), (17.23) можно рассматривать как совокупность замкнутых полупространств, пересечение которых определяет выпуклую оболочку заданных точек, т.е. четырехмерный восьмигранник $OABCDEF$.

Итак, проведем через каждые четыре точки, не лежащие на одной двумерной плоскости, трехмерную плоскость, т.е. гиперплоскость в пространстве $\mathcal{A}_4$. Уравнение такой гиперплоскости имеет вид

$$\sum_{i=1}^{4} a_i x_i = b, \tag{17.24}$$

и если координаты всех точек удовлетворяют одному из неравенств

$$\sum_{i=1}^{4} a_i x_i \geqslant b, \tag{17.25}$$

$$\sum_{i=1}^{4} a_i x_i \leqslant b, \tag{17.26}$$

то соответствующее неравенство входит в совокупность замкнутых гиперплоскостей, пересечение которых определяет искомый многогранник. При этом выпуклая оболочка всех точек, лежащих в гиперплоскости (17.24), будет трехмерной гранью этого многогранника. Если к решению задачи подходить формально, то число плоскостей, проходящих через четыре из заданных семи точек, определится как $C_7^4 = 7!/4!3! = 35$. Однако предварительное исследование взаимного расположения точек может существенно уменьшить число необходимых гиперплоскостей.

Действительно, поскольку вектор $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (см. рис. 16), то четыре точки O, A, B, C лежат в одной двумерной плоскости и могут быть дополнены только тремя точками: или D, или E, или F. Найдем уравнение гиперплоскости, проходящей через точки O, A, B, C, D. Поскольку для нахождения уравнения трехмерной плоскости достаточно четырех точек, то из равноправных точек O, A, B, C, принадлежащих одной двумерной плоскости, оставим только O, A, B. Теперь, согласно определению, найдем уравнение гиперплоскости, проходящей через оставшиеся четыре точки O, A, B, D:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{17.27}$$

Разложив определитель (17.27) по четвертому столбцу, получим уравнение гиперплоскости $\pi_3^{(1)}$: $x_4 = 0$. Мы уже проверили, что координаты всех заданных точек удовлетворяют неравенству $x_4 \geqslant 0$, т.е. все точки принадлежат замкнутому полупространству $x_4 \geqslant 0$. Отсюда следует, что гиперплоскость $x_4 = 0$ является опорной гиперплоскостью, т.е. плоскостью, в которой расположена одна из трехмерных граней выпуклой оболочки системы точек O, A, B, C, D, E, F в четырехмерном пространстве $\mathcal{A}_4$. В свою очередь, эта трехмерная грань представляет собой выпуклую оболочку пяти точек O, A, B, C, D, принадлежащих трехмерной плоскости $\pi_3^{(1)}$ (см. рис. 16) и образует трехмерный пятигранник $OABCD$ (четырехугольную пирамиду с вершиной D). Его двумерными гранями, как легко установить из того же рис. 16, являются один двумерный четырехгранник (параллелограмм) $OACB$ и четыре двумерных трехгранника (треугольника): OBD, BCD, CAD, AOD с общей вершиной D.

Найдем теперь уравнение гиперплоскости, проходящей через точки O, A, B, C, E. Поскольку для нахождения уравнения трехмерной плоскости достаточно четырех точек, то, как и выше, из равноправных точек O, A, B, C оставим только O, A, B и проведем через оставшиеся четыре точки O, A, B, E гиперплоскость $\pi_3^{(2)}$. Согласно определению, имеем

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{17.28}$$

Разложив определитель (17.28) по третьему столбцу, получим уравнение искомой гиперплоскости: $x_3 = 0$. Мы уже проверили, что координаты всех заданных точек удовлетворяют неравенству $x_3 \geqslant 0$, т.е. все точки принадлежат замкнутому полупространству $x_3 \geqslant 0$. Отсюда следует, что гиперплоскость $x_3 = 0$ является опорной гиперплоскостью, т.е. плоскостью, в которой расположена вторая грань выпуклой оболочки системы точек O, A, B, C, D, E, F в четырехмерном пространстве $\mathcal{A}_4$. Эта трехмерная грань — выпуклая оболочка пяти точек O, A, B, C, E, принадлежащих трехмерной плоскости $\pi_3^{(2)}$, — представляет собой, как это следует из рис. 16, трехмерный пятигранник $OABCE$ (четырехугольную пирамиду с вершиной E). Его двумерными гранями, как легко видеть из того же рис. 16, являются один двумерный четырехгранник (параллелограмм) $OABC$ и четыре двумерных трехгранника (треугольника): OBE, BCE, CAE, AOE с общей вершиной E.

Найдем, наконец, еще одну гиперплоскость, проходящую через параллелограмм $OABC$ и точку F. Как и раньше, запишем определитель, содержащий координаты точек O, A, B и F:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{17.29}$$

Вычислив определитель (17.29), получим уравнение гиперплоскости $\pi_3^{(3)}$: $x_3 - x_4 = 0$. Однако эта гиперплоскость не является опорной, т.е. не содержит грани искомого многоугольника, поскольку точки D и E лежат по разные ее стороны. Координаты этих точек удовлетворяют неравенствам $x_3 - x_4 > 0$ (точка D) и $x_3 - x_4 < 0$ (точка E). Полученную гиперплоскости $\pi_3^{(3)}$ можно сравнить с диагональю двумерного четырехгранника, т.е. параллелограмма. Диагональ параллелограмма также проходит через две его вершины, но является одномерной гранью или, другими словами, ребром, коими являются все четыре его стороны, все вершины которых лежат по одну сторону грани (ребра).

Теперь рассмотрим гиперплоскости, проходящие через еще один параллелограмм — двумерный четырехгранник $ODEF$, поскольку $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}$. Чтобы записать уравнения возможных гиперплоскостей, четыре точки O, D, E, F, принадлежащие одной двумерной плоскости, можно дополнить только тремя способами: или точкой A, или точкой B, или точкой C.

В первом случае имеем определитель из координат четырех точек O, D, E, A (см. выше)

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{17.30}$$

и уравнение искомой гиперповерхности $\pi_3^{(4)}$: $x_2 = 0$.

Во втором случае имеем определитель из координат точек O, D, E, B

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{17.31}$$

и уравнение искомой гиперповерхности $\pi_3^{(5)}$: $x_1 = 0$.

Наконец, в третьем случае имеем определитель из координат точек O, D, E, C

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{17.32}$$

и уравнение искомой гиперповерхности $\pi_3^{(6)}$: $x_1 - x_2 = 0$.

Рассмотрим по порядку полученные гиперплоскости. Так, гиперплоскость $\pi_3^{(4)}$ является опорной и содержит третью грань выпуклой оболочки заданной системы точек. Как следует из рис. 16, эта грань есть трехмерный пятигранник $ODEFA$, известный в элементарной геометрии как четырехугольная пирамида с вершиной в точке D. Гиперплоскость $\pi_3^{(5)}$ также является опорной и содержит четвертую грань выпуклой оболочки, которая представляет собой трехмерный пятигранник $ODEFB$ — четырехугольную пирамиду с вершиной в точке B.

А вот гиперплоскость $\pi_3^{(6)}$, как и гиперплоскость $\pi_3^{(3)}$, не является опорной, т.е. не содержит какую-либо грань искомого многогранника, поскольку точки A и B лежат по разные стороны гиперплоскости $\pi_3^{(6)}$. Координаты этих точек удовлетворяют неравенствам $x_1 - x_2 > 0$ и $x_1 - x_2 < 0$ соответственно.

Итак, мы получили шесть гиперплоскостей, из которых четыре являются опорными и содержат четыре грани выпуклой оболочки заданной системы точек. Эти четыре гиперплоскости $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ является координатными плоскостями, пересекающимися в начале координат, т.е. точке $O(0,0,0,0)$. Тогда четырехмерные полупространства $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$ образуют конус с вершиной в начале координат, натянутый на совокупность лучей, которыми являются координатные полупрямые, исходящие из начала координат в положительном направлении. Это означает, что для получения остальных неравенств, описывающих выпуклую оболочку заданной системы точек, мы должны рассматривать далее только те гиперплоскости, которые не проходят через начало координат. Остается шесть точек A, B, C, D, E, F, расположенных на этом конусе. Таким образом, число плоскостей, подлежащих рассмотрению, определяется как $C_6^4 = 6!/4!2! = 15$.

Рассмотрим три точки C, A, B, которые можно дополнить до четырех тремя способами: или точкой D, или точкой E, или точкой F. Поскольку точки O, A, B, C принадлежат одной двумерной плоскости, образуя параллелограмм $OABC$, то тройки точек C, A, B и O, A, B равноправны. Из этого следует, что четверки C, A, B, D и O, A, B, D определяют одну плоскость $\pi_3^{(1)}$ (см. выше вывод уравнения (17.27)), а четверки C, A, B, F и O, A, B, F — одну плоскость $\pi_3^{(3)}$ (см. выше).

Далее рассмотрим три точки F, D, E, которые можно дополнить до четырех тоже тремя точками: или A, или B, или C. Поскольку точки O, F, D, E принадлежат одной двумерной плоскости, образуя параллелограмм $OFDE$, то тройки точек F, D, E и O, D, F равноправны. Из этого следует, что четверки F, D, E, A и O, D, E, A определяют одну гиперплоскость $\pi_3^{(4)}$ (см. выше), четверки F, D, E, B и O, D, E, B — одну плоскость $\pi_3^{(5)}$ (см. выше) а четверки F, D, E, C и O, D, E, C — одну гиперплоскость $\pi_3^{(6)}$. Таким образом, из 15-ти возможных уравнений гиперплоскостей шесть совпадают с найденными ранее: от $\pi_3^{(1)}$ до $\pi_3^{(6)}$ включительно.

Далее рассмотрим три тройки точек: F, C, D, F, C, E и C, E, D, которые можно дополнить до четырех двумя способами: или точкой A, или точкой B. В результате уравнение гиперплоскости, проходящей через четверку точек F, C, D, A, согласно определению, находится из равенства

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{17.33}$$

Вычислив этот определитель, найдем уравнение гиперплоскости $\pi_3^{(7)}$: $x_1 + x_3 = 1$. Эта гиперплоскость является опорной, так как остальные три точки O, E, B принадлежат одному полупространству $x_1 + x_2 \geqslant 1$. Как следует из рис. 16, эта гиперплоскость содержит пятую грань искомой оболочки и является трехмерным четырехгранником или, другими словами, треугольной пирамидой $FCOA$.

Аналогично уравнение гиперплоскости, проходящей через четыре точки F, C, D, B, находится из равенства

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{17.34}$$

Вычислив этот определитель, найдем уравнение гиперплоскости $\pi_3^{(8)}$: $x_2 + x_3 = 1$. Эта гиперплоскость также является опорной, поскольку остальные три точки O, E, A принадлежат одному полупространству $x_2 + x_3 \geqslant 1$. Она содержит шестую грань искомой оболочки и представляет собой трехмерный четырехгранник — треугольную пирамиду $FCOB$.

Уравнения еще двух плоскостей, проходящих через четверки точек F, C, E, A и F, C, E, B соответственно, находятся из равенств

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

приводящих к уравнениям гиперплоскостей $\pi_3^{(9)}$ и $\pi_3^{(10)}$: $x_1 + x_4 = 1$ и $x_2 + x_4 = 1$ соответственно. Обе гиперплоскости являются опорными, поскольку три точки O, D, B принадлежат полупространству $x_1 + x_4 < 1$, а три точки O, D, A — полупространству $x_2 + x_4 < 1$. В гиперплоскостях $\pi_3^{(9)}$ и $\pi_3^{(10)}$ расположены седьмая и восьмая грани искомой оболочки. Эти грани представляют собой трехмерные треугольные пирамиды $FCEA$ и $FCEB$ (см. рис. 16).

Далее можно предсказать, что две гиперплоскости, проходящие через четверки точек C, E, D, A и C, E, D, B не являются опорными. Это объясняется тем, что две точки O и F, не принадлежащие этим гиперплоскостям, находятся по разные стороны диагонали ED параллелограмма $OFDE$, тогда как сама диагональ принадлежит указанным гиперплоскостям. В этом можно убедиться непосредственно, исходя из уравнений гиперплоскостей, проходящих через точки C, E, D, A и C, E, D, B соответственно:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение первого определителя дает уравнение гиперплоскости $\pi_3^{(11)}$: $x_1 + x_3 + x_4 = 1$, из которого непосредственно убеждаемся, что точки O, B и точка F лежат по разные стороны $\pi_3^{(11)}$, поскольку точки O и B принадлежат полупространству $x_1 + x_3 + x_4 < 1$, а точка F — полупространству $x_1 + x_3 + x_4 > 1$.

Вычислив второй определитель, получим уравнение гиперплоскости $\pi_3^{(12)}$: $x_2+x_3+x_4=1$, с помощью которого непосредственно убеждаемся, что точки O, A и точка F лежат по разные стороны $\pi_3^{(12)}$, поскольку точки O и A принадлежат полупространству $x_2+x_3+x_4<1$, а точка F — полупространству $x_2+x_3+x_4>1$.

Аналогично можно предсказать, что две гиперплоскости, проходящие через четверки точек F, E, B, A и F, D, B, A не являются опорными. Это объясняется тем, что две точки O и C, не принадлежащие этим гиперплоскостям, находятся по разные стороны диагонали AB параллелограмма $OABC$, тогда как сама диагональ принадлежит указанным гиперплоскостям. Как и выше, в этом можно убедиться непосредственно, исходя из уравнений гиперплоскостей, проходящих через точки F, E, B, A и F, D, B, A соответственно:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Вычислив первый определитель, получим уравнение гиперплоскости $\pi_3^{(13)}$: $x_1+x_2+x_4=1$. Нетрудно заметить, что точки O, D и точка C лежат по разные стороны $\pi_3^{(13)}$, поскольку точки O и D принадлежат полупространству $x_1+x_2+x_4<1$, а точка C — полупространству $x_1+x_2+x_4>1$.

Вычислив второй определитель, найдем уравнение гиперплоскости $\pi_3^{(14)}$: $x_1+x_2+x_3=1$. Очевидно, что точки O, E и точка C лежат по разные стороны $\pi_3^{(14)}$, поскольку точки O и E принадлежат полупространству $x_1+x_2+x_3<1$, а точка C — полупространству $x_1+x_2+x_3>1$.

Последняя оставшаяся гиперплоскость, проходящая через четверку точек E, D, B, A, также не является опорной, поскольку точки F и C, не принадлежащие ей, находятся по разные стороны диагоналей ED и AB, тогда как сами диагонали принадлежат этой гиперплоскости. Как и ранее, в этом можно убедиться непосредственно, исходя из уравнений этой гиперплоскости, проходящей через точки E, D, B, A:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив этот определитель, получим уравнение гиперплоскости $\pi_3^{(15)}$: $x_1+x_2+x_3+x_4=1$, и убедимся, что точка O и точки F, C лежат по разные стороны $\pi_3^{(15)}$, поскольку координаты точки O удовлетворяют неравенству $x_1+x_2+x_3+x_4<1$, а координаты точек F и C — неравенству $x_1+x_2+x_3+x_4>1$.

Таким образом, мы получили уравнения восьми опорных гиперплоскостей $\pi_3^{(1)}$, $\pi_3^{(2)}$, $\pi_3^{(4)}$, $\pi_3^{(5)}$, $\pi_3^{(7)}$, $\pi_3^{(8)}$, $\pi_3^{(9)}$, $\pi_3^{(10)}$, которые содержат трехмерные грани выпуклой оболочки заданной системы точек, которая представляют собой четырехмерный восьмигранник с вершинами в точках $OABCDEF$. Этими трехмерными гранями являются четыре трехмерных пятигранника (четырехугольные пирамиды) и четыре трехмерных четырехгранника (треугольные пирамиды). Сама система неравенств, определяющая восьмигранник $OABCDEF$, совпадает с найденной ранее системой (17.22), (17.23).

Ответ на последний вопрос задачи об уравнениях, описывающих координаты точек, принадлежащих многограннику $OABCDEF$, дают формулы (17.20), (17.21) теоремы 17.2:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или в развернутом виде

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \lambda_1 + \lambda_3,\\
x_2 &= \lambda_2 + \lambda_3,\\
x_3 &= \lambda_3 + \lambda_6,\\
x_4 &= \lambda_4 + \lambda_6,
\end{aligned}
$$

где все $\lambda_i \geqslant 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 1$.

Пример 17.4. Многогранник $\mathcal{M}$ задан как выпуклая оболочка системы точек в пространстве $\mathcal{A}_4$: $O(0,0,0,0)$, $A(2,0,0,0)$, $B(0,2,0,0)$, $C(0,0,2,0)$, $D(2,2,0,0)$, $E(2,0,2,0)$, $F(0,2,0,2)$, $G(2,2,2,0)$, $H(0,0,0,3)$, $I(1,1,1,0)$. Написать систему линейных неравенств, задающих этот многогранник. Найти все его трехмерные грани и уравнения, описывающие многогранник.

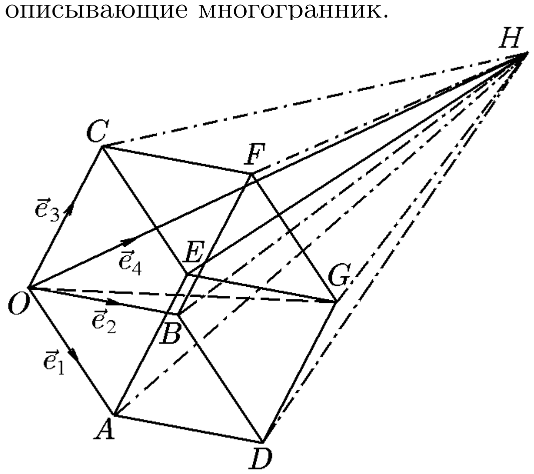


Рис. 17.

Решение. Пусть $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ — репер пространства $\mathcal{A}_4$. В этом репере заданные точки расположены так, как это изображено на рис. 17. Чтобы найти систему неравенств, определяющих многогранник и его трехмерные грани, как и в предыдущем примере, через каждую четверку точек, не лежащих на одной двумерной плоскости, проведем трехмерную плоскость, т.е. гиперплоскость в пространстве $\mathcal{A}_4$. Пусть уравнение

$$\sum_{i=1}^{4} a_i x_i = b$$

является уравнением такой гиперплоскости, причем для координат всех заданных точек выполняется одно из неравенств

$$\sum_{i=1}^{4} a_i x_i \geqslant b$$

$$\sum_{i=1}^{4} a_i x_i \leqslant b.$$

Тогда соответствующее неравенство входит в совокупность замкнутых гиперплоскостей, пересечение которых определяет искомый многогранник. При этом выпуклая оболочка всех точек, лежащих в найденной гиперповерхности, будет трехмерной гранью этого многогранника.

Если к решению задачи подходить формально, то число плоскостей, проходящих через четыре из заданных десяти точек, определится как $C_{10}^4 = 10!/4!6! = 210$. Однако, предварительно подсчитав (см. рис. 17) количество точек, лежащих в двумерных плоскостях, можно существенно уменьшить число рассматриваемых гиперплоскостей. Действительно, поскольку вектор $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$, то четыре точки O, A, E, C принадлежат одной двумерной плоскости, образуя параллелограмм $OAEC$. Аналогично устанавливаются еще пять параллелограммов: $OADB$, $OBFC$, $ADEG$, $BDFG$, $CEFG$.

Нетрудно убедиться, что точки O, A, B, C, D, E, F, G — вершины параллелограммов — принадлежат одной гиперплоскости $x_4 = 0$. Для четверки точек O, A, B, C запишем уравнение проходящей через них гиперплоскости:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x_4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x_4 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8x_4 = 0$$

или $x_4 = 0$, которую мы обозначили как $\pi_3^{(1)}$.

Принадлежность остальных точек D, E, F, G к этой гиперплоскости проверяется элементарно: все они имеют нулевую четвертую координату. Заметим, что этой же гиперплоскости принадлежит и точка I, к которой мы еще вернемся. Точка $H(0,0,0,3)$, не принадлежащая гиперплоскости $x_4 = 0$, и позволяет определить одно из двух замкнутых полупространств, на которые пространство $\mathcal{A}_4$ делится гиперплоскостью $x_4 = 0$ и которому принадлежат все заданные точки. Поскольку $3 > 0$, то этим полупространством является $x_4 \geqslant 0$. С другой стороны, неравенство $x_4 \geqslant 0$ — первое из искомой системы неравенств, определяющих многогранник.

Итак, мы установили, что гиперплоскость $\pi_3^{(1)}$: $x_4 = 0$ является опорной гиперплоскостью, т.е. содержит одну из граней многогранника. Этой гранью является трехмерный параллелепипед $OABCDEFG$ (см. рис. 17), поскольку именно он образует выпуклую оболочку этих точек. Точка I является внутренней точкой этого параллелепипеда, но не его вершиной.

Еще три параллелограмма: $OABD$, $OACE$, $OBCF$ можно дополнить точкой H, получив гиперплоскости $\pi_3^{(2)}$, $\pi_3^{(3)}$, $\pi_3^{(4)}$: $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ и $x_1 = 0$ соответственно. В этом можно убедиться, раскрыв следующие определители:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x_3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -x_3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -12x_2 = 0, \quad x_3 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -x_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x_2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12x_2 = 0, \quad x_2 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12x_1 = 0, \quad x_1 = 0.$$

Три другие параллелограмма $ADEG$, $BDEG$, $CEFG$, не содержащие начало координат, т.е. точку O, тоже можно дополнить точкой H. В результате получим еще три гиперплоскости: $\pi_3^{(5)}$: $3x_1 + 2x_4 = 6$, $\pi_3^{(6)}$: $3x_2 + 2x_4 = 6$, $\pi_3^{(7)}$: $3x_3 + 2x_4 = 6$. В этом можно убедиться, используя уравнение гиперплоскости, проходящей через четыре точки:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -x_4 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -x_4 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \left\{ x_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= 8x_4 - 3(4x_1 - 8) = 0$$

или $3x_1 + 2x_4 = 6$.

Аналогично

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8x_4 - 3(4x_2 - 8) = 0$$

или $3x_2 + 2x_4 = 6$.

И, наконец,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8x_4 - 3(4x_3 - 8) = 0$$

или $3x_3 + 2x_4 = 6$.

Итак, мы нашли уравнения семи гиперплоскостей от $\pi_3^{(1)}$ по $\pi_3^{(7)}$. Подставив поочередно координаты всех заданных точек в эти уравнения, убеждаемся, что все гиперплоскости являются опорными их выпуклой оболочки, определяемой неравенствами

$$\begin{gathered} x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0; \\ 3x_1 + 2x_4 \leqslant 6, \quad 3x_2 + 2x_4 \leqslant 6, \quad 3x_3 + 2x_4 \leqslant 6. \end{gathered} \tag{17.35}$$

Как и в предыдущем примере, несложно показать, что других опорных гиперплоскостей не существует и именно система неравенств (17.35) определяет многогранник, являющийся выпуклой оболочкой заданной системы точек.

Что касается граней многоугольника, то одну мы уже нашли. Ей является трехмерный параллелепипед $OABCDEFG$, лежащий в опорной плоскости $\pi_3^{(1)}$. Остальными шестью трехмерными гранями, как это следует из построения их опорных гиперплоскостей (см. также рис. 17), являются трехмерные пятигранники — четырехугольные пирамиды с общей вершиной H, а именно: $OABDH$, $OACEH$, $OBCFH$, $ADEGH$, $BDEGH$, $CEFGH$.

Таким образом, выпуклой оболочкой заданной системы точек является четырехмерный семигранник $OABCDEFGH$, определяемый системой неравенств (17.35), с перечисленными выше гранями.

Особенность данной выпуклой оболочки состоит в том, что не все заданные точки, как в предыдущем примере, являются вершинами соответствующего ей многогранника. Так, точка I не является его вершиной, поскольку, как было показано ранее, не является внутренней точкой одной из его граней, а именно: параллелепипеда $OABCDEFGH$.

Ответ на последний вопрос задачи об уравнениях, описывающих координаты точек, принадлежащих многограннику $OABCDEFGH$, дают формулы (17.20), (17.21) теоремы 17.2:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_7 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\lambda_1 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 + 2\lambda_7, \\ x_2 &= 2\lambda_2 + 2\lambda_4 + 2\lambda_6 + 2\lambda_7, \\ x_3 &= 2\lambda_3 + 2\lambda_5 + 2\lambda_6 + 2\lambda_7, \\ x_4 &= 3\lambda_7, \end{aligned}$$

где все $\lambda_i \geqslant 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 = 1$.

В заключение отметим, что вычисление определителей можно было упростить, проведя преобразование репера $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ так, чтобы координаты всех точек были равны единице, как в предыдущем примере.

Теперь покажем, что решение аналогичных задач существенно упрощается с уменьшением размерности исходного пространства $\mathcal{A}_n$.

Пример 17.5. Решить задачу, аналогичную предыдущим, для системы точек $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(1,1,0)$, $E(1,0,1)$, $F(0,1,1)$ из $\mathcal{A}_3$.

Решение. Пусть $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — репер пространства $\mathcal{A}_3$. В этом репере заданные точки расположены так, как это изображено на рис. 18. Чтобы найти систему неравенств, определяющих трехмерный многогранник, необходимо через каждую тройку точек, не лежащих на одной прямой, провести двумерную плоскость. Если

$$\sum_{i=1}^{3} a_i x_i = b$$

— уравнение такой плоскости и координаты всех заданных точек удовлетворяют одному из неравенств:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i x_i \geqslant b \qquad\qquad \sum_{i=1}^{3} a_i x_i \leqslant b,$$

то соответствующее неравенство входит в систему неравенств, задающих искомый многогранник. Выпуклая оболочка всех точек, лежащих в данной двумерной плоскости, будет двумерной гранью данного многогранника. Например, выберем три точки O, B, C и найдем уравнение плоскости $\pi_2^{(1)}$, проходящей через них:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = x_1 = 0.$$

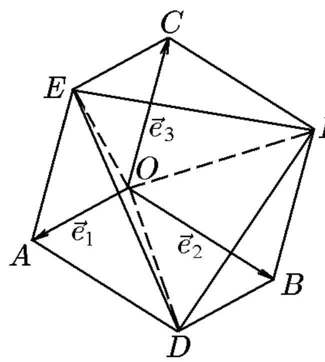


Рис. 18.

Подставив поочередно координаты точек A, D, E и F в уравнение плоскости $\pi_2^{(1)}$, убеждаемся, что эта гиперплоскость является опорной и определяет полупространство $x_1 \geqslant 0$. Плоскости $\pi_2^{(1)}$ кроме точек O, B и C принадлежит и точка F (см. рис. 18). Выпуклой оболочкой этих четырех точек O, B, C, F, лежащих на $\pi_2^{(1)}$, является параллелограмм, представляющий собой первую двумерную грань трехмерного многогранника.

Подобным образом рассматриваются остальные тройки точек, не лежащих на одной прямой, что позволяет получить требуемую систему неравенств. Однако дальше удобнее воспользоваться наглядностью трехмерного аффинного пространства. Так, например, опорную гиперплоскость $\pi_2^{(1)}$ можно найти гораздо проще, учтя, что радиус-векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OB}$ совпадают с базисными векторами $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_2$ соответственно, а вектор $\overrightarrow{OF}$ является суммой $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$.

Таким образом, двумерный четырехгранник $OCBF$ является параллелограммом, лежащим в координатной плоскости $\pi_2^{(1)}$: $x_1 = 0$. Как и ранее, убеждаемся, что эта плоскость является опорной. Следовательно, параллелограмм $OBCF$ есть двумерная грань трехмерного многогранника, лежащего в полупространстве $x_1 \geqslant 0$ (см. рис. 18).

Рассуждая аналогично, найдем, что $\pi_2^{(2)}$: $x_2 = 0$ есть опорная гиперплоскость, которой принадлежит параллелограмм $OAEC$, являющийся двумерной гранью трехмерного многогранника, лежащего в полупространстве $x_2 \geqslant 0$.

Аналогично $\pi_2^{(3)}$: $x_3 = 0$ есть опорная гиперплоскость, которой принадлежит параллелограмм $OADB$, являющийся двумерной гранью трехмерного многогранника, лежащего в полупространстве $x_3 \geqslant 0$.

Далее найдем еще три опорных гиперплоскости $\pi_2^{(4)}$: $x_1 = 1$; $\pi_2^{(5)}$: $x_2 = 1$ и $\pi_2^{(6)}$: $x_3 = 1$, в которых расположены три грани — двумерные трехгранники или треугольники EAD, DBF и FCE. Сам многогранник расположен в замкнутых полупространствах $x_1 \leqslant 1$, $x_2 \leqslant 1$, $x_3 \leqslant 1$.

И, наконец, последняя (седьмая) грань — треугольник DEF — принадлежит плоскости $\pi_2^{(7)}$, проходящей через тройку точек D, E, F, с уравнением

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -x_1 - x_2 - x_3 + 2 = 0$$

или

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2.$$

Сам многогранник расположен в полупространстве $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2$.

Таким образом, выпуклая оболочка заданной системы точек представляет собой трехмерный семигранник $OABCDEF$ (см. рис. 18), гранями которого являются три параллелограмма $JCBF$, $OAEC$, $OADB$ и четыре двумерных трехгранника (треугольника) EAD, DBF, FCE, DEF.

Система неравенств, определяющих многогранник $OABCDEF$, имеет вид

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_1 \leqslant 1, \quad x_2 \leqslant 1, \quad x_3 \leqslant 1, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2.$$

Ответ на последний вопрос: об уравнениях, описывающих многогранник $OABCDEF$, дают формулы (17.20), (17.21) теоремы 17.2:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5, \\ x_2 &= \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6, \\ x_3 &= \lambda_3 + \lambda_5 + \lambda_6, \end{aligned}$$

где все $\lambda_i \geqslant 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 1$.

Рассмотрим теперь несколько примеров обратной задачи.

Пример 17.6. Найти вершины трехмерного многогранника, заданного системой неравенств $x_1 \leqslant 1$, $x_2 \leqslant 1$, $x_3 \leqslant 1$, $x_1 + x_2 \geqslant -1$, $x_2 + x_3 \geqslant -1$, $x_1 + x_3 \geqslant -1$.

Решение. Пусть $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — репер трехмерного аффинного пространства $\mathcal{A}_3$, в котором заданы двумерные опорные плоскости $\pi_2^{(1)}$: $x_1 = 1$; $\pi_2^{(2)}$: $x_2 = 1$; $\pi_2^{(3)}$: $x_3 = 1$; $\pi_2^{(4)}$: $x_1 + x_2 = -1$; $\pi_2^{(5)}$: $x_2 + x_3 = -1$; $\pi_2^{(6)}$: $x_1 + x_3 = -1$, содержащие двумерные грани искомого трехмерного многогранника.

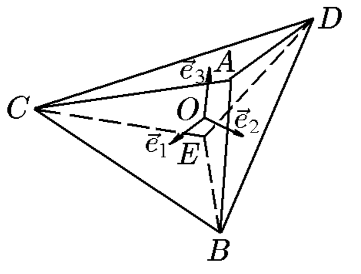


Рис. 19.

Вершины этого многогранника являются точками пересечения по меньшей мере трех опорных плоскостей. Так, пересечение плоскостей $\pi_2^{(1)}$, $\pi_2^{(2)}$ и $\pi_2^{(3)}$ дает точку A с координатами $x_1 = x_2 = x_3 = 1$: $A(1,1,1)$. Пересечение плоскостей $\pi_2^{(1)}$, $\pi_2^{(3)}$ с $\pi_2^{(5)}$ и $\pi_2^{(6)}$ дает одну точку $B(1,1,-2)$. Аналогично пересечение плоскостей $\pi_2^{(1)}$, $\pi_2^{(3)}$ с $\pi_2^{(4)}$ и $\pi_2^{(5)}$ дает одну точку $C(1,-2,1)$, а пересечение плоскостей $\pi_2^{(2)}$, $\pi_2^{(3)}$ с $\pi_2^{(4)}$ и $\pi_2^{(6)}$ — точку $D(-2,1,1)$. Чтобы найти точки пересечения плоскостей $\pi_2^{(4)}$, $\pi_2^{(5)}$ и $\pi_2^{(6)}$, запишем систему уравнений

$$x_1 + x_2 = -1,$$

$$x_2 + x_3 = -1,$$
$$x_1 + x_3 = -1.$$

Выпишем расширенную матрицу этой системы и проведем указанные элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{S_3-S_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{S_3+S_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \underset{S_3/2}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \underset{S_2-S_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \underset{S_1-S_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right).$$

Отсюда найдем координаты точки пересечения указанных плоскостей: $x_1 = x_2 = x_3 = -1/2$. Эти же координаты определяют последнюю вершину $E(-1/2, -1/2, -1/2)$.

Таким образом, вершинами заданного выпуклого многогранника являются пять точек: $A(1,1,1)$, $B(1,1,-2)$, $C(1,-2,1)$, $D(-2,1,1)$ и $E(-1/2,-1/2,-1/2)$ (рис. 19).

Если учесть, что в точках A и E пересекаются по три плоскости, а в точках B, C и D — по четыре, то можно конкретизировать: искомый многогранник является трехмерным шестиугольником (см. рис. 19). Шесть его граней — это шесть двумерных трехгранников: треугольников ABC, ABD, ACD, EBC, EBD, ECD. Сам шестигранник можно рассматривать как объединение двух тетраэдров с общим основанием BCD.

Пример 17.7. Найти пересечение четырехмерного параллелепипеда, построенного на базисных векторах, с плоскостями

$$\text{а)}\ \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \qquad \text{б)}\ \ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 1.$$

Решение. Пусть $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ — репер четырехмерного аффинного пространства $\mathcal{A}_4$. Согласно определению (17.14), параллелепипед, построенный на базисных векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$, задается неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1,2,3,4$. Координатные плоскости $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ при этом одновременно являются опорными гиперплоскостями заданного параллелепипеда. Обозначим их для удобства через $\pi_3^{(1)}$, $\pi_3^{(2)}$, $\pi_3^{(3)}$, $\pi_3^{(4)}$ соответственно. Гиперплоскость $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ для случая а) обозначим через $\pi_3^{(5)}$, а гиперплоскости $x_1 + x_2 = 1$ и $x_3 + x_4 = 1$ для случая б) — через $\pi_3^{(6)}$ и $\pi_3^{(7)}$ (рис. 20).

Рассмотрим случай а). Как и в предыдущем примере, найдем координаты точек пересечения опорных гиперплоскостей и гиперплоскости $\pi_3^{(5)}$. Координаты точки A — точки пересечения плоскостей $\pi_3^{(1)}$, $\pi_3^{(2)}$, $\pi_3^{(3)}$ и $\pi_3^{(4)}$ — определяются из системы уравнений

$$x_1 = 0,$$

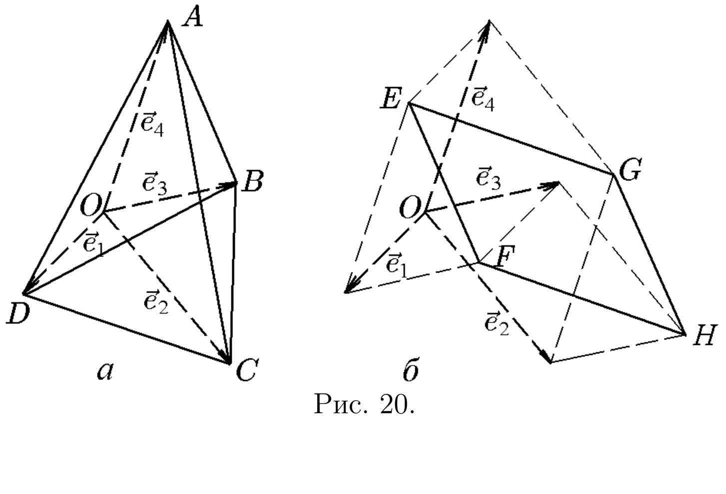


Рис. 20.

$$x_2 = 0,$$
$$x_3 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

и, следовательно, точка A имеет координаты $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, т.е. $A(0,0,0,1)$. Аналогично пересечение плоскости $\pi_3^{(5)}$ с $\pi_3^{(1)}$, $\pi_3^{(2)}$, $\pi_3^{(3)}$ дает точку $B(0,0,1,0)$, а пересечение с $\pi_3^{(1)}$, $\pi_3^{(3)}$, $\pi_3^{(4)}$ — точку $C(0,1,0,0)$ и, наконец, пересечение с $\pi_3^{(2)}$, $\pi_3^{(3)}$, $\pi_3^{(4)}$ — точку $D(1,0,0,0)$. Итак, мы нашли четыре точки A, B, C, D. Их выпуклой оболочкой является трехмерный четырехгранник (см. рис. 20,*а*), известный в элементарной геометрии как треугольная пирамида или тетраэдр. Таким образом, пересечение гиперплоскости $\pi_3^{(5)}$ с заданным четырехмерным параллелепипедом есть тетраэдр $ABCD$.

Рассмотрим теперь случай б). Пересечение плоскостей $\pi_3^{(6)}$ и $\pi_3^{(7)}$ с $\pi_3^{(1)}$, $\pi_3^{(2)}$ дает точку $G(0,1,0,1)$, пересечение с $\pi_3^{(1)}$, $\pi_3^{(4)}$ — точку $H(0,1,1,0)$, пересечение с $\pi_3^{(2)}$, $\pi_3^{(3)}$ — точку $E(1,0,0,1)$ и, наконец, пересечение с $\pi_3^{(2)}$, $\pi_3^{(4)}$ — точку $F(1,0,1,0)$. Мы получили тоже четыре точки G, H, E, F. Их выпуклой оболочкой является четырехгранник $GHEF$, однако не трехмерный, как в случае а), а двумерный, т.е. параллелограмм (см. рис. 20,*б*). Действительно, построим векторы $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{GE}$ и $\overrightarrow{GF}$. Поскольку эти векторы имеют координаты $\overrightarrow{GH} = (0,0,1,-1)$, $\overrightarrow{GE} = (1,-1,0,0)$ и $\overrightarrow{GF} = (1,-1,1,-1)$, то нетрудно установить равенство

$$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GE},$$

откуда и следует, что четырехгранник $GHEF$ является двумерным, т.е. параллелограммом.

Кроме того, можно воспользоваться следствием 15.1.2 теоремы 15.1. Для этого нам потребуются координаты векторов, исходящих из одной точки, например, в случае а) векторов $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$, а в случае б) векторов $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{GF}$. Для случая б) координаты указанных векторов уже найдены: $\overrightarrow{GH} = (0,0,1,-1)$, $\overrightarrow{GE} = (1,-1,0,0)$ и $\overrightarrow{GF} = (1,-1,1,-1)$. Для случая а) найдем $\overrightarrow{DA} = (-1,0,1,1)$, $\overrightarrow{DB} = (-1,0,1,0)$ и $\overrightarrow{DC} = (-1,1,0,0)$. Теперь из координат этих векторов составим матрицы $A_{\text{а}}$, $A_{\text{б}}$ и проведем элементарные преобразования:
случай а)

$$A_{\text{а}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

случай б)

$$A_{\text{б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rang} A_{\text{а}} = 3$, $\operatorname{rang} A_{\text{б}} = 2$. Это означает, что система векторов в случае а) линейно независима, а в случае б), наоборот, линейно зависима. Геометрически это соответствует тому, что в случае а) четыре точки A, B, C, D принадлежат одной трехмерной плоскости $\pi_3 \subset \mathcal{A}_4$, а в случае б) четыре точки G, H, E, F принадлежат одной двумерной плоскости $\pi_2 \subset \mathcal{A}_4$. Для различения подобных положений точек удобно (хотя и не обязательно) ввести следующее определение.

♦ Точки $M_1, M_2, \ldots, M_r$ называются *точками, находящимися в общем положении*, если они не принадлежат одной $(r-2)$-мерной плоскости.

Согласно этому определению, точки A, B, C, D находятся в общем положении, тогда как точки G, H, E, F таковыми не являются, поскольку они принадлежат одной плоскости размерности $4 - 2 = 2$.

Как следует из рассмотренного примера, и в полном соответствии со следствием 15.2.2 теоремы 15.2, точки $M_1, M_2, \ldots, M_r$ могут находиться в общем положении только при условии линейной независимости системы векторов

$$\overrightarrow{M_1M_2}, \quad \overrightarrow{M_1M_3}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{M_1M_r}. \tag{17.36}$$

Отметим, что M_1 как начальная точка всех векторов (17.35) выбрана произвольно. Очевидно, что совершенно безразлично, какую из точек M_i, $i = \overline{1, r}$, выбрать в качестве начальной.

Пример 17.8. Найти вершины многогранника, образованного пересечением полупространств

$$\begin{aligned} &x_1 \geqslant 0;\\ &x_2 \geqslant 0;\\ &x_1 + 3x_2 \leqslant 18;\\ &x_1 + x_2 \leqslant 8;\\ &2x_1 + x_2 \leqslant 14. \end{aligned} \tag{17.37}$$

Решение. Согласно условию, заданы пять полупространств в двумерном аффинном пространстве $\mathcal{A}_2$. В силу размерности $\mathcal{A}_2$ эти полупространства представляют собой обычные полуплоскости, полученные разделением плоскости $\mathcal{A}_2$ его гиперплоскостями, т.е. прямыми

$$\begin{aligned} &\ell_1 : x_2 = 0;\\ &\ell_2 : x_1 = 0;\\ &\ell_3 : x_1 + 3x_2 = 18;\\ &\ell_4 : x_1 + x_2 = 8;\\ &\ell_5 : 2x_1 + x_2 = 14. \end{aligned} \tag{17.38}$$

Пусть $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ — репер $\mathcal{A}_2$ — плоскости x_1Ox_2. Прямые $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ представляют собой координатные прямые и, следовательно, неравенства $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ определяют конус с вершиной в точке O между лучами, направленными по $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ соответственно (см. рис. 21).

Прямая ℓ_3 пересекает координатные прямые ℓ_1 и ℓ_2 в точках $A_1(18, 0)$ и $A_2(0, 9)$, поскольку

$$x_2 = 0, \qquad x_1 + 3x_2 = 18,$$

откуда для A_1 $x_1 = 18$, $x_2 = 0$. Соответственно из системы

$$x_1 = 0, \qquad x_1 + 3x_2 = 18,$$

для точки A_2 найдем $x_1 = 0$, $x_2 = 6$.

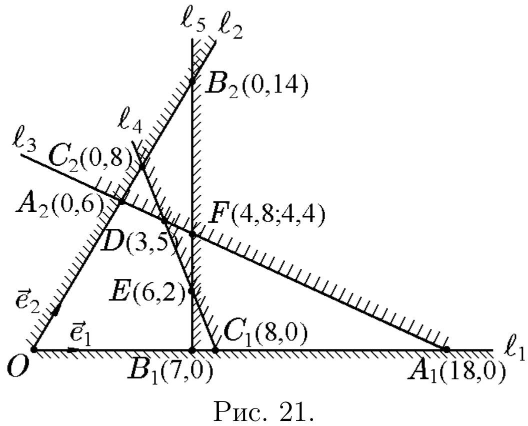


Рис. 21.

Прямая ℓ_4 пересекает координатные прямые ℓ_1 и ℓ_2 в точках $C_1(8, 0)$ и $C_2(0, 8)$. Наконец, прямая ℓ_5 пересекает координатные прямые ℓ_1 и ℓ_2 в точках $B_1(7, 0)$ и $B_2(0, 14)$.

Из трех точек: $A_1(18, 0)$, $C_1(8, 0)$, $B_1(7, 0)$ только точка $B_1(7, 0)$ удовлетворяет неравенству $2x_1 + x_2 \leqslant 14$. Из трех точек: $A_2(0, 6)$, $C_2(0, 8)$, $B_2(0, 14)$ только точка A_2 удовлетворяет неравенству $x_1 + 3x_2 \leqslant 18$. Следовательно, к уже известной вершине многогранника — точке $O(0, 0)$ — добавятся точки $B_1(7, 0)$ и $A_2(0, 6)$.

Прямые ℓ_3 и ℓ_5 пересекаются в точке $F(4.8, 4.4)$, координаты которой находятся из системы

$$x_1 + 3x_2 = 18, \quad 2x_1 + x_2 = 14.$$

Однако координаты точки $F(4.8, 4.4)$ не удовлетворяют неравенству

$$x_1 + x_2 \leqslant 8 \quad (\text{так как } 4.8 + 4.4 = 9.2 \nleqslant 8),$$

и, следовательно, эта точка не может быть вершиной искомого многогранника. Поэтому оставшиеся две вершины многогранника найдутся как точки пересечения прямой ℓ_4 с прямыми ℓ_3 и ℓ_5. Из системы

$$x_1 + 3x_2 = 18, \quad x_1 + x_2 = 8$$

найдем координаты точки пересечения $D(3, 5)$ и соответственно из системы

$$x_1 + x_2 = 8, \quad 2x_1 + x_2 = 14$$

— координаты точки пересечения $E(6, 2)$.

Таким образом, мы получили пятигранник с пятью вершинами: $O(0, 0)$, $A_2(0, 6)$, $B_1(7, 0)$, $D(3, 5)$, $E(6, 2)$, удовлетворяющими системе неравенств (17.37).

18. Симплексы

Вернёмся теперь к рассмотрению многогранников, являющихся выпуклой оболочкой заданной системы точек, а именно точек, находящихся в общем положении. Как мы уже упоминали, любой многогранник можно представить себе как «кусок» некоторого аффинного пространства $\mathcal{A}_n$, «высеченный» несколькими гиперплоскостями, число которых обязательно превышает его размерность n. Очевидно, что число этих «высекающих» гиперплоскостей, т.е. число замкнутых полупространств, пересечением которых образован этот многогранник, совпадает с числом его граней. В связи с этим возникает вопрос: какое наименьшее число граней может иметь ограниченный многогранник размерности n, заданный в пространстве $\mathcal{A}_n$ той же размерности. Из всех возможных многогранников порядка n многогранник с наименьшим числом граней имеет, очевидно, самую простую форму и называется *симплексом* (от латинского *simplex* — простой). Так, из всех двумерных многогранников: трёхгранник (треугольник), четырёхгранник (параллелограмм, трапеция и др.), пятигранник и т.д., двумерным симплексом является треугольник. Отметим, что только множество точек, образующих треугольник, т.е. двумерный симплекс, является заведомо и обязательно выпуклым множеством (рис. 22,*а*), тогда как множество точек, образующих, например, четырехугольник, таковым уже может и не быть (рис. 22,*б*). Пояснив происхождение термина «симплекс», перейдем к его строгому определению и изучению его свойств.

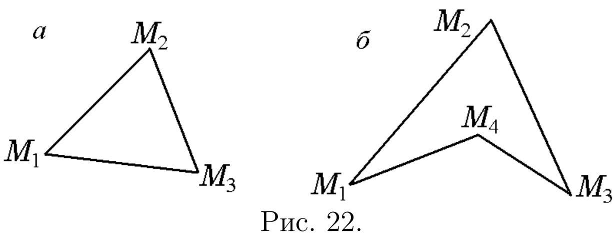


Рис. 22.

♦ Выпуклая оболочка системы из $(n+1)$ точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$, находящихся в общем положении, называется *n-мерным симплексом* с вершинами в этих точках.

Согласно теореме 17.2, координаты x_i, $i = \overline{1, n}$, всех точек, образующих n-мерный симплекс S_n с вершинами $M_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $M_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$, $\ldots$, $M_{n+1}(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, \ldots, x_n^{(n+1)})$, задаются формулами (17.20), (17.21) при $k = n+1$, т.е.

$$\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)} + \ldots + \lambda_{n+1} x_1^{(n+1)}, \\ x_2 = \lambda_1 x_2^{(1)} + \lambda_2 x_2^{(2)} + \ldots + \lambda_{n+1} x_2^{(n+1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \lambda_1 x_n^{(1)} + \lambda_2 x_n^{(2)} + \ldots + \lambda_{n+1} x_n^{(n+1)} \end{array} \tag{18.1}$$

при условиях

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1 \tag{18.2}$$

и

$$\lambda_i \geqslant 0, \qquad i = \overline{1, n+1}. \tag{18.3}$$

Пусть $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — заданная точка симплекса S_n (18.1)–(18.3), т.е. $M \in S_n$. Рассмотрим систему уравнений (18.1), (18.2) как неоднородную систему линейных уравнений для неизвестных λ_i, $i = \overline{1, n+1}$, записав ее в следующей матричной форме:

$$\mathcal{K}\Lambda = X', \tag{18.4}$$

где

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(n+1)} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots & x_n^{(n+1)} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \tag{18.5}$$

— матрица системы (18.4),

$$X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \tag{18.6}$$

— ее правая часть, а

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} \tag{18.7}$$

— столбец неизвестных λ_i.

Так как все точки M_i находятся в общем положении, то $\operatorname{rang}\mathcal{K} = n+1$ и система имеет единственное решение. Это означает, что аффинные координаты x_i, $i = \overline{1, n}$, точки M однозначно определяют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ и наоборот. Но в таком случае этот упорядоченный набор чисел можно рассматривать как еще один вид координат, которые наряду с аффинными однозначно определяет положение точки $M(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ в симплексе S_n. И хотя формально число координат λ_i равно $(n+1)$, условие (18.2) уменьшает их до числа аффинных координат, равного n.

♦ *Барицентрическими координатами* (дословно — координатами центров тяжести, от греческих $\beta\alpha\rho o\sigma$ — тяжесть и $\kappa\varepsilon\nu\tau\rho o\nu$ — средоточие, центр) точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ симплекса S_n называются числа λ_i, $i = \overline{1, n+1}$, из уравнений (18.1), которые при выполнении условий (18.2), (18.3) определяют аффинные координаты x_i, $i = \overline{1, n}$, этой точки.

◊ Барицентрические координаты впервые были введены немецким математиком А. Мёбиусом. Их название объясняется следующим образом. Пусть в вершинах симплекса S_n — точках M_i, $i = \overline{1, n}$, — помещены соответственно материальные точки массой λ_i, $i = \overline{1, n+1}$, совокупная масса которых, согласно (18.2), равна единице ($\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1$). Тогда центр тяжести полученной системы материальных точек окажется как раз в точке M с аффинными координатами x_i, $i = \overline{1, n}$, определяемыми системой (18.1) по заданному распределению масс λ_i, $i = \overline{1, n+1}$. Изменение распределения масс λ_i, $i = \overline{1, n+1}$ (при условии $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1$) меняет положение центра тяжести системы так, что точка M в заданном симплексе S_n пробегает все возможные положения.

Существуют два важных распределения λ_i. Одно из них — когда вся масса системы сосредоточена в какой-либо вершине, например M_1. Тогда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$ и центр тяжести совпадает с самой вершиной M_1, поскольку, согласно (18.1), $x_1 = x_1^{(1)}, x_2 = x_2^{(1)}, \ldots, x_n = x_n^{(1)}$. Другое распределение — когда во всех вершинах симплекса S_n расположены точки равной массы. Такое распределение выделяет единственную точку, являющуюся, как мы увидим ниже, важной характеристикой симплекса S_n.

♦ Точка симплекса S_n, в которой все барицентрические координаты равны ($\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1}$), называется *барицентром* (или просто *центром*) симплекса.

Барицентрические координаты центра (обозначим их через $x_{\text{ц}}$) симплекса S_n легко находятся из условия (18.2). Действительно, положив в (18.2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1} = \lambda_{\text{ц}}$, имеем

$$(1+n)\lambda_{\text{ц}} = 1,$$

откуда

$$\lambda_{\text{ц}} = \frac{1}{1+n}. \tag{18.8}$$

Это означает, что если в вершинах симплекса S_n поместить материальные точки одинаковой массы, равной $\lambda_{\text{ц}} = 1/(1+n)$, то центр симплекса S_n совпадет с центром тяжести такой системы. Аффинные координаты центра $x_{\text{ц}i}$, $i = \overline{1,n}$, симплекса S_n можно получить, подставив (18.8) в (18.1):

$$x_{\text{ц}i} = \frac{1}{1+n}(x_i^{(1)} + x_i^{(2)} + \ldots + x_i^{(n+1)}), \quad i = \overline{1,n}. \tag{18.9}$$

Определение граней многогранника, введенное ранее, справедливо и для симплексов. Мы, однако, переформулируем это определение так, чтобы его было удобно использовать именно для симплексов.

♦ Для симплекса S_n с вершинами M_i, $i = \overline{1,n+1}$, его r-мерной гранью ($r < n$) называется *r-мерный симплекс* S_r, имеющий $(r+1)$ вершин M_{ik}, $k = \overline{1,r+1}$, произвольно выбранных из $(n+1)$ вершин симплекса S_n.

♦ Одномерные грани, т.е. отрезки, соединяющие две любые вершины симплекса, называются его *ребрами*.

◊ Такое определение справедливо только для симплекса и не применимо к произвольному многограннику. Так, например, диагональ параллелограмма, соединяющая две вершины, не является его одномерной гранью (ребром).

♦ Две грани размерностей r и $n-(r+1)$ называются *противоположными гранями* симплекса S_n, если они не имеют общих вершин.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Одна точка M_1 задает нульмерный симплекс S_0, совпадающий с этой точкой, являющейся одновременно и его центром.

2. Две точки $M_1(x^{(1)})$, $M_2(x^{(2)})$, $x^{(1)} \neq x^{(2)}$ на одномерной плоскости (прямой с репером $\{0, \vec{e}\}$) π_1 задают одномерный симплекс S_1, являющийся отрезком M_1M_2 (рис. 23). Координата произвольной точки $M_1(x)$ этого симплекса, согласно (18.1)–(18.3), задается формулами

$$x = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0. \tag{18.10}$$

Отсюда при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ имеем $x = x^{(1)}$, а при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ соответственно $x = x^{(2)}$. Это означает, что одномерный симплекс S_1 имеет две противоположные грани (нульмерные симплексы), которыми являются точки M_1 и M_2.

Барицентрические координаты $\lambda_{\text{ц}}$ центра $M_{\text{ц}}$ симплекса S_1, согласно (18.8), равны

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{\text{ц}} = \frac{1}{2}. \tag{18.11}$$

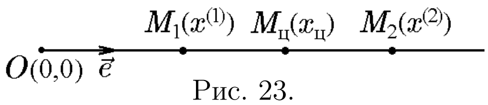


Рис. 23.

Аффинная же координата центра $x_ц$ симплекса, согласно (18.9), совпадает с координатой середины отрезка M_1M_2:

$$x_ц = \frac{1}{2}(x^{(1)} + x^{(2)}). \tag{18.12}$$

Теперь рассмотрим произвольную точку $M(x)$ симплекса S_1, т.е. отрезка M_1M_2.

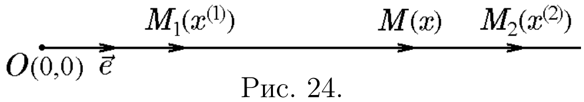


Рис. 24.

Пусть в заданном базисе (рис. 24) точка M_1 имеет координату $x^{(1)}$, точка M_2 — $x^{(2)}$. Тогда координата точки M определится равенством (18.10): $x = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}$. Поскольку координаты этих точек совпадают с координатами их радиус-векторов, то с учетом правил сложения векторов можем записать следующие векторные равенства:

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM_2}, \qquad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}, \tag{18.13}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MM_2}. \tag{18.14}$$

Отсюда найдем, что вектор $\overrightarrow{M_1M}$ имеет координату $(x - x^{(1)})$, вектор $\overrightarrow{MM_2}$ — координату $(x^{(2)} - x^{(1)})$. С учетом этого из (18.10) следуют два векторных равенства

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda_2\overrightarrow{M_1M_2}, \qquad \overrightarrow{MM_2} = \lambda_1\overrightarrow{M_1M_2}. \tag{18.15}$$

Для центра симплекса $M_ц$, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_ц = 1/2$, из (18.15) имеем

$$\overrightarrow{M_1M_ц} = \overrightarrow{M_цM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2}. \tag{18.16}$$

Для точки M, когда $\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 1/3$, имеем

$$\overrightarrow{M_1M} = \frac{2}{3}\overrightarrow{M_1M_2}, \qquad \overrightarrow{MM_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{M_1M_2}, \qquad \overrightarrow{M_1M} = 2\overrightarrow{MM_2} \tag{18.17}$$

и так далее.

Обратимся теперь к физической интерпретации полученных векторных уравнений. Из курса общей физики хорошо известно, что если на концах стержня разместить грузы равного веса (массы), то их центр тяжести (центр масс) придется на середину этого стержня. Именно это свойство используется в обычных рычажных весах. Если же на одном конце стержня разместить массу m_1, а на другом — в два раза большую массу m_2 ($m_2 = 2m_1$), то центр тяжести сместится от середины стержня в сторону груза большей массы и будет находиться на расстоянии $1/3$ длины стержня от конца с грузом большей массы. При этом расстояния от центра тяжести до концов стержня: l_1 до m_1 и l_2 до m_2 будут связаны соотношением $l_1 = 2l_2$, откуда естественно следует $l_2 = (l_1 + l_2)/3$.

Для грузов произвольных масс имеем равенство

$$m_1l_1 = m_2l_2, \tag{18.18}$$

известное в физике как «правило рычага», «равенство моментов сил тяжести» (после умножения (18.18) на ускорение свободного падения g) и др.

Если в (18.18) суммарную массу нормировать на единицу, т.е. потребовать $m_1 + m_1 = 1$, то величины $\lambda_1 = m_1/(m_1 + m_2)$ и $\lambda_2 = m_2/(m_1 + m_2)$ можно рассматривать как соответствующие барицентрические координаты, фигурирующие в векторных уравнениях (18.13), (18.14) и их координатном представлении (18.10).

При совпадении точек M_1 и M_2 ($x^{(1)} = x^{(2)}$) одномерный симплекс S_1 вырождается в нульмерный симплекс S_0, рассмотренный выше.

3. Три точки $M_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$, $M_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$, $M_3(x_1^{(3)}, x_2^{(3)})$ в репере $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ на двумерной плоскости π_2, находящиеся в общем положении, т.е. не лежащие на одной прямой, задают двумерный симплекс S_2, которым является множество точек, образующих трехгранник (треугольник) $M_1M_2M_3$ (рис. 25). Их координаты, согласно (18.1)–(18.3), задаются формулами

$$x_1 = \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)} + \lambda_3 x_1^{(3)},\\ x_2 = \lambda_1 x_2^{(1)} + \lambda_2 x_2^{(2)} + \lambda_3 x_2^{(3)} \tag{18.19}$$

при условиях

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \qquad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_3 \geqslant 0. \tag{18.20}$$

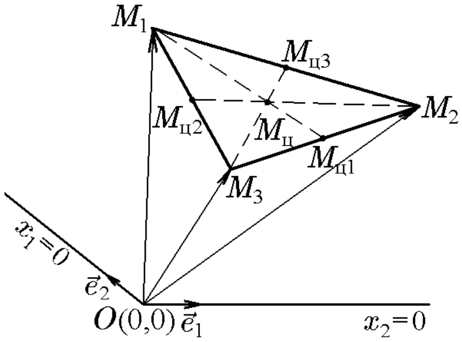


Рис. 25.

Отсюда при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ имеем $x_1 = x_1^{(1)}$, $x_2 = x_2^{(1)}$, что соответствует вершине M_1 или нульмерной грани симплекса S_2 — треугольника $M_1M_2M_3$. С физической точки зрения это означает, что раз вся масса системы сосредоточена в точке M_1, то и центр тяжести системы расположен в этой точке. Аналогично при $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 1$ имеем $x_1 = x_1^{(2)}$, $x_2 = x_2^{(2)}$, что соответствует вершине M_2, и, наконец, при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ имеем $x_1 = x_1^{(3)}$, $x_2 = x_2^{(3)}$, что соответствует вершине M_3.

Кроме трех нулевых симплексов, соответствующих вершинам M_1, M_2, M_3, можно указать еще три одномерных симплекса — три одномерные грани, которые являются отрезками M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1. Они, согласно (18.19), (18.20), описываются уравнениями

а) M_1M_2:

$$\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0,\\ x_1 = \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)},\\ x_2 = \lambda_1 x_2^{(1)} + \lambda_2 x_2^{(2)}; \tag{18.21}$$

б) M_2M_3:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_3 \geqslant 0,\\ x_1 = \lambda_2 x_1^{(2)} + \lambda_3 x_1^{(3)},\\ x_2 = \lambda_2 x_2^{(2)} + \lambda_3 x_2^{(3)}; \tag{18.22}$$

в) M_1M_2:

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_3 = 1, \quad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_3 \geqslant 0,\\ x_1 = \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_3 x_1^{(3)},\\ x_2 = \lambda_1 x_2^{(1)} + \lambda_3 x_2^{(3)}. \tag{18.23}$$

Найдем теперь центры самого симплекса S_2 и его граней. Пусть точка $M_ц$ с аффинными координатами $x_{ц1}$, $x_{ц2}$ — центр симплекса S_2. Поскольку барицентрические координаты точки $M_ц$, согласно (18.8), равны $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_ц = 1/3$, то для его аффинных координат с учетом (18.9) имеем

$$x_{ц1} = \frac{1}{3}(x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)}),\\ x_{ц2} = \frac{1}{3}(x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)}). \tag{18.24}$$

Пусть точки $M_{ц3}, M_{ц1}, M_{ц2}$ (рис. 25) с аффинными координатами $x_{ц1}^{(3)}, x_{ц2}^{(3)}; x_{ц1}^{(1)}, x_{ц2}^{(1)}$ и $x_{ц1}^{(2)}, x_{ц2}^{(2)}$ соответственно — центры одномерных граней — одномерных симплексов, представляющих собой отрезки (ребра) M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1. Аффинные координаты можно найти, положив в формулах (18.21)–(18.23) отличные от нуля барицентрические координаты равными 0,5:
1) точка $M_{ц3}$ — центр отрезка M_1M_2

$$\begin{aligned} x_{ц1}^{(3)} &= \frac{1}{2}(x_1^{(1)} + x_1^{(2)}), \\ x_{ц2}^{(3)} &= \frac{1}{2}(x_2^{(1)} + x_2^{(2)}); \end{aligned} \tag{18.25}$$

2) точка $M_{ц1}$ — центр отрезка M_2M_3

$$\begin{aligned} x_{ц1}^{(1)} &= \frac{1}{2}(x_1^{(2)} + x_1^{(3)}), \\ x_{ц2}^{(1)} &= \frac{1}{2}(x_2^{(2)} + x_2^{(3)}); \end{aligned} \tag{18.26}$$

3) точка $M_{ц2}$ — центр отрезка M_3M_1

$$\begin{aligned} x_{ц1}^{(2)} &= \frac{1}{2}(x_1^{(1)} + x_1^{(3)}), \\ x_{ц2}^{(2)} &= \frac{1}{2}(x_2^{(1)} + x_2^{(3)}). \end{aligned} \tag{18.27}$$

Центры нульмерных граней — вершины M_1, M_2, M_3, — естественно, совпадают с самими точками.

Все нульмерные грани (вершины) и одномерные грани (ребра) симплекса S_2 (треугольника) можно разделить на пары противоположных граней. Совершенно очевидно (см. рис. 25), что точка M_1 и отрезок M_2M_3, т.е. нульмерная и одномерная грани не имеют общих вершин, а поскольку их размерности связаны соотношением $0 = 2 - (1 + 1)$, то, согласно определению, эти две грани представляют собой пару противоположных граней симплекса S_2. Второй парой противоположных граней являются точка M_2 и отрезок M_3M_1, а третьей — точка M_3 и отрезок M_1M_2.

Прежде чем перейти к изучению трехмерных симплексов, рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих некоторые утверждения. Справедливость этих утверждений мы как раз и проверим на примере трехмерного симплекса, а затем рассмотрим возможность их обобщения на симплексы произвольной размерности.

Пример 18.1. Найти координаты центра тяжести (центра масс) системы материальных точек M_1, M_2, M_3 с массами $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 3$ кг, $m_3 = 5$ кг, имеющих координаты $M_1(1, 2)$, $M_2(4, 6)$, $M_3(9, 4)$.

Решение. В курсе физики такие задачи обычно решают, вычисляя статические моменты каждой материальной точки относительно координатных осей. Покажем, что эту задачу можно также решить с помощью барицентрических координат. Для этого определим координаты векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$. Очевидно, что $\overrightarrow{M_1M_2} = (3, 4)$ и $\overrightarrow{M_1M_3} = (8, 2)$, а поскольку

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = -18 \neq 0,$$

то эти векторы линейно независимы. Отсюда следует, что точки M_1, M_2, M_3 образуют двумерный симплекс. Как уже отмечалось, центр тяжести системы материальных точек совпадает с центром симплекса, в вершине которого расположены соответствующие массы, сумма которых равна единице. Если мы всю массу системы $m =$

$m_1 + m_2 + m_3 = 10$ кг нормируем на единицу, т.е. введем величины $\lambda_1 = m_1/m = 0{,}2$, $\lambda_2 = m_2/m = 0{,}3$, $\lambda_3 = m_3/m = 0{,}5$, то подстановка координат всех точек M_i в (18.19) даёт координаты центра тяжести системы

$$x_1 = 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 9 = 5{,}9,$$
$$x_2 = 0{,}2 \cdot 2 + 0{,}3 \cdot 6 + 0{,}5 \cdot 4 = 4{,}2.$$

Пример 18.2. Найти уравнения, описывающие выпуклую оболочку системы, состоящей из точки $M_1(1,2)$ и точек, принадлежащих отрезку M_2M_3:

$$\begin{gathered} x_1 = \lambda_1 \cdot 4 + \lambda_2 \cdot 9, \\ x_2 = \lambda_1 \cdot 6 + \lambda_2 \cdot 4, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Решение. Очевидно, что отрезок M_2M_3 представляет собой одномерный симплекс с вершинами в точках M_2 и M_3. Координаты этих точек найдем, положив в заданных уравнениях $\lambda'_1 = 1$, $\lambda'_2 = 0$ и $\lambda'_1 = 0$, $\lambda'_2 = 1$: $M_2(4,6)$, $M_3(9,4)$. Таким образом, мы имеем три точки: $M_1(1,2)$, $M_2(4,6)$ и $M_3(9,4)$. В предыдущем примере показано, что эти точки находятся в общем положении и, следовательно, их выпуклая оболочка является двумерным симплексом (треугольником $M_1M_2M_3$). Уравнения, описывающие этот симплекс, можно получить либо из (17.19), либо непосредственно из (18.19):

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 4 + \lambda_3 \cdot 9, \\ x_2 &= \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 6 + \lambda_3 \cdot 4, \end{aligned} \tag{18.28}$$

где

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \qquad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_3 \geqslant 0,$$

а величины λ'_1 и λ'_2 совпадают с λ_2 и λ_3 при условии $\lambda_1 = 0$.

Отметим, что уравнения (18.28) можно также получить методом, с помощью которого найдено решение примера 17.3.

Интересно, что эти же уравнения любым из указанных выше способов мы получим, рассматривая выпуклую оболочку точки M_3 и отрезок M_1M_2, а также выпуклую оболочку точки M_2 и отрезок M_3M_1. Мы уже отмечали, что эти три пары точек и отрезков образуют три пары противоположных граней симплекса S_2. Стало быть, симплекс S_2 можно рассматривать не только как выпуклую оболочку его вершин, но и как выпуклую оболочку любой пары его противоположных граней.

19. Аффинные пространства и задачи линейного программирования

Покажем теперь, что в терминах аффинного пространства, т.е. с помощью только двух операций: сложения векторов и умножения их на число, можно решить задачи очень важного класса, а именно задачи оптимизации. При этом можно не использовать такие понятия, как длина вектора, угол между векторами и др.

Рассмотрим, например, важную с точки зрения экономики задачу о планировании оптимального выпуска продукции некоторым предприятием. Предположим, что предприятие выпускает n различных изделий, причем для их производства требуется m видов ресурсов (сырье, станки, рабочие и т.д.). В реальных условиях эти ресурсы, естественно, ограничены и составляют $b_1, b_2, \ldots, b_m$ условных единиц. Обозначим через a^i_j технологические коэффициенты, которые показывают, сколько единиц i-го ресурса требуется для производства единицы j-го вида изделий ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$). Через c_j, $j = \overline{1,n}$, обозначим прибыль, получаемую предприятием при реализации единицы изделия j-го вида. Исходя из этого и предположив, что коэффициенты a_{ij}, b_i, c_j постоянны, составим такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от ее реализации была бы наибольшей.

Составим математическую модель задачи. Допустим, что предприятие будет выпускать x_j, $j = \overline{1,n}$, изделий каждого вида. Очевидно, что должны выполняться ограничения

$$\begin{aligned} &a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \ldots + a_n^1 x_n \leqslant b_1; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ &a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \ldots + a_n^m x_n \leqslant b_m, \end{aligned} \tag{19.1}$$

причем

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{19.2}$$

т.е. число изделий не может быть отрицательным.

В рамках ограничений (19.1), (19.2) требуется найти значения x_j, $j = \overline{1,n}$, при которых прибыль от реализации всей продукции

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{19.3}$$

была бы максимальной.

Функция (19.3) соответствует конечной цели оптимального планирования, в данном случае получению наибольшей прибыли, поэтому ее называют еще целевой функцией или, исходя из явного вида (19.3), линейной формой.

Если отвлечься от экономического смысла задачи и рассматривать искомые величины x_j, $j = \overline{1,n}$, как координаты точки в n-мерном аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$, то ограничения (19.1), (19.2) представляют собой некоторый выпуклый многогранник, а равенство (19.3) определяет множество параллельных (в силу произвольности F) гиперплоскостей этого же пространства $\mathcal{A}_n$. В такой математической интерпретации смысл задачи состоит в том, чтобы выбрать из всех гиперплоскостей ту, которая пересекает указанный выпуклый многогранник и ей отвечает наибольшее значение величины F. Очевидно, что решение будет единственным, если пересечение будет осуществляться по одной из вершин многогранника. В противном случае задача либо имеет множество решений, либо решение вообще отсутствует.

Проиллюстрируем сказанное выше примерами.

Пример 19.1. Предприятие выпускает два вида изделий, для производства которых используется три вида ресурсов, ограниченных значениями 18, 8 и 14 условных единиц. Матрица технологических коэффициентов $A = \|a_j^i\|$, указывающих количество единиц i-го ресурса для производства j-го изделия ($i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{19.4}$$

Составить оптимальный план выпуска продукции, если прибыль c_1 и c_2, получаемая от реализации изделий, равна

1) $c_1 = 2$, $c_2 = 2$;
2) $c_1 = 6$, $c_2 = 2$;
3) $c_1 = 4$, $c_2 = 4$.

Решение. Пусть предприятие выпускает x_1 единиц изделий первого вида и x_2 второго. При этом должны выполняться следующие ограничения:

$$\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 \leqslant 18, \\ &x_1 + x_2 \leqslant 8, \\ &2x_1 + x_2 \leqslant 14, \\ &x_1 \geqslant 0, \\ &x_2 \geqslant 0, \end{aligned} \tag{19.5}$$

причем два последних означают, что количество выпускаемых изделий не может быть отрицательным.

Ограничения (19.5) можно рассматривать как замкнутые полуплоскости, пересечение которых на плоскости с репером $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ образует, как показано в примере 17.8, выпуклый многоугольник $O(0,0)$, $A_2(0,6)$, $D(3,5)$, $E(6,2)$, $B(7,0)$.

Целевая функция, определяющая получение максимальной прибыли предприятия, в случае а) имеет вид

$$F = 2x_1 + 3x_2. \tag{19.6}$$

Это уравнение на плоскости x_1Ox_2 определяет множество параллельных прямых, пересекающих координатные прямые ℓ_1 и ℓ_2 в точках

$$x_1 = \frac{F}{2}, \qquad x_2 = \frac{F}{3} \tag{19.7}$$

соответственно. Из (19.7) следует, что максимальное значение целевой функции достигается на той прямой, которая, проходя через пятиугольник OA_2DEB, пересекает координатные прямые в точках с наибольшими значениями координат x_1 и x_2. Из рис. 26,*а* следует, что таковой является прямая, проходящая через точку $D(3,5)$. Подставив координаты этой точки в выражение (19.6), найдем максимальное значение целевой функции

$$F_{\max} = 2\cdot 3 + 3\cdot 5 = 21. \tag{19.8}$$

Таким образом, для случая а) оптимальным планом (в условных единицах) выпуска продукции являются значения $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, обеспечивающие максимум прибыли $F_{\max} = 21$.

Для проверки вычислим значения целевой функции (19.6) в остальных вершинах пятиугольника:

$$F\Big|_{O(0,0)} = 0, \quad F\Big|_{A(0,6)} = 2\cdot 0 + 3\cdot 6 = 18,$$
$$F\Big|_{E(6,2)} = 2\cdot 6 + 3\cdot 2 = 18, \quad F\Big|_{B(7,0)} = 2\cdot 7 + 3\cdot 0 = 14.$$

Как видим, все эти значения меньше найденного $F_{\max} = F\big|_{D(3,5)} = 21$.

◊ Вместо построения пятиугольника (рис. 26,*а*) можно было найти значения целевой функции (19.6) во всех вершинах этого пятиугольника и выбрать наибольшее из них.

В случае б) целевая функция имеет вид

$$F = 6x_1 + 4x_2. \tag{19.9}$$

Из рис. 26,*б* следует, что искомой прямой является прямая, проходящая через точку $E(6,2)$. Таким образом, оптимальным планом будет выпуск продукции $x_1 = 6$ и $x_2 = 2$, обеспечивающий максимальную прибыль (19.9)

$$F_{\max} = F\Big|_{D(6,2)} = 6\cdot 6 + 4\cdot 2 = 44.$$

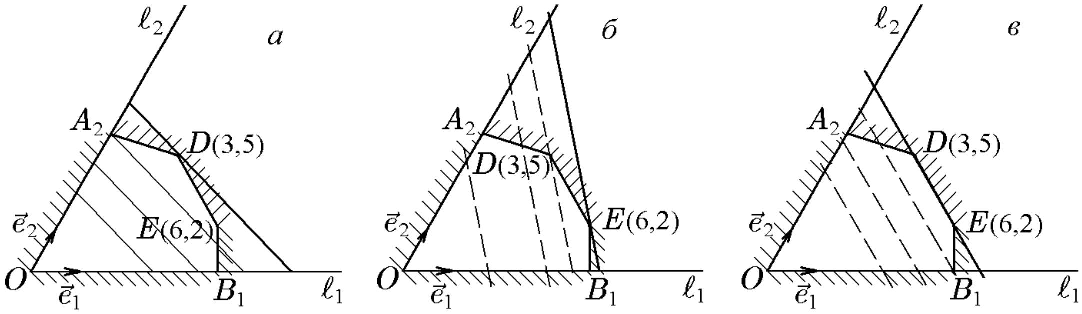


Рис. 26.

В случае в) целевая функция имеет вид

$$F = 4x_1 + 4x_2. \tag{19.10}$$

Из рис. 26,*в* видно, что искомой прямой является прямая, проходящая через точки $D(3,5)$ и $E(6,2)$, т.е. через грань DE пятигранника ограничений. Это означает, что максимальное значение целевой функции (19.10) обеспечивается координатами любой точки отрезка DE, хотя бы, например, точки $D(3,5)$: $F\big|_{D(3,5)} = 4\cdot 3 + 4\cdot 5 = 32$.

Таким образом, в отличие от предыдущих случаев, случай в) не имеет единственного решения — единственного оптимального плана.

Если учесть, что отрезок DE представляет собой одномерный симплекс с координатами

$$\begin{gathered} x_1 = 3\lambda_1 + 6\lambda_2, \qquad x_2 = 5\lambda_1 + 2\lambda_2, \\ \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \end{gathered} \tag{19.11}$$

то множество (19.11) задает совокупность оптимальных планов, имеющих одно и то же максимальное значение $F_{\max} = 32$, что и подтверждается подстановкой (19.11) в (19.10):

$$F\Big|_{(x_1,x_2)\in DE} = 4(3\lambda_1 + 6\lambda_2) + 4(5\lambda_1 + 2\lambda_2) = 32(\lambda_1 + \lambda_2) = 32.$$

Неопределенность решения в данном случае объясняется параллельностью прямой $x_1 + x_2 = 8$ из ограничений (19.5) и прямых (19.10), соответствующих целевой функции. При $F = 32$ эти параллельные прямые совпадают, образуя множество решений.

Следующий пример раскрывает еще одну сторону решения подобных задач.

Пример 19.2. Найти максимум целевой функции

$$F = x_1 + 2x_2 \tag{19.12}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &-4x_1 + 3x_2 \leqslant 3, \\ &-2x_1 + 3x_2 \leqslant 9, \\ &x_1 - 2x_2 \leqslant 2, \\ &x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{19.13}$$

Решение. Стандартным образом строим многогранник ограничений (19.13). Оказывается, что в данном случае неравенства (19.13) определяют неограниченное множество, т.е. многогранное, а именно пятигранное, тело (рис. 27) вместо замкнутого многогранника.

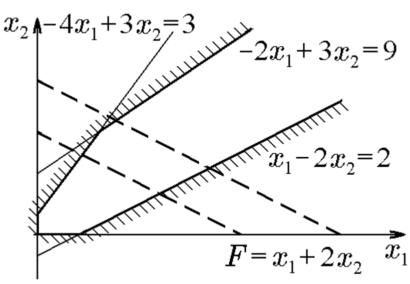


Рис. 27.

По этой причине прямую, соответствующую целевой функции (19.12), можно отодвигать от начала координат как угодно далеко, при этом она все равно будет пересекать пятигранное тело ограничений. Стало быть, целевая функция (19.12) может принимать сколь угодно большие значения, что можно записать как $F_{\max} = \infty$. Это означает отсутствие оптимального плана.

Приведенные примеры иллюстрируют простейший метод решения сформулированной задачи. В общем случае нахождение экстремума целевой функции (19.3) при ограничениях (19.1) является достаточно сложной задачей, которой занимается специальный раздел математики, называемый линейным программированием.

ГЛАВА 5

Линейные операторы

20. Линейные операторы. Матрица оператора

♦ *Линейным оператором* $\widehat{A}$, действующим в линейном пространстве $\mathcal{L}$ (или *преобразованием пространства* $\mathcal{L}$) над числовым полем $\mathcal{K}$, называется правило, по которому каждому элементу $\vec{x} \in \mathcal{L}$ сопоставляется определенный элемент $\vec{y} \in \mathcal{L}$:

$$\vec{y} = \widehat{A}\vec{x}, \tag{20.1}$$

причем для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{L}$ и любого $\alpha \in \mathcal{K}$ справедливо

$$\widehat{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \widehat{A}\vec{x}_1 + \widehat{A}\vec{x}_2;$$
$$\widehat{A}(\alpha\vec{x}_1) = \alpha\widehat{A}\vec{x}_1.$$

Пример 20.1. Показать, что оператор, который любому $\vec{x} \in \mathcal{L}$ ставит в соответствие нулевой вектор

$$\hat{0}\vec{x} = \vec{0},$$

является линейным.

Решение. Подействуем оператором $\widehat{A} = \hat{0}$ на сумму векторов;

$$\widehat{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \hat{0}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{0} = \hat{0}\vec{x}_1 + \hat{0}\vec{x}_2 = \widehat{A}\vec{x}_1 + \widehat{A}\vec{x}_2.$$

Аналогично

$$\widehat{A}\alpha\vec{x}_1 = \hat{0}\alpha\vec{x}_1 = \alpha\vec{0} = \alpha\widehat{A}\vec{x}_1.$$

Таким образом, оператор $\hat{0}$ — линейный оператор.

Пример 20.2. Показать, что оператор $\widehat{A}$, который любой $\vec{x} \in \mathcal{L}$ переводит в вектор $\beta\vec{x}$, где $\beta \in \mathcal{K}$ — фиксированное число, является линейным, т.е. $\widehat{A}\vec{x} = \beta\vec{x}$,

Решение. Действительно,

$$\widehat{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \beta(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \beta\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 = \widehat{A}\vec{x}_1 + \widehat{A}\vec{x}_2,$$
$$\widehat{A}\alpha\vec{x} = \beta\alpha\vec{x} = \alpha\beta\vec{x} = \alpha\widehat{A}\vec{x}.$$

Такой оператор называется *оператором подобного растяжения* или *подобия.*

♦ Пусть $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{L}$. Выберем в пространстве $\mathcal{L}$ базис $\vec{e}_j$, $j = \overline{1, n}$. Оператор P, который любому вектору

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x^j\vec{e}_j$$

ставит в соответствие вектор $\vec{y} = \sum\limits_{j=1}^{k} x^j\vec{e}_j$, $k < n$, называется *оператором проектирования на подпространство*, натянутое на векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$.

♢ Очевидно, что оператор проектирования линеен.

♦ Оператор, ставящий в соответствие произвольному вектору $\vec{x} \in \mathcal{L}$ этот же самый вектор, называется *тождественным* и обозначается $\widehat{E}\vec{x} = \vec{x}$.

$\Diamond$ Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство; $\vec{e}_j$ — его базис; $\widehat{A}$ — линейный оператор, действующий в $\mathcal{L}$. Так как $\widehat{A}\vec{e}_j$, $j=\overline{1,n}$, — векторы пространства $\mathcal{L}$, то каждый из них можно разложить единственным образом по векторам базиса:

$$\widehat{A}\vec{e}_j = \sum_{l=1}^{n} a_j^l \vec{e}_l, \qquad j=\overline{1,n}. \tag{20.2}$$

Матрица $A=\|a_j^l\|$ называется матрицей линейного оператора $\widehat{A}$ в базисе $\vec{e}_j$, $j=\overline{1,n}$.

Произвольный вектор $\vec{x}\in\mathcal{L}$ разложим по базису $\vec{e}_j$:

$$\vec{x}=\sum_{j=1}^{n} x^j\vec{e}_j.$$

Тогда

$$\vec{y}=\widehat{A}\vec{x}=\widehat{A}\sum_{j=1}^{n}x^j\vec{e}_j=\sum_{j=1}^{n}x^j\widehat{A}\vec{e}_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x^j a_j^l\vec{e}_l.$$

Обозначив координаты вектора $\vec{y}=\widehat{A}\vec{x}$ через y^j, запишем

$$y^l=\sum_{j=1}^{n}a_j^l x^j. \tag{20.3}$$

В матричной форме это соотношение запишется в виде

$$Y=AX, \tag{20.4}$$

где $A=\|a_j^l\|$ — матрица линейного оператора $\widehat{A}$; $X=\|x^l\|$ и $Y=\|y^l\|$ — матрицы-столбцы, составленные из координат векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в базисе $\vec{e}_j$.

$\Diamond$ Таким образом, каждому оператору $\widehat{A}$ соответствует (в фиксированном базисе) квадратная матрица $A=\|a_j^l\|$.

Пусть, наоборот, задана некоторая матрица A. Определим оператор $\widehat{A}$ формулами (20.4), т.е. положим $\widehat{A}\vec{x}=\vec{y}$, где координаты вектора $\vec{y}$ вычисляются по координатам вектора $\vec{x}$ по формулам (20.4) при фиксированном базисе. Легко проверить, что такой оператор линеен и каждому $\vec{x}\in\mathcal{L}$ ставит в соответствие $\vec{y}\in\mathcal{L}$.

Таким образом, соотношение (20.3) дает общий вид линейного оператора в конечномерном пространстве.

Пример 20.3. Найти матрицу оператора, переводящего векторы $\vec{x}_1=(1,0,-1)$, $\vec{x}_2=(0,1,-2)$ и $\vec{x}_3=(1,1,1)$ в векторы $\vec{y}_1=(0,1,-1)$, $\vec{y}_2=(1,0,2)$, $\vec{y}_3=(0,0,-1)$.

Решение. Используя (20.3) и согласно условию задачи, имеем соотношения

$$\vec{y}_1=Y_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\widehat{A}\vec{x}_1=AX_1=A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};$$

$$\vec{y}_2=Y_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\widehat{A}\vec{x}_2=AX_2=A\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix};$$

$$\vec{y}_3 = Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \widehat{A}\vec{x}_3 = AX_3 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые с помощью матриц

$$\mathcal{Y} = (Y_1\ Y_2\ Y_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (20.5)$$

$$\mathcal{X} = (X_1\ X_2\ X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (20.6)$$

можно записать одним матричным соотношением

$$\mathcal{Y} = A\mathcal{X},$$

откуда

$$A = \mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1}. \qquad (20.7)$$

Поскольку, согласно (20.6), $\det\mathcal{X} = 4 \neq 0$, обратная матрица $\mathcal{X}^{-1}$ существует. Вычислив её:

$$\mathcal{X}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

и подставив в (20.7), с учётом (20.5) найдём

$$A = \mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\Diamond$ На практике приходится решать следующие задачи, связанные с линейными операторами:

1) установить, является ли данное преобразование линейным;

2) найти матрицу линейного оператора в заданном базисе.

Итак, мы установили соответствие между линейными операторами с фиксированным базисом и квадратными матрицами, действующими в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Легко проверить, что это соответствие является взаимно однозначным.

Пример 20.4. Найти матрицу нулевого оператора.

Решение. Ясно, что $A = 0_{3\times 3}$.

21. Действия над линейными операторами

$\blacklozenge$ Операторы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$, действующие в пространстве $\mathcal{L}$, называются *равными*, если для любого $\vec{x} \in \mathcal{L}$ справедливо $\widehat{A}\vec{x} = \widehat{B}\vec{x}$.

Очевидно, что матрицы A, B равных операторов равны, так как

$$\sum_{l=1}^{n} a_j^l \vec{e}_l = \sum_{l=1}^{n} b_j^l \vec{e}_l.$$

♦ *Суммой двух линейных операторов* называется оператор $\widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{B}$, действующий по правилу

$$\widehat{C}\vec{x} = (\widehat{A}\vec{x} + \widehat{B}\vec{x}) = \widehat{A}\vec{x} + \widehat{B}\vec{x}.$$

♦ *Произведением линейного оператора $\widehat{A}$ на число $\lambda \in \mathcal{K}$* называется оператор $\widehat{B} = \lambda\widehat{A}$, действующий по правилу

$$\widehat{B}\vec{x} = (\lambda\widehat{A})\vec{x} = \lambda\widehat{A}\vec{x}.$$

♦ *Произведением двух линейных операторов* $\widehat{A}\widehat{B} = \widehat{C}$ называется линейный оператор, действующий по правилу

$$\widehat{C}\vec{x} = \widehat{A}(\widehat{B}\vec{x}).$$

Например,

$$\begin{aligned}
&\widehat{C}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \widehat{A}(\widehat{B}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)) = \\
&\qquad = \widehat{A}(\widehat{B}\vec{x}_1 + \widehat{B}\vec{x}_2) = \widehat{A}(\widehat{B}\vec{x}_1) + \widehat{A}(\widehat{B}\vec{x}_2) = \widehat{C}\vec{x}_1 + \widehat{C}\vec{x}_2, \\
&\widehat{C}\lambda\vec{x} = \widehat{A}(\widehat{B}\lambda\vec{x}) = \widehat{A}\lambda(\widehat{B}\vec{x}) = \lambda\widehat{A}(\widehat{B}\vec{x}) = \lambda\widehat{C}\vec{x}.
\end{aligned}$$

♢ Легко проверить, что если $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ — линейные операторы, то $\widehat{A} + \widehat{B}$, $\lambda\widehat{A}$ и $\widehat{A}\widehat{B}$ — тоже линейные операторы.

♢ При сложении двух операторов их матрицы складываются. При перемножении двух операторов их матрицы перемножаются.

Нетрудно показать, что множество всех линейных операторов образует линейное пространство относительно операций сложения и умножения на число.

22. Переход от одного базиса к другому

Пусть даны две системы векторов: $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^n$ и $\{\vec{e}_{j'}\}_{j'=1}^n$ в пространстве $\mathcal{L}$. Условимся систему $\vec{e}_j$ называть старой, а $\vec{e}_{j'}$ — новой. Предположим, что старая система векторов образует базис. Тогда

$$\vec{e}_{j'} = \sum_{j=1}^n p^j_{j'}\vec{e}_j = p^j_{j'}\vec{e}_j, \tag{22.1}$$

где $p^l_{l'}$ — координаты векторов базиса новой системы в базисе старой. Матрицу этих координат будем называть *матрицей перехода от старой системы к новой*: $P = \|p^l_{l'}\|$. В соотношении (22.1) мы воспользовались обозначением Эйнштейна, в котором подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Теорема 22.1. *Пусть старая система векторов образует базис. Новая система векторов $\{\vec{e}_{j'}\}_{j'=1}^n$ образует базис тогда и только тогда, когда матрица перехода P невырождена.*

Доказательство. Система векторов $\{\vec{e}_{j'}\}_{j'=1}^n$ образует базис тогда и только тогда, когда ее ранг равен n. Но ранг системы векторов равен рангу матрицы P, составленной из координат этих векторов в базисе $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^n$. Ранг $n \times n$-матрицы равен n тогда и только тогда, когда эта матрица невырождена.

Пусть обе системы векторов являются базисными. Тогда старые базисные векторы выражаются через новые по формулам

$$\vec{e}_j = \sum_{j'=1}^{n} \tilde{p}_j^{j'} \vec{e}_{j'}, \tag{22.2}$$

где $\tilde{p}_j^k$ — координаты векторов базиса старой системы в базисе новой. Матрицу этих координат будем называть *матрицей перехода от новой системы к старой*: $\widetilde{P} = \|\tilde{p}_j^k\|$. Матрица из координат векторов старого базиса в новом является матрицей перехода от нового базиса к старому, т.е. матрицей обратного перехода.

Подставим (22.1) в (22.2):

$$\vec{e}_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_j^k p_k^i \vec{e}_i,$$

но величины

$$b_j^i = \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_j^k p_k^i$$

— координаты j-го вектора в старом базисе. Таким образом,

$$b_j^i = \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_j^k p_k^i = \delta_j^i.$$

Следовательно, $\widetilde{P} = P^{-1}$. Последнее соотношение в матричной форме примет вид $\widetilde{P}P = \mathbb{I}$.

Пусть $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ и $\widetilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix}$ — координаты вектора $\vec{x} \in \mathcal{L}$ соответственно в старом и новом базисах.

Теорема 22.2. *Матрицы X и $\widetilde{X}$ связаны соотношением*

$$X = P\widetilde{X}, \qquad \widetilde{X} = P^{-1}X. \tag{22.3}$$

Доказательство. По определению,

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x^j \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}^k \vec{e}_k. \tag{22.4}$$

Подставим (22.1) в (22.4) и получим

$$\sum_{j=1}^{n} x^j \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}^k p_k^i \vec{e}_i$$

или

$$x^j = \sum_{k=1}^{n} p_k^j \tilde{x}^k, \tag{22.5}$$

или в матричной форме $X = P\tilde{X}$, что и требовалось доказать.

♦ *Тензором первого ранга, один раз ковариантным*, называется объект, координаты которого при преобразовании базиса преобразуются по правилу (22.5).

Рассмотрим, как преобразуются матрицы линейных операторов при преобразованиях базиса. Пусть $A = \|a_l^j\|$ и $\widetilde{A} = \|\tilde{a}_l^j\|$ — матрицы оператора $\widehat{A}$ в старом и новом базисах соответственно. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 22.3. *Матрицы оператора $\widehat{A}$ в старом и новом базисах связаны соотношением*

$$\widetilde{A} = P^{-1}AP. \tag{22.6}$$

Доказательство. По определению матрицы оператора (20.4), запишем

$$Y = AX. \tag{22.7}$$

Аналогично в новом базисе

$$\widetilde{Y} = \widetilde{A}\widetilde{X}. \tag{22.8}$$

Подставив (22.3) в (22.7), получим

$$P\widetilde{Y} = AP\widetilde{X}.$$

Домножив последнее соотношение слева на P^{-1}, получим

$$\widetilde{Y} = P^{-1}AP\widetilde{X}. \tag{22.9}$$

Сопоставив (22.9) с (22.8), получим (22.5), что и требовалось доказать.

◊ Соотношение (22.5) в координатной форме примет вид

$$a^{j'}_{i'} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^i_{i'} a^j_i p^{j'}_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^i_{i'} p^{j'}_j a^j_i. \tag{22.10}$$

♦ *Тензором второго ранга, один раз ковариантным и один раз контравариантным*, называется объект, координаты которого при преобразовании базиса преобразуются по правилу (22.10).

Следствие 22.3.1. Справедливо соотношение

$$\det A = \det \widetilde{A}. \tag{22.11}$$

Доказательство. Действительно, так как определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц, получим

$$\det \widetilde{A} = \det P^{-1} \det A \det P = \frac{1}{\det P} \det A \det P = \det A.$$

◊ Таким образом, определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса. Поэтому можно ввести следующее определение.

♦ *Определителем линейного оператора* $\widehat{A}$ называется число, равное

$$\det \widehat{A} = \det A, \tag{22.12}$$

где A — матрица оператора $\widehat{A}$ в любом базисе.

♦ Полином относительно λ:

$$\det(\widehat{A} - \lambda\widehat{E}) \tag{22.13}$$

называется *характеристическим полиномом* оператора $\widehat{A}$, а уравнение

$$\det(\widehat{A} - \lambda\widehat{E}) = 0 \tag{22.14}$$

называется *характеристическим уравнением* оператора $\widehat{A}$.

23. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов

Пусть $\mathcal{L}_1$ — подпространство линейного пространства $\mathcal{L}$ размерности n, а $\widehat{A}$ — линейный оператор, действующий в $\mathcal{L}$.

♦ Подпространство $\mathcal{L}_1$ называется *инвариантным подпространством* оператора $\widehat{A}$, если для любого $\vec{x} \in \mathcal{L}_1$ существует $\vec{y} = \widehat{A}\vec{x} \in \mathcal{L}_1$.

◊ Пространства $\mathcal{L}$ и O всегда являются инвариантными подпространствами любого линейного оператора.

◊ Очень важную роль в теории линейных операторов и в физических приложениях играет понятие собственных векторов и собственных значений.

Нас будут интересовать одномерные инвариантные подпространства, называемые собственными направлениями операторов.

♦ Отличный от тождественного нуля вектор $\vec{g} \in \mathcal{L}$ ($\vec{g} \neq 0$) называется *собственным вектором* оператора $\widehat{A}$, если

$$\widehat{A}\vec{g} = \lambda\vec{g}, \qquad \lambda \in \mathcal{K}. \tag{23.1}$$

Число λ называется *собственным значением* оператора $\widehat{A}$.

◊ Собственное значение λ может быть как вещественным, тогда $\mathcal{K} = \mathbb{R}$, так и комплексным, тогда $\mathcal{K} = \mathbb{C}$.

♦ Совокупность всех собственных значений данного оператора называется его *спектром.*

Рассмотрим основные свойства собственных векторов и собственных значений оператора $\widehat{A}$.

Свойство 1. Если $\vec{g}$ — собственный вектор оператора $\widehat{A}$, то для любого $\alpha \in \mathcal{K}$ вектор $\alpha\vec{g}$ также является собственным вектором этого оператора с тем же собственным значением.

Доказательство. Действительно, $\widehat{A}\vec{g} = \lambda\vec{g}$. Следовательно,

$$\widehat{A}(\alpha\vec{g}) = \alpha\widehat{A}\vec{g} = \alpha\lambda\vec{g} = \lambda(\alpha\vec{g}).$$

Свойство 2. Множество всех собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению, образует линейное инвариантное подпространство оператора $\widehat{A}$.

Доказательство. Пусть $\widehat{A}\vec{g}_1 = \lambda\vec{g}_1$ и $\widehat{A}\vec{g}_2 = \lambda\vec{g}_2$. Тогда для вектора $\vec{y} = \alpha\vec{g}_1 + \beta\vec{g}_2$, где $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$, получим

$$\widehat{A}\vec{y} = \widehat{A}(\alpha\vec{g}_1 + \beta\vec{g}_2) = \widehat{A}\alpha\vec{g}_1 + \widehat{A}\beta\vec{g}_2 = \alpha\lambda\vec{g}_1 + \beta\lambda\vec{g}_2 = \lambda(\alpha\vec{g}_1 + \beta\vec{g}_2) = \lambda\vec{y},$$

что и требовалось доказать.

Свойство 3. Собственные векторы $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m$, $m \leqslant n$, с попарно различными собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$; $i \neq j$), образуют линейно независимую систему векторов.

Доказательство проведем методом математической индукции. При $n = 1$ утверждение верно, поскольку один ненулевой вектор является линейно независимым. Пусть утверждение справедливо для k векторов $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k$. Докажем, что оно справедливо для системы из $(k+1)$ собственного вектора. Предположим противное: существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$, не равные нулю одновременно, для которых

$$\sum_{l=1}^{k+1} \alpha_l\vec{g}_l = 0. \tag{23.2}$$

Умножим (23.2) на $\widehat{A}$ и, воспользовавшись свойствами линейного оператора, получим

$$\widehat{A}\sum_{l=1}^{k+1}\alpha_l\vec{g}_l = \sum_{l=1}^{k+1}\alpha_l\widehat{A}\vec{g}_l = \sum_{l=1}^{k+1}\alpha_l\lambda_l\vec{g}_l.$$

Но, с другой стороны, $\widehat{A}\vec{0} = \vec{0}$, т.е.

$$\sum_{l=1}^{k+1}\alpha_l\lambda_l\vec{g}_l = 0. \tag{23.3}$$

Умножим (23.2) на λ_{k+1} и вычтем из (23.3). Получим

$$\sum_{l=1}^{k}(\lambda_l - \lambda_{k+1})\alpha_l\vec{g}_l + (\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})\alpha_{k+1}\vec{g}_{k+1} = 0.$$

По условию $\lambda_k - \lambda_{k+1} \neq 0$ и $\alpha_l \neq 0$. Следовательно, система векторов $\{\vec{g}_l\}_{l=1}^{k}$ линейно зависима. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Возникает вопрос: как находятся собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}$.

Теорема 23.1. *Собственные значения линейного оператора $\widehat{A}$ совпадают с корнями характеристического уравнения оператора $\widehat{A}$.*

Доказательство. Выберем в пространстве $\mathcal{L}$ некоторый базис $\vec{e}_j$. Пусть в этом базисе оператору $\widehat{A}$ отвечает матрица A, а X — матрица-столбец из координат вектора $\vec{g}$. Тогда вектор $\widehat{A}\vec{g}$ имеет столбец из координат AX. С другой стороны, $\widehat{A}\vec{g} = \lambda\vec{g}$. Следовательно, приходим к уравнению

$$AX = \lambda X \tag{23.4}$$

или

$$(A - \lambda\mathbb{I})X = 0. \tag{23.5}$$

Такая система имеет отличные от нуля решения тогда и только тогда, когда $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$, что и требовалось доказать.

$\lozenge$ Если это не приводит к недоразумениям, будем отождествлять вектор $\vec{g}$ и столбец его координат. Тогда (23.5) можно записать в виде

$$(A - \lambda\mathbb{I})\vec{g} = 0. \tag{23.6}$$

$\blacklozenge$ Пусть собственное значение λ_k встречается среди корней характеристического уравнения p_k раз. Число p_k называется *алгебраической кратностью собственного значения* λ_k.

$\blacklozenge$ Пусть $r_k = \operatorname{rang}(A - \lambda_k\mathbb{I})$. Число $s_k = n - r_k$ называется *геометрической кратностью собственного значения* λ_k.

$\lozenge$ Таким образом, каждому λ_k отвечает s_k линейно независимых собственных векторов $\vec{g}_{j_k}$, $j_k = \overline{1, s_k}$.

Пример 23.1. Пусть в некотором базисе матрица оператора $\widehat{A}$ имеет вид

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}$ в этом базисе.

Решение. а) Запишем систему (23.6) в развернутом виде:

$$\begin{array}{l}(1-\lambda)g_1+2g_2=0,\\ 2g_1+(1-\lambda)g_2=0;\end{array}\qquad \begin{pmatrix}g_1\\ g_2\end{pmatrix}. \tag{23.7}$$

Система (23.7) имеет нетривиальные решения, если λ является корнем характеристического уравнения

$$\det(A-\lambda\mathbb{I})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=0.$$

Найдем $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$.

Для $\lambda=-1$ из (23.7) получим систему уравнений

$$\begin{array}{c}[1-(-1)]g_1+2g_2=0,\\ 2g_1+[1-(-1)]g_2=0.\end{array}$$

Так как ранг матрицы этой системы равен единице, то одно из уравнений системы является следствием другого, поэтому можно отбросить последнее уравнение. Положив $g_2=1$, найдем

$$\vec{g}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Аналогично для $\lambda_2=3$ из (23.7) запишем

$$\begin{array}{c}(1-3)g_1+2g_2=0,\\ 2g_1+(1-3)g_2=0.\end{array}$$

Отсюда

$$\vec{g}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

б) В развернутом виде задача (23.6) на собственные значения и собственные векторы матрицы A запишется как

$$\begin{array}{r}(5-\lambda)g_1+2g_2=0,\\ -4g_1+(-1-\lambda)g_2=0;\end{array},\qquad \vec{g}=\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\end{pmatrix}. \tag{23.8}$$

Однородная система (23.8) имеет нетривиальные решения при условии

$$\det(A-\lambda\mathbb{I})=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ -4 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Отсюда найдём уравнение для определения собственных значений λ

$$(5-\lambda)(-1-\lambda)+8=\lambda^2-4\lambda+3=0,$$

имеющее корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$.

Поочерёдно подставив эти значения в (23.8), найдём два линейно независимых собственных вектора $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$. Действительно, подстановка $\lambda_1=1$ даёт

$$\begin{array}{r}4g_1^1+2g_2^1=0,\\ -4g_1^1-2g_2^1=0,\end{array} \tag{23.9}$$

откуда $g_2^1 = -2g_1^1$ и

$$\vec{g}_1 = g_1^1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Выбрав $g_1^1 = 1$, имеем собственный вектор

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{23.10}$$

Подставив $\lambda_2 = 3$ в (23.8), получим

$$\begin{aligned} 2g_1^2 + 2g_2^2 &= 0, \\ -4g_1^2 - 4g_2^2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда $g_2^2 = -g_1^2$ и

$$\vec{g}_2 = g_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Выбрав $g_1^2 = 1$, имеем второй собственный вектор

$$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{23.11}$$

Таким образом, собственному значению $\lambda_1 = 1$ соответствует собственный вектор $\vec{g}_1$ (23.10), а собственному значению $\lambda_2 = 3$ — собственный вектор $\vec{g}_2$ (23.11).

в) Запишем систему (23.6) в развёрнутом виде:

$$\begin{aligned} (2-\lambda)g_1 + g_2 + g_3 &= 0, \\ g_1 + (2-\lambda)g_2 + g_3 &= 0, \\ g_1 + g_2 + (2-\lambda)g_3 &= 0, \end{aligned} \tag{23.12}$$

где $\vec{g} = (g_1 \quad g_2 \quad g_3)^\intercal$. Однородная система (23.12) имеет нетривиальное решение при условии

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] - (2-\lambda-1) + (1-2+\lambda) = (\lambda-4)(1-\lambda)^2 = 0,$$

т.е. при $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Для простого корня $\lambda_1 = 4$ система (23.12) примет вид

$$\begin{aligned} -2g_1 + g_2 + g_3 &= 0, \\ g_1 - 2g_2 + g_3 &= 0, \\ g_1 + g_2 - 2g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Выпишем матрицу этой системы и выполним указанные элементарные преобразования:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{S_2-S_3}{\overset{S_1+S_2+S_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{S_3-S_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $r_1 = \operatorname{rang}(A - 4\mathbb{I}) = 2$ и простому корню $\lambda_1 = 4$ соответствует один собственный вектор (для простого корня геометрическая и алгебраическая кратности всегда совпадают)

$$\vec{g}_1 = g_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

равный

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{23.13}$$

если выбрать $g_3 = 1$.

Второй корень $\lambda_2 = 1$ имеет алгебраическую кратность $p_2 = 2$, и для него система (23.12) запишется как

$$\begin{gathered} g_1 + g_2 + g_3 = 0, \\ g_1 + g_2 + g_3 = 0, \\ g_1 + g_2 + g_3 = 0. \end{gathered}$$

Отсюда следует, что ранг этой системы равен единице, т.е. $r_2 = \operatorname{rang}(A - \mathbb{I}) = 1$. Это соответствует геометрической кратности корня, равной двум ($s_2 = 3 - 1 = 2$). Таким образом, для корня $\lambda_1 = 1$ имеем два собственных вектора

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} -g_2 - g_3 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix},$$

которые можно записать как

$$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

если положить $g_2 = -1$, $g_3 = 0$, и

$$\vec{g}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

если положить $g_2 = 0$, $g_3 = -1$.

$\Diamond$ Базис в линейном пространстве $\mathcal{L}$, составленный из собственных векторов оператора $\widehat{A}$, если такой базис существует, оказывается собственным базисом оператора $\widehat{A}$.

Теорема 23.2. *Для того чтобы матрица A линейного оператора $\widehat{A}$ в данном базисе была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы этот базис был собственным базисом оператора $\widehat{A}$.*

Доказательство непосредственно следует из определения базиса и собственных векторов.

24. Канонический вид линейного оператора

♦ Два оператора $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ называются *эквивалентными*, если существуют такие два базиса в пространстве $\mathcal{L}$, что матрицы оператора $\widehat{A}$ в первом базисе совпадает с матрицей оператора $\widehat{B}$ во втором базисе.

◊ Очевидно, что эквивалентные операторы определяют в пространстве $\mathcal{L}$ одинаковые по своим свойствам линейные преобразования. Возникает вопрос, как узнать по матрицам операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ в одном базисе, являются ли они эквивалентными. Для ответа на этот вопрос используют базис, в котором матрица оператора $\widehat{A}$ имеет «канонический вид» — наипростейший вид, называемый жордановой формой матрицы. Оказывается, что если операторы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ эквивалентны, то канонический вид этих матриц совпадает.

♦ Вектор $\vec{g}^{(m)}$ называется *присоединенным вектором* оператора $\widehat{A}$, отвечающим собственному значению λ, если для некоторого $m \geqslant 1$ справедливы соотношения

$$(\widehat{A}-\lambda\widehat{E})^{m-1}\vec{g}^{(m)} \neq 0, \qquad (\widehat{A}-\lambda\widehat{E})^{m}\vec{g}^{(m)} = 0. \tag{24.1}$$

Число m называется *порядком присоединенного вектора*, или *весом вектора*.

◊ Из определения следует, что если $\vec{g}^{(m)}$ — присоединенный вектор порядка m, отвечающий собственному значению λ, то вектор $\vec{y} = (\widehat{A}-\lambda\widehat{E})^{m-1}\vec{g}$ — собственный вектор оператора $\widehat{A}$ с тем же собственным значением.

◊ Из определения следует, что собственный вектор $\vec{g}$ есть присоединенный вектор первого порядка.

Пусть l — число различных собственных значений оператора $\widehat{A}$. Тогда общее число линейно независимых собственных векторов этого оператора равно $s = \sum\limits_{j=1}^{l} s_j$, где s_j — геометрическая кратность собственных значений λ_j. Нетрудно заметить, что $s \geqslant l$.

Пусть $\{\vec{g}_j^{(1)}\}_{j=1}^{s}$ — линейно независимые собственные векторы оператора $\widehat{A}$. Присвоим собственным значениям оператора $\widehat{A}$ те же номера j, что и отвечающим им линейно независимым собственным векторам $\vec{g}_j^{(1)}$, так что

$$\widehat{A}\vec{g}_j^{(1)} = \lambda_j\vec{g}_j^{(1)}, \quad j=\overline{1,s},$$

независимо от того, совпадают значения λ_j и λ_k или нет (так как собственных чисел может быть меньше, чем линейно независимых собственных векторов).

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 24.1 (Жордана). *Пусть $\widehat{A}$ — линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$. Существует базис*

$$\{\vec{g}_j^{(m_j)}\}, \qquad j=\overline{1,s}, \quad m_j=\overline{1,n_j}, \quad \sum_{i=1}^{s} n_i = n, \tag{24.2}$$

образованный линейно независимыми собственными $\vec{g}_j^{(1)}$ и присоединенными $\vec{g}_j^{(m_j)}$ $(m_j=\overline{2,n_j})$ векторами, в котором действие оператора $\widehat{A}$ описывается следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\widehat{A}\vec{g}_j^{(1)} = \lambda_j\vec{g}_j^{(1)},\\ \widehat{A}\vec{g}_j^{(m_j)} = \lambda_k\vec{g}_j^{(m_j)} + \vec{g}_j^{(m_j-1)}, \quad m_j=\overline{2,n_j}.\end{gathered} \tag{24.3}$$

Здесь через $(n_j - 1)$ обозначено число присоединенных векторов $\vec{g}_j^{(m_j)}$, отвечающих собственному вектору $\vec{g}_j^{(1)}$.

♦ Система уравнений (24.3), определяющая собственные и присоединенные векторы $\vec{g}_j^{(m_j)}$, называется *жордановой цепочкой.*

Следствие 24.1.1. Матрица A линейного оператора $\widehat{A}$ в базисе $\{\vec{g}_j^{(m_j)}\}$ имеет следующий блочно-диагональный («клеточный») вид:

$$A^0 = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix}, \qquad (24.4)$$

где клетка $J_j(\lambda_j)$, отвечающая собственному вектору $\vec{g}_j^{(1)}$, представляет собой следующую матрицу:

$$J_j(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{pmatrix} \qquad (24.5)$$

размерности $n_j \times n_j$.

Доказательство. Составим матрицу

$$S = (\vec{g}_1^{(1)} \;\; \vec{g}_1^{(2)} \;\; \dots \;\; \vec{g}_1^{(n_1)} \;\; \vec{g}_2^{(1)} \;\; \dots \;\; \vec{g}_s^{(n_s)}).$$

Из (24.3) следует, что $\widehat{A}S = SA^0$, следовательно $A^0 = S^{-1}AS$, что и требовалось показать.

♦ Форма (24.4) матрицы A линейного оператора $\widehat{A}$ называется *жордановой формой* матрицы этого оператора. При этом матричный блок $J_k(\lambda_k)$ (24.5) называется *жордановой клеткой* матрицы $\widehat{A}$.

◊ Жорданова форма (24.4) определена с точностью до порядка расположения клеток J_k на диагонали матрицы A^0. Этот порядок зависит от нумерации собственных векторов $\vec{g}_j^{(1)}$.

Пример 24.1. Привести все возможные виды жордановой формы матрицы размера 3×3 при $\lambda = 2$.

Решение. Согласно определению, жорданова форма может иметь один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

При практическом приведении матрицы оператора к жордановой форме при небольших n удобно использовать следующую схему:

1) из характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$$

находим собственные значения λ_i $(i = \overline{1, l})$ и их алгебраические кратности p_i;

2) определяем геометрическую кратность s_i собственного значения λ_i:

$$s_i = n - r_i, \qquad r_i = \operatorname{rang}(A - \lambda_i\mathbb{I});$$

3) ищем общее решение уравнения $(A - \lambda_i\mathbb{I})\vec{g} = 0$, т.е. линейную комбинацию собственных векторов $\vec{g} = \sum\limits_{k=1} \alpha_k \vec{g}_k^{(1)}$, отвечающих собственному значению λ_i;

4) ищем присоединенные векторы $\vec{g}_j^{(m)}$ из уравнений

$$(\widehat{A} - \lambda_i\mathbb{I})\vec{g}_j^{(m)} = \vec{g}_j^{(m-1)}, \quad m \geqslant 2;$$

из условия совместности этих систем выбираем базис в пространстве собственных векторов;

5) составляем матрицу S и проверяем условие

$$SA^0 = AS.$$

♢ Заметим, что векторы $\vec{g}_j^{(m_j)}$ (24.3) определяются соотношениями

$$\begin{array}{l}
(A - \lambda_j\mathbb{I})\vec{g}_j^{(1)} = 0;\\
(A - \lambda_j\mathbb{I})\vec{g}_j^{(2)} = \vec{g}_j^{(1)} \quad \text{или} \quad (A - \lambda_j\mathbb{I})^2\vec{g}_j^{(2)} = 0;\\
(A - \lambda_j\mathbb{I})\vec{g}_j^{(3)} = \vec{g}_j^{(2)} \quad \text{или} \quad (A - \lambda_j\mathbb{I})^3\vec{g}_j^{(3)} = 0;\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\\
(A - \lambda_j\mathbb{I})\vec{g}_j^{(n_j)} = \vec{g}_j^{(n_j-1)} \quad \text{или} \quad (A - \lambda_j\mathbb{I})^{n_j}\vec{g}_j^{(n_j)} = 0,
\end{array} \tag{24.6}$$

которые коротко можно записать как

$$(A - \lambda_j\mathbb{I})^{m_j}\vec{g}_j^{(m_j)} = 0, \quad m_j = \overline{1, n_j}. \tag{24.7}$$

♢ Если $n \times n$ матрица A линейного оператора $\widehat{A}$ вещественна и имеет комплексное собственное значение $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, где $\alpha_k = \operatorname{Re}\lambda_k$, $\beta_k = \operatorname{Im}\lambda_k$, то нетрудно заметить, что $\lambda_k^* = \alpha_k - i\beta_k$ также будет собственным значением матрицы A. Представив каждый вектор $\vec{g}_k^{(m_k)}$ в виде

$$\vec{g}_k^{(m_k)} = \vec{u}_k^{(m_k)} + i\vec{v}_k^{(m_k)}, \quad \vec{u}_k^{(m_k)}, \vec{v}_k^{(m_k)} \in \mathbb{R}^n,$$

жорданову цепочку можно записать следующим образом:

$$\begin{array}{l}
\widehat{A}\vec{u}_k^{(1)} = \alpha_k\vec{u}_k^{(1)} - \beta_k\vec{v}_k^{(1)},\\
\widehat{A}\vec{v}_k^{(1)} = \alpha_k\vec{v}_k^{(1)} + \beta_k\vec{u}_k^{(1)},\\
\widehat{A}\vec{u}_k^{(m_k)} = \alpha_k\vec{u}_k^{(m_k)} - \beta_k\vec{v}_k^{(m_k)} + \vec{u}_k^{(m_k-1)},\\
\widehat{A}\vec{v}_k^{(m_k)} = \alpha_k\vec{v}_k^{(m_k)} + \beta_k\vec{u}_k^{(m_k)} + \vec{v}_k^{(m_k-1)},
\end{array} \tag{24.8}$$

$$k = \overline{1, s}, \quad m_k = \overline{2, n_k}.$$

Тогда в базисе векторов $\{\vec{g}_j^{\,(m_j)}\}$, заменив каждую пару комплексно сопряженных векторов их действительной и мнимой частями, получим новый вещественный базис $\{\tilde{\vec{g}}_j^{\,(m_j)}\}$. В этом базисе матрица $\widetilde{A}^0$ линейного оператора $\widehat{A}$ также будет иметь блочно-диагональный вид, который получается из (24.4) заменой $(2n_k) \times (2n_k)$ комплексного блока

$$\begin{pmatrix} J_k(\lambda_k) & 0 \\ 0 & J_k(\lambda_k^*) \end{pmatrix}$$

на $(2n_k) \times (2n_k)$ вещественный блок

$$J_k(\alpha_k, \beta_k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_k & \alpha_k & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_k & \beta_k & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_k & \alpha_k & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \beta_k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta_k & \alpha_k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}. \tag{24.9}$$

Действительно, если из векторов вещественного базиса $\{\tilde{\vec{g}}_{l_i}^{\,(m_i)}\}$ составить матрицу $\widetilde{S}$, то из (24.8) немедленно следует $\widehat{A}\widetilde{S} = \widetilde{S}\widetilde{A}^0$, $\widetilde{A}^0 = \widetilde{S}^{-1}AS$.

$\Diamond$ Матрица $\widetilde{A}^0$ является вещественным аналогом жордановой формы матрицы A линейного оператора $\widehat{A}$ для комплексных собственных значений.

Пример 24.2. Пусть оператор $\widehat{A}$ в некотором базисе имеет матрицу

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$.

Найти собственные и присоединенные векторы оператора A.

Решение. а) В явном виде задача на собственные значения и собственные векторы матрицы A запишется как

$$\begin{aligned} (2-\lambda)g_1 + g_2 - g_3 &= 0, \\ (3-\lambda)g_2 - g_3 &= 0, \\ g_2 + (1-\lambda)g_3 &= 0, \end{aligned} \tag{24.10}$$

где $\vec{g} = (g_1 \quad g_2 \quad g_3)^\intercal$. Однородная система (24.10) имеет нетривиальные решения при условии

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее уравнение является кубическим:

$$(\lambda - 2)^3 = 0,$$

имеющим один корень $\lambda = 2$ кратности $p = 3$.

Подстановка единственного собственного значения $\lambda = 2$ в матрицу $(A - \lambda\mathbb{I})$ приводит её к виду

$$(A - \lambda\mathbb{I})\Big|_{\lambda=2} = (A - 2\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{24.11}$$

С учётом этого система (24.10) записывается как

$$\begin{aligned} g_2 - g_3 = 0, \\ g_2 - g_3 = 0, \\ g_2 - g_3 = 0. \end{aligned} \tag{24.12}$$

Так как ранг матрицы системы (24.12) равен единице ($r = \operatorname{rang}(A - \lambda\mathbb{I})\big|_{\lambda=2} = 1$), то эта система имеет фундаментальную систему решений, состоящую из двух собственных векторов, поскольку $p - r = 3 - 1 = 2$. Напомним, что эта разность равна геометрической кратности корня, имеющего алгебраическую кратность $p = 3$. Собственные векторы $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$ с учётом соотношения

$$g_2 = g_3 \tag{24.13}$$

можно получить из столбца

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_2 \end{pmatrix}, \tag{24.14}$$

задав g_1 и g_2 так, чтобы векторы $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$ были линейно независимыми и один из них имел присоединенный вектор.

Из теоремы Жордана 24.1 следует также, что два собственных вектора можно дополнить до трехмерного базиса третьим вектором, который называется присоединённым и который мы обозначим как $\vec{g}_1^{(2)} = (g_1^{(2)}\ g_2^{(2)}\ g_3^{(2)})^\intercal$, положив с учётом (24.14) $\vec{g}_1 = \vec{g}_1^{(1)} = (g_1^{(1)}\ g_2^{(1)}\ g_2^{(1)})^\intercal$. Присоединённый вектор $\vec{g}_1^{(2)}$ и собственный вектор $\vec{g}_1^{(1)}$ связаны соотношением

$$(A - 2\mathbb{I})\vec{g}_1^{(2)} = \vec{g}_1^{(1)},$$

которое с учётом (24.11) и согласно введённым обозначениям имеет вид

$$\begin{aligned} g_2^{(2)} - g_3^{(2)} = g_1^{(1)}, \\ g_2^{(2)} - g_3^{(2)} = g_2^{(1)}, \\ g_2^{(2)} - g_3^{(2)} = g_2^{(1)}. \end{aligned} \tag{24.15}$$

Поскольку матрица системы (24.15) совпадает с матрицей системы (24.12), имеющей ранг, равный единице, то нетривиальное решение (24.15) возможно только при условии $g_1^{(1)} = g_2^{(1)}$, т.е. для вектора

$$\vec{g}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} g_1^{(1)} \\ g_1^{(1)} \\ g_1^{(1)} \end{pmatrix} = g_1^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или

$$\vec{g}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{24.16}$$

если выбрать $g_1^{(1)} = 1$. Но тогда координаты присоединённого вектора определятся системой

$$\begin{aligned} g_2^{(2)} - g_3^{(2)} &= 1, \\ g_2^{(2)} - g_3^{(2)} &= 1, \\ g_2^{(2)} - g_3^{(2)} &= 1. \end{aligned}$$

Найдем

$$\vec{g}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} g_1^{(2)} \\ 1 + g_3^{(2)} \\ g_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

или

$$\vec{g}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{24.17}$$

если положить $g_1^{(2)} = g_3^{(2)} = 0$.

Итак, в процессе нахождения присоединённого вектора (24.17) мы определили из (24.14) один собственный вектор $\vec{g}_1^{(1)}$ как (24.16). Положив теперь в (24.14), например, $g_1 = 1$, а $g_2 = 0$, найдём второй собственный вектор

$$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{24.18}$$

линейно независимый с $\vec{g}_1^{(1)}$.

Матрица перехода к новому базису примет вид

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а для матрицы оператора в новом базисе найдем

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Проведем проверку:

$$AS = \begin{pmatrix} 2+1-1 & 1 & -2 \\ 0+3-1 & 3 & 0 \\ 0+1+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а

$$SA_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1+0 & 2 \\ 2 & 1+2 & 0 \\ 2 & 1+0 & 0 \end{pmatrix} = AS.$$

$\Diamond$ Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$(A - 2\mathbb{I})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = 0.$$

б) В развернутом виде задача (23.6) на собственные значения и собственные векторы матрицы A запишется как

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)g_1 - g_2 = 0, \\ &g_1 + (3-\lambda)g_2 = 0, \end{aligned} \tag{24.19}$$

где $\vec{g} = (g_1 \quad g_2)^\intercal$. Эта однородная система имеет нетривиальные решения при условии

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее уравнение является квадратным:

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

и имеет один корень $\lambda = 2$ кратности $p = 2$.

Подстановка единственного собственного значения в матрицу $A - \lambda\mathbb{I}$ приведёт её к виду

$$A - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{24.20}$$

С учетом этого система (24.19) запишется как

$$\begin{aligned} -g_1 - g_2 &= 0, \\ g_1 + g_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ранг этой системы равен единице ($r = \operatorname{rang}(A - 2\mathbb{I}) = 1$), и, следовательно, она имеет фундаментальную систему решений, состоящую из одного собственного вектора ($s = n - r = 2 - 1 = 1$)

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} g_1 \\ -g_1 \end{pmatrix} = g_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

если положить $g_1 = 1$. Этот собственный вектор можно дополнить присоединённым вектором, который мы для простоты обозначим через $\vec{g}_2$ (вместо $\vec{g}\,_1^{(1)}$). Он находится из уравнения

$$(A - 2\mathbb{I})\vec{g}_2 = \vec{g}_1. \tag{24.21}$$

Положив

$$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} g_1^2 \\ g_2^2 \end{pmatrix},$$

из (24.21) имеем

$$\begin{aligned} -g_1^2 - g_2^2 &= 1, \\ g_1^2 + g_2^2 &= -1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} g_2^2 \\ -1 - g_1^2 \end{pmatrix}$$

или

$$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

если положить $g_1^2 = 0$.

$\Diamond$ Можно убедиться, что матрица $A - 2\mathbb{I}$ является нильпотентной с нулевым квадратом

$$(A - 2\mathbb{I})^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 0.$$

в) В развернутом виде задача (23.6) на собственные значения и собственные векторы матрицы A запишется как

$$(A - \lambda\mathbb{I})\vec{g} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = 0$$

или

$$\begin{aligned} (2-\lambda)g_1 - g_2 + 2g_3 = 0, \\ 5g_1 + (-3-\lambda)g_2 + 3g_3 = 0, \\ -g_1 + (-2-\lambda)g_3 = 0. \end{aligned} \tag{24.22}$$

Эта однородная система имеет нетривиальные решения при условии

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} - (3+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

которое даёт кубическое уравнение

$$(\lambda + 1)^3 = 0,$$

имеющее один корень $\lambda = -1$ кратности $p = 3$.

Подстановка единственного собственного значения $\lambda = -1$ в матрицу $A - \lambda\mathbb{I}$ приводит её к виду

$$(A - \lambda\mathbb{I})_{\lambda=-1} = (A + \mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{24.23}$$

С учётом этого система (24.22) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} 3g_1 - g_2 + 2g_3 = 0, \\ 5g_1 - 2g_2 + 3g_3 = 0, \\ -g_1 - g_3 = 0. \end{aligned} \tag{24.24}$$

Если первое уравнение системы (24.24) умножить на два и вычесть из второго, то получим

$$\begin{aligned} 3g_1 - g_2 + 2g_3 = 0, \\ -g_1 - g_3 = 0, \end{aligned}$$

$$-g_1 - g_3 = 0.$$

Отсюда следует, что ранг матрицы $(A-\lambda\mathbb{I})\big|_{\lambda=-1}$ равен двум. Это означает, что система (24.24) допускает только один собственный вектор. В силу теоремы Жордана единственный собственный вектор можно дополнить двумя присоединёнными векторами.

Итак, из (24.24) имеем

$$g_3 = -g_1, \qquad g_2 = g_1$$

т.е.

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_1 \\ -g_1 \end{pmatrix} = g_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или

$$\vec{g} = g_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{24.25}$$

если выбрать $g_1 = 1$. Если собственный вектор $\vec{g}$ (24.25) мы переобозначим как $\vec{g}^{(1)}$, то под $\vec{g}^{(2)}$ и $\vec{g}^{(3)}$ будем понимать присоединённые векторы, определяемые цепочкой равенств (24.6), которые с учетом используемых обозначений примут вид

$$\begin{aligned} (A-\lambda\mathbb{I})|_{\lambda=-1}\vec{g}^{(2)} &= \vec{g}^{(1)}, \\ (A-\lambda\mathbb{I})|_{\lambda=-1}\vec{g}^{(3)} &= \vec{g}^{(2)}. \end{aligned} \tag{24.26}$$

Представим вектор $\vec{g}^{(2)}$ в виде

$$\vec{g}^{(2)} = \begin{pmatrix} g_1^{(2)} \\ g_2^{(2)} \\ g_3^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{24.27}$$

Тогда его компоненты $g_i^{(2)}$ определятся системой уравнений

$$\begin{aligned} 3g_1^{(2)} - g_2^{(2)} + 2g_3^{(2)} &= 1, \\ 5g_1^{(2)} - 2g_2^{(2)} + 3g_3^{(2)} &= 1, \\ -g_1^{(2)} - g_3^{(2)} &= -1. \end{aligned} \tag{24.28}$$

Расширенная матрица $A^{(0)}$ этой системы имеет ранг, совпадающий с рангом матрицы $(A-\lambda\mathbb{I})\big|_{\lambda=-1}$, т.е. матрицы однородной системы (24.24). Действительно, выписав расширенную матрицу системы (24.28) и проведя указанные элементарные преобразования, найдём

$$A^{(0)} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{S_2-2S_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{S_3-S_2}{\overset{S_1+2S_2}{\sim}}$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{24.29}$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rang}(A-\lambda\mathbb{I})\big|_{\lambda=-1} = \operatorname{rang} A^{(1)} = 2$, и, кроме того, найдём

$$\vec{g}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} g_1^{(2)} \\ 1+g_1^{(2)} \\ 1-g_1^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \vec{g}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{24.30}$$

если положить $g_1^{(2)} = 0$.

Представим теперь второй присоединённый вектор так:

$$\vec{g}^{(3)} = \begin{pmatrix} g_1^{(3)} \\ g_2^{(3)} \\ g_3^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{24.31}$$

Чтобы найти его компоненты из (24.26), имеем систему

$$\begin{aligned} 3g_1^{(3)} - g_2^{(3)} + 2g_3^{(3)} &= 0, \\ 5g_1^{(3)} - 2g_2^{(3)} + 3g_3^{(3)} &= 1, \\ -g_1^{(3)} - g_3^{(3)} &= 1. \end{aligned} \tag{24.32}$$

Выписав расширенную матрицу $A^{(1)}$ этой системы и проведя указанные элементарные преобразования, получим

$$\begin{gathered} A^{(1)} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{S_2-2S_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{S_3-S_2}{\overset{S_1+2S_2}{\sim}} \\ \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \end{gathered} \tag{24.33}$$

Отсюда следует, что ранг расширенной матрицы системы (24.32) совпадает с рангом системы (24.28), ранг которой, в свою очередь, совпадает с рангом матрицы $(A - \lambda\mathbb{I})\big|_{\lambda=-1}$. Следовательно,

$$\vec{g}^{(3)} = \begin{pmatrix} g_1^{(3)} \\ -2 + g_1^{(3)} \\ -1 - g_1^{(3)} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \vec{g}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{24.34}$$

если положить $g_1^{(3)} = 0$.

Таким образом, матрица A имеет одно действительное собственное значение $\lambda = -1$ кратности $p = 3$ и соответствующий ему собственный вектор $\vec{g}^{(1)}$, который совместно с присоединёнными векторами образует линейно независимую систему векторов (базис)

$$\vec{g}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\Diamond$ В системе (24.26) умножение второго уравнения на $(A - \lambda\mathbb{I})\big|_{\lambda=-1}$ приводит его к виду

$$(A - \lambda\mathbb{I})^2_{\lambda=-1}\vec{g}^{(3)} = \vec{g}^{(1)}. \tag{24.35}$$

Это соотношение позволяет выразить собственный вектор $\vec{g}^{(1)}$ непосредственно через второй присоединённый вектор $\vec{g}^{(3)}$:

$$(A + \mathbb{I})^2\vec{g}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

поскольку

$$(A+\mathbb{I})^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

тогда как

$$(A+\mathbb{I})^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Эти равенства указывают на то, что векторы $\vec{g}^{(0)}$, $\vec{g}^{(1)}$, $\vec{g}^{(2)}$ выбраны корректно.

г) В развернутом виде задача на собственные значения и собственные функции (23.6) запишется так:

$$\begin{aligned} (5-\lambda)g_1 + 10g_2 &= 0, \\ -2g_1 + (-3-\lambda)g_2 &= 0, \end{aligned} \tag{24.36}$$

где $\vec{g} = (g_1 \quad g_2)^{\intercal}$. Эта однородная система имеет нетривиальные решения при условии

$$\det(A-\lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 10 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0,$$

т.е. при $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$.

Найдём собственный вектор $\vec{g}_1$, соответствующий комплексному корню $\lambda_1 = 1 + 2i$. Подставив это значение в (24.36), получим

$$\begin{aligned} (4-2i)g_1 + 10g_2 &= 0, \\ -2g_1 + (-4-2i)g_2 &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (2-i)g_1 + 5g_2 &= 0, \\ g_1 + (2+i)g_2 &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения, как и следовало ожидать, линейно зависимы: первое уравнение можно получить из второго умножением на $(2-i)$. Воспользовавшись первым уравнением, найдём $g_2 = -(2-i)g_1/5$. Тогда собственный вектор запишется как

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} g_1 \\ \dfrac{-2+i}{5} g_1 \end{pmatrix}$$

или

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2+i \end{pmatrix}, \tag{24.37}$$

если положить $g_1 = 5$.

Второе комплексное решение можно получить, подставив в (24.36) второй комплексный корень $\lambda_2 = 1 - 2i$, или непосредственно из (24.37), применив операцию комплексного сопряжения.

д) В координатной форме задача (23.6) запишется так:

$$\begin{aligned} -\lambda g_1 + g_2 &= 0, \\ -\lambda g_2 + g_3 &= 0, \\ -\lambda g_3 + g_4 &= 0, \\ -g_1 - 2g_3 - \lambda g_4 &= 0, \end{aligned} \tag{24.38}$$

где

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}.$$

Эта однородная система имеет нетривиальное решение при условии

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0.$$

Последнее уравнение имеет пару комплексно сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \pm i$ кратности $p = 2$.

Найдём собственный вектор $\vec{g}_1$, соответствующий комплексному корню $\lambda_1 = i$. Подставив это значение в (24.38), получим

$$\begin{aligned} -ig_1 + g_2 &= 0, \\ -ig_2 + g_3 &= 0, \\ -ig_3 + g_4 &= 0, \\ -g_1 - 2g_3 - ig_4 &= 0. \end{aligned}$$

Ранг матрицы этой системы равен трем, поэтому четвертое уравнение есть линейная комбинация первых трех, из которых следует

$$g_2 = ig_1, \quad g_3 = -g_1, \quad g_4 = -ig_1$$

или

$$\vec{g}_1 = g_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -i \end{pmatrix}.$$

Положив $g_1 = 1$, получим

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -i \end{pmatrix}. \tag{24.39}$$

Поскольку кратность корня $\lambda_1 = i$ равна двум, то для него можно найти ещё и присоединённый вектор, который мы обозначим как $\vec{g}_1^{(2)}$. Если $\vec{g}_1^{(2)} = (q_1\ q_2\ q_3\ q_4)^\intercal$, то его компоненты находятся из уравнения

$$(A - \lambda\mathbb{I})\big|_{\lambda_1 = i}\vec{g}_1^{(2)} = \vec{g}_1$$

или

$$\begin{aligned} -iq_1 + q_2 &= 1, \\ -iq_2 + q_3 &= i, \\ -iq_3 + q_4 &= -1, \\ -q_1 - 2q_3 - iq_4 &= -i. \end{aligned}$$

Выписав расширенную матрицу этой системы и произведя указанные элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -i & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -i & -i \end{array}\right) \underset{S_4+iS_3+S_2+iS_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -i & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

видим, что ранг расширенной матрицы равен трем. Это означает, что четвертое уравнение есть линейная комбинация первых трех, из которых следует

$$q_2 = 1 + iq_1, \quad q_3 = 2i - q_1, \quad q_4 = -3 - iq_1$$

или

$$\vec{g}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 + iq_1 \\ 2i - q_1 \\ -3 - iq_1 \end{pmatrix}.$$

Положив $q_1 = 0$, получим

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2i \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{24.40}$$

Комплексные решения, отвечающие корню $\lambda_2 = -i$, можно получить из (24.40) комплексным сопряжением.

Обозначим через $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ действительную и мнимую части собственного вектора $\vec{g}_1$:

$$\vec{e}_1 = \operatorname{Re} \vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \operatorname{Im} \vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{24.41}$$

а через $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ — присоединённого вектора $\vec{g}_1^{(2)}$:

$$\vec{e}_3 = \operatorname{Re} \vec{g}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_4 = \operatorname{Im} \vec{g}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{24.42}$$

е) В координатной форме задача (23.6) запишется так:

$$\begin{aligned} (4 - \lambda)g_1 + 7g_2 - 5g_3 = 0, \\ -4\lambda g_1 + (5 - \lambda)g_2 = 0, \\ g_1 + 9g_2 + (-4 - \lambda)g_3 = 0, \end{aligned} \tag{24.43}$$

где $\vec{g} = (g_1 \quad g_2 \quad g_3)^{\mathsf{T}}$. Однородная система (24.43) имеет нетривиальные решения при условии

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 7 & -5 \\ -4 & 5 - \lambda & 0 \\ 1 & 9 & -4 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0.$$

Это уравнение имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$ и $\lambda_3 = 2 - 3i$.

Подставив значение первого корня в (24.43), получим систему

$$\begin{aligned} 3g_1 + 7g_2 - 5g_3 &= 0, \\ -4g_1 + 4g_2 &= 0, \\ g_1 + 9g_2 - 5g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Выписав матрицу этой системы и произведя указанные элементарные преобразования

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & 9 & -5 \end{pmatrix} \overset{S_2/4}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -5 \end{pmatrix} \underset{S_3-S_2-2S_1}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

найдём $g_2 = g_1$, $g_3 = 2g_1$. Отсюда, положив $g_1 = 1$, получим собственный вектор $\vec{g}_1$ для корня $\lambda_1 = 1$:

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{24.44}$$

Найдём теперь комплексное решение для корня $\lambda_2 = 2 + 3i$. Подставив это значение в (24.43), имеем

$$\begin{aligned} (2-3i)g_1 + 7g_2 - 5g_3 &= 0, \\ -4g_1 + (3-3i)g_2 &= 0, \\ g_1 + 9g_2 + (-6-3i)g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Выписав матрицу этой системы и произведя указанные элементарные преобразования

$$\begin{pmatrix} 2-3i & 7 & -5 \\ -4 & 3(1-i) & 0 \\ 1 & 9 & -3(2+i) \end{pmatrix} \underset{S_3-(2-i)S_1/3}{\sim} \begin{pmatrix} 2-3i & 7 & -5 \\ -4 & 3(1-i) & 0 \\ \dfrac{4(1-2i)}{3} & 1+3i & 0 \end{pmatrix} \underset{S_3+(1-2i)S_2/3}{\sim}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2-3i & 7 & -5 \\ -4 & 3(1-i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

найдём $g_2 = 4g_1/3(1-i)$, $g_3 = (4+i)g_1/3$. Отсюда, положив $g_1 = 3(1-i)$, получим собственный вектор $\vec{g}_2$ для корня $\lambda_1 = 2 + 3i$:

$$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 3-3i \\ 4 \\ 5-3i \end{pmatrix}. \tag{24.45}$$

Комплексное решение, отвечающее корню $2 - 3i$, можно получить из (24.45) с помощью комплексного сопряжения.

25. Билинейные и квадратичные формы

♦ Числовая функция $A(\vec{x}, \vec{y})$, аргументами которой являются все возможные упорядоченные пары векторов $\vec{x}, \vec{y}$, вещественного линейного пространства $\mathcal{L}$ называется *билинейной формой*, если для всех векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{L}$ и любого вещественного числа α выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &A(\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}) = A(\vec{x}, \vec{y}) + A(\vec{z}, \vec{y}); \\ &A(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha A(\vec{x}, \vec{y}); \\ &A(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = A(\vec{x}, \vec{y}) + A(\vec{x}, \vec{z}); \\ &A(\vec{x}, \alpha\vec{y}) = \alpha A(\vec{x}, \vec{y}). \end{aligned} \tag{25.1}$$

Первые два равенства означают линейность функции $A(\vec{x},\vec{y})$ по первому аргументу, последние два — линейность по второму аргументу.

Теорема 25.1. *Билинейная форма $A(\vec{x},\vec{y})$ при заданном в линейном пространстве $\mathcal{L}$ базисе $\{\vec{e}_j\}_{j=0}^n$ может быть представлена в следующем виде:*

$$A(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}x^j y^k = X^{\mathsf{T}}AY, \tag{25.2}$$

где $a_{jk} = A(\vec{e}_j,\vec{e}_k)$, а

$$X = \begin{pmatrix} x^1\\ \vdots \\ x^n\end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y^1\\ \vdots \\ y^n\end{pmatrix}$$

— матрицы, составленные из координат векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в базисе $\vec{e}_j$.

Доказательство. Разложим векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ по базису $\vec{e}_j$:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x^j\vec{e}_j, \qquad \vec{y} = \sum_{k=1}^{n} y^k\vec{e}_k.$$

В силу линейности

$$A(\vec{x},\vec{y}) = A\biggl(\sum_{j=1}^{n} x^j\vec{e}_j, \sum_{k=1}^{n} y^k\vec{e}_k\biggr) = \sum_{j,k=1}^{n} x^j y^k A(\vec{e}_j,\vec{e}_k),$$

что и требовалось доказать.

♦ Матрица $A = \|A(\vec{e}_j,\vec{e}_k)\|$ называется *матрицей билинейной формы* $A(\vec{x},\vec{y})$ в базисе $\vec{e}_j$, $j=\overline{1,n}$.

♦ Билинейная форма называется *симметричной*, если для всех $\vec{x},\vec{y}\in\mathcal{L}$ справедливо

$$A(\vec{x},\vec{y}) = A(\vec{y},\vec{x}). \tag{25.3}$$

Теорема 25.2. *Если билинейная форма симметрична, то ее матрица в любом базисе будет симметричной, т.е.*

$$A^{\mathsf{T}} = A. \tag{25.4}$$

Доказательство. Действительно, по определению,

$$A(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}x^k y^j, \tag{25.5}$$

и

$$A(\vec{y},\vec{x}) = \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}y^k x^j.$$

Сделаем в (25.5) замену индексов суммирования: $k\to j$ и $j\to k$. Получим

$$A(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k,j=1}^{n} a_{jk}y^k x^j.$$

Следовательно, с учетом (25.3) имеем $a_{kj} = a_{jk}$, что и требовалось доказать.

♦ Билинейная форма называется *положительной* (*неотрицательной*), если $A(\vec{x},\vec{y}) > 0$ ($A(\vec{x},\vec{y}) \geqslant 0$) для любых векторов $\vec{x},\vec{y}$. Матрица A положительной (неотрицательной) билинейной формы называется *положительно* (*неотрицательно*) *определенной*.

Теорема 25.3. *При переходе от одного базиса к другому коэффициенты билинейной формы преобразуются по закону*

$$\widetilde{A} = P^{\intercal}AP, \tag{25.6}$$

где $\widetilde{A}$ и A — матрица билинейной формы в новом и старом базисе соответственно, а P — матрица перехода от одного базиса к другому.

Доказательство. При переходе от одного базиса к другому координаты векторов в старом и новом базисах связаны соотношениями

$$\widetilde{X} = P^{-1}X, \quad \widetilde{Y} = P^{-1}Y. \tag{25.7}$$

Согласно (25.2), запишем

$$A(\vec{x}, \vec{y}) = X^{\intercal}AY = \widetilde{X}^{\intercal}\widetilde{A}\widetilde{Y}.$$

Подставив (25.7) в последнее соотношение, получим

$$(P\widetilde{X})^{\intercal}AP\widetilde{Y} = \widetilde{X}^{\intercal}P^{\intercal}AP\widetilde{Y} = \widetilde{X}^{\intercal}\widetilde{A}Y,$$

откуда и следует (25.6).

♦ *Квадратичной формой* называется числовая функция $A(\vec{x}, \vec{x})$ одного векторного аргумента $\vec{x} \in \mathcal{L}$, которая получается из произвольной билинейной формы $A(\vec{x}, \vec{y})$ заменой $\vec{y} \to \vec{x}$.

Теорема 25.4. *В линейном пространстве $\mathcal{L}$ существует базис $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^n$, в котором для каждого вектора $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k\vec{e}_k$ значение квадратичной формы вычисляется по формуле*

$$A(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x^k)^2, \tag{25.8}$$

где λ_k — некоторые фиксированные числа.

♦ Всякий базис, обладающий этим свойством, называется *каноническим*, а выражение (25.8) — *каноническим видом квадратичной формы.*

Доказательство. Выберем в качестве базиса набор собственных векторов матрицы A. Так как она симметрична, из такого набора можно построить ортонормированный базис.

Пусть S — матрица, составленная из координат собственных векторов $AS = S\Lambda$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \|\lambda_j\delta_{jk}\|$ $S^{\intercal}S = \mathbb{I}$,

$$(\vec{x}, \vec{x}) = A(S\vec{y}, S\vec{y}) = (SY)^{\intercal}ASY = \widetilde{X}^{\intercal}S^{\intercal}AS\widetilde{Y} = \widetilde{Y}\Lambda\widetilde{Y} = \sum \lambda_n (y_k)^2.$$

Теорема 25.5 (закон сохранения квадратичной формы). *Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами в каноническом виде квадратичной формы не зависит от способа приведения формы к этому виду.*

(без доказательства).

ГЛАВА 6

Евклидово пространство

26. Скалярное произведение векторов

Рассмотренное выше линейное (аффинное) пространство мы можем «обогатить», введя в нем метрику (от греческого $\mu\varepsilon\tau\rho o\nu$ — мера, размер), т.е. способ измерить длины векторов и углы между ними. Проще всего эти понятия можно ввести с помощью скалярного произведения, которое мы определим аксиоматически.

♦ Правило, ставящее в соответствие любым двум упорядоченным элементам $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{L}$ определенное число из $\mathbb{R}$, обозначается $(\vec{x}, \vec{y})$ и называется *скалярным произведением векторов* $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если для произвольных $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{L}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо (условия 1–4 называются аксиомами):

1. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;
2. $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$;
3. $(\vec{x}, \alpha\vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$;
4. $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$, если $\vec{x} \neq \vec{0}$, и $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, если $\vec{x} = \vec{0}$.

♦ Линейное пространство $\mathcal{L}$, в котором определено скалярное произведение векторов, удовлетворяющее аксиомам 1–4, называется *евклидовым* (*вещественным евклидовым*) пространством.

Для обозначения евклидова пространства используется символ $\mathcal{E}$ или $\mathcal{E}_n$, когда нужно подчеркнуть его размерность.

Если $\vec{e}_k$ — базис в $\mathcal{E}_n$ и

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \vec{e}_k, \qquad \vec{y} = \sum_{k=1}^{n} y^k \vec{e}_k,$$

то скалярное произведение имеет вид

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x^k y^j, \quad k, j = \overline{1, n}, \tag{26.1}$$

где $a_{kj} = (\vec{e}_k, \vec{e}_j)$. В силу аксиомы 1 $a_{kj} = a_{jk}$.

В координатной форме скалярное произведение можно записать как

$$\begin{aligned}(\vec{x}, \vec{y}) = {} & (x^1 a_{11} + x^2 a_{21} + \ldots + x^n a_{n1}) y^1 + \\ & + (x^1 a_{12} + x^2 a_{22} + \ldots + x^n a_{n2}) y^2 + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + (x^1 a_{1n} + x^2 a_{2n} + \ldots + x^n a_{nn}) y^n. \end{aligned} \tag{26.2}$$

◊ Скалярное произведение в виде (26.1) представляет собой билинейную форму (25.2).

Легко видеть, что сумму (26.1) можно записать в матричной форме:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (x^1\ x^2\ \ldots\ x^n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= \vec{x}^{\,\intercal} \begin{pmatrix} (\vec{e}_1,\vec{e}_1) & (\vec{e}_1,\vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_1,\vec{e}_n) \\ (\vec{e}_2,\vec{e}_1) & (\vec{e}_2,\vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_2,\vec{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\vec{e}_n,\vec{e}_1) & (\vec{e}_n,\vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_n,\vec{e}_n) \end{pmatrix} \vec{y} = \vec{x}^{\,\intercal}\Gamma\vec{y}. \qquad (26.3)$$

♦ Матрица

$$\Gamma = \|g_{kj}\| = \|a_{kj}\| = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1,\vec{e}_1) & \dots & (\vec{e}_1,\vec{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\vec{e}_n,\vec{e}_1) & \dots & (\vec{e}_n,\vec{e}_n) \end{pmatrix} \qquad (26.4)$$

называется *матрицей Грама*, а ее определитель $\det\Gamma = \Gamma(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ — *определителем Грама*.

В силу аксиомы 1

$$\Gamma^\intercal = \Gamma. \qquad (26.5)$$

Кроме того, в силу аксиомы 4 выражение

$$(\vec{x},\vec{x}) = \vec{x}^{\,\intercal}\Gamma\vec{x} = \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}x^k x^j \qquad (26.6)$$

должно быть положительно определенным. Это означает, что, согласно требованиям аксиомы 4: $(\vec{x},\vec{x}) \geqslant 0$, выражение (26.6) должно принимать лишь неотрицательные значения и обращаться в нуль, лишь когда все x_j, $j = \overline{1,n}$, равны нулю.

♢ Если в качестве матрицы Грама выбрать единичную, т.е.

$$\Gamma = \mathbb{I} = \|\delta_{kj}\|_{n\times n},$$

то скалярное произведение будет иметь вид

$$(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^{\,\intercal}\Gamma\vec{y} = \vec{x}^{\,\intercal}\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n. \qquad (26.7)$$

Пример 26.1. Показать, что матрица

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не определяет скалярное произведение, тогда как скалярное произведение, построенное по матрице

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

удовлетворяет аксиомам 1–4.

Решение. Обе матрицы удовлетворяют аксиомам 1–3. Покажем теперь, что матрица Γ_1 не удовлетворяет аксиоме 4, а матрица Γ_1 ей удовлетворяет.

Действительно, выпишем для матрицы Γ_1 квадратичную форму (26.6), соответствующую аксиоме 4:

$$(\vec{x},\vec{x}) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1x_2,$$

Отсюда следует, что скалярное произведение $(\vec{x},\vec{x})$ может быть отрицательным, например, для $x_1 < 0$, $x_2 > 0$. Это означает, что матрица Γ_1 порождает квадратичную форму, не являющуюся положительно определенной.

Теперь выпишем квадратичную форму для матрицы Γ_2:

$$(\vec{x},\vec{x}) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ x_1+2x_2\end{pmatrix} =$$
$$= x_1(x_1+x_2)+x_2(x_1+2x_2) = x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2 = (x_1+x_2)^2+x_2^2.$$

Сумма квадратов всегда положительна и обращается в нуль только при $x_1 = x_2 = 0$. Это означает, что матрица Γ_2 порождает положительно определенную квадратичную форму, что и требовалось показать.

$\Diamond$ Тот факт, что матрица Γ_2 не определяет скалярное произведение, следует еще и из того, что она содержит нулевые диагональные элементы, которые, согласно (26.4), соответствуют скалярным произведениям базисных векторов $(\vec{e}_j,\vec{e}_j)$ и, согласно аксиоме 4, не могут обращаться в нуль, поскольку базисные векторы $\vec{e}_j \neq 0$, $j=\overline{1,n}$.

$\Diamond$ Единичная матрица Грама $\Gamma = \mathbb{I}$ приводит к положительно определенной квадратичной форме

$$\vec{x}^{\,\intercal}\Gamma\vec{x} = \vec{x}^{\,\intercal}\vec{x} = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2,$$

соответствующей скалярному произведению вида

$$(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n. \tag{26.8}$$

27. Ортогональность элементов векторного евклидова пространства

♦ Векторы в евклидовом пространстве называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

♦ Система векторов $\vec{x}_j$, $j=\overline{1,k}$, называется *ортогональной*, если

$$(\vec{x}_j,\vec{x}_l) = 0, \quad j,l=\overline{1,k}, \tag{27.1}$$

для всех $j\neq l$.

♦ Система векторов $\vec{x}_j$, $j=\overline{1,k}$, называется *ортонормированной*, если

$$(\vec{x}_j,\vec{x}_l) = \delta_{jl}, \quad j,l=\overline{1,k}. \tag{27.2}$$

♦ *Длиной* (или *нормой*) *вектора* $\vec{x}\in\mathcal{E}$ называется число

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x},\vec{y})}. \tag{27.3}$$

♦ Вектор $\vec{x}\in\mathcal{E}$ единичной длины называется *единичным*, или *нормированным*.

Теорема 27.1 (Пифагора). *Если два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ являются ортогональными, то квадрат длины вектора, являющегося их суммой, равен сумме квадратов длин слагаемых векторов:*

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2. \tag{27.4}$$

Доказательство. По определению

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = (\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x},\vec{x})+(\vec{x},\vec{y})+(\vec{y},\vec{x})+(\vec{y},\vec{y}).$$

Поскольку $|\vec{x}|^2=(\vec{x},\vec{x})$, $|\vec{y}|^2=(\vec{y},\vec{y})$, $(\vec{x},\vec{y})=0$, получим

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 27.2. *Любая ортогональная система ненулевых элементов (векторов) евклидова пространства линейно независима.*

Доказательство. Пусть $\vec{x}_j$, $j=\overline{1,k}$, — ортогональная система векторов и выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\vec{x}_j=0.$$

Умножим это соотношение скалярно на $\vec{x}_1$ и получим $\alpha_1(\vec{x}_1,\vec{x}_1)=0$, откуда следует, что $\alpha_1=0$. Аналогично получим $\alpha_l=0$, $l=\overline{1,k}$, что и требовалось доказать.

Чтобы доказать существование ортогональных базисов, сформулируем так называемый метод ортогонализации.

Лемма 27.1 (метод ортогонализации). *Если $\vec{f}_j$, $j=\overline{1,n}$, — базис в линейном пространстве $\mathcal{E}_n$, то базис*

$$\vec{e}_k=\vec{f}_k+\lambda_{k1}\vec{e}_1+\ldots+\lambda_{k(k-1)}\vec{e}_{k-1},\quad k=\overline{1,n},\tag{27.5}$$

является ортогональным, если

$$\lambda_{kj}=-\frac{(\vec{f}_k,\vec{e}_j)}{(\vec{e}_j,\vec{e}_j)}.\tag{27.6}$$

Доказательство. Из векторов $\vec{f}_j$, $j=\overline{1,n}$, линейными комбинациями составим векторы

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_1=\vec{f}_1,\\
&\vec{e}_2=\vec{f}_2+\lambda_{21}\vec{e}_1,\\
&\vec{e}_3=\vec{f}_3+\lambda_{31}\vec{e}_1+\lambda_{32}\vec{e}_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\vec{e}_n=\vec{f}_n+\lambda_{n1}\vec{e}_1+\lambda_{n2}\vec{e}_2+\ldots+\lambda_{n(n-1)}\vec{e}_{n-1}.
\end{aligned}\tag{27.7}$$

Теперь подберем коэффициенты λ_{kj} так, чтобы векторы $\vec{e}_k$ были ортогональными:

$$(\vec{e}_k,\vec{e}_j)=0.\tag{27.8}$$

Последовательно выполняя условия (27.8) для (27.7), получим

$$(\vec{e}_2,\vec{e}_1)=(\vec{f}_2+\lambda_{21}\vec{e}_1,\vec{e}_1)=(\vec{f}_2,\vec{e}_1)+\lambda_{21}(\vec{e}_1,\vec{e}_1)=0;\tag{27.9}$$

$$\begin{aligned}(\vec{e}_3,\vec{e}_1)&=(\vec{f}_3+\lambda_{31}\vec{e}_1+\lambda_{32}\vec{e}_2,\vec{e}_1)=(\vec{f}_3,\vec{e}_1)+\lambda_{31}(\vec{e}_1,\vec{e}_1)+\lambda_{32}(\vec{e}_2,\vec{e}_1)=\\
&=(\vec{f}_3,\vec{e}_1)+\lambda_{31}(\vec{e}_1,\vec{e}_1)=0;\end{aligned}\tag{27.10}$$

$$\begin{aligned}(\vec{e}_3,\vec{e}_2)&=(\vec{f}_3+\lambda_{31}\vec{e}_1+\lambda_{32}\vec{e}_2,\vec{e}_2)=(\vec{f}_3,\vec{e}_2)+\lambda_{31}(\vec{e}_1,\vec{e}_2)+\lambda_{32}(\vec{e}_2,\vec{e}_2)=\\
&=(\vec{f}_3,\vec{e}_2)+\lambda_{32}(\vec{e}_2,\vec{e}_2)=0\end{aligned}\tag{27.11}$$

и т.д. Из (27.9)–(27.11) находим

$$\lambda_{21}=-\frac{(\vec{f}_2,\vec{e}_1)}{(\vec{e}_1,\vec{e}_1)};\tag{27.12}$$

$$\lambda_{31} = -\frac{(\vec{f}_3, \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)}, \qquad \lambda_{32} = -\frac{(\vec{f}_3, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)}. \tag{27.13}$$

Обобщение (27.12) и (27.13) дает

$$\lambda_{kj} = -\frac{(\vec{f}_k, \vec{e}_j)}{(\vec{e}_j, \vec{e}_j)},$$

что совпадает с (27.6).

До сих пор мы не использовали тот факт, что векторы $\vec{f}_j$, $j = \overline{1,n}$, линейно независимы. Воспользуемся им для доказательства того, что все построенные векторы (27.7) отличны от нуля, что и определяет их линейную независимость (см. теорему 27.2). Выберем в (27.7) вектор $\vec{e}_k$ и выразим последовательно входящие в него векторы $\vec{e}_{k-1}, \vec{e}_{k-2}, \ldots, \vec{e}_1$ через $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_k$. Тогда выбранный вектор $\vec{e}_k$ запишется линейной комбинацией векторов $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_k$:

$$\vec{e}_k = a_1\vec{f}_1 + a_2\vec{f}_2 + \ldots + a_{k-1}\vec{f}_{k-1} + \vec{f}_k. \tag{27.14}$$

Из этого соотношения следует, что $\vec{e}_k \neq 0$. Действительно, в противном случае правая часть равенства (27.14) была бы нулем, что противоречит линейной независимости векторов $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_k$, так как коэффициент при $\vec{f}_k$ равен 1.

Итак, система векторов (27.7) является линейно независимой и ее векторы попарно ортогональны. Это означает, что система векторов образует в пространстве $\mathcal{E}_n$ ортогональный базис $\vec{e}_j$, $j = \overline{1,n}$.

Теорема 27.3. *В евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Согласно определению линейного пространства, в пространстве $\mathcal{E}_n$ всегда существует какой-либо базис $\vec{f}_j$, $j = \overline{1,n}$. Согласно же лемме 27.1, методом ортогонализации из него всегда можно построить ортогональный базис $\vec{e}_j$, $j = \overline{1,n}$.

Перейдем теперь от базиса $\vec{e}_j$, $j = \overline{1,n}$, к базису

$$\vec{e}_j{}' = \frac{\vec{e}_j}{|\vec{e}_j|}. \tag{27.15}$$

Нетрудно заметить, что он образован попарно ортогональными векторами единичной длины, т.е. этот базис является не только ортогональным, но и нормированным (ортонормированным) базисом, что и доказывает теорему.

Теорема 27.4. *В ортонормированном базисе скалярное произведение любых двух векторов равно сумме произведений координат этих векторов:*

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y^j = X^{\intercal} Y, \tag{27.16}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Действительно,

$$(\vec{x},\vec{y}) = \left(\sum_{j=1}^{n} x^j\vec{e}_j, \sum_{k=1}^{n} y^k\vec{e}_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\vec{e}_j,\vec{e}_k)x^jy^k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{jk}x^jy^k = \sum_{k=1}^{n} x_ky^k,$$

поскольку

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_{jk}x^k = x_j.$$

Теорема 27.5. *Если система векторов $\vec{e}_j$ образует ортонормированный базис евклидова пространства, то координаты x^j вектора $\vec{x}$ могут быть найдены по формуле*

$$x^j = (\vec{x},\vec{e}_j). \tag{27.17}$$

Доказательство. Разложим вектор $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_j$:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x^j\vec{e}_j.$$

Вычислим скалярное произведение:

$$(\vec{x},\vec{e}_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\vec{e}_k,\vec{e}_j\right) = \sum_{k=1}^{n} x^k(\vec{e}_k,\vec{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} x^k\delta_{kj} = x^j.$$

♦ Матрица $Q = \|q_l^j\|$ называется *ортогональной*, если

$$Q^\intercal Q = \mathbb{I}. \tag{27.18}$$

Теорема 27.6. *Столбцы ортогональной матрицы образуют ортонормированную систему.*

Доказательство. Обозначим k-й столбец матрицы Q через X_k:

$$Q = (X_1,\ldots X_n), \qquad Q^\intercal = \begin{pmatrix} X_1^\intercal \\ \vdots \\ X_n^\intercal \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Q^\intercal Q = \begin{pmatrix} X_1^\intercal \\ \vdots \\ X_n^\intercal \end{pmatrix} (X_1 \quad \ldots \quad X_n) = \|X_k^\intercal X_j\|,$$

но, согласно (27.18), $Q^\intercal Q = \mathbb{I}$. Следовательно,

$$X_k^\intercal X_j = \delta_k^j,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 27.6.1. Ортогональные матрицы невырождены:

$$\det Q \neq 0. \tag{27.19}$$

Доказательство непосредственно следует из линейной независимости ортонормированной системы векторов.

♦ Матрица $Q = \|q_i^j\|$ называется *комплексно сопряженной* матрице $\Theta = \|\theta_i^j\|$, если $q_i^j = (\theta_i^j)^*$, и обозначается $Q = \Theta^*$.

♦ Матрица Q называется *эрмитово сопряженной* матрице Θ, если $Q = (\Theta^\intercal)^*$, и обозначается $Q = \Theta^+$.

♦ Матрица $U = \|u_j^i\|$ называется *унитарной*, если $U^+U = \mathbb{I}$.

♦ *Углом между двумя векторами* называется угол φ, удовлетворяющий двум условиям

$$\begin{aligned} &1)\quad \cos\varphi = (\vec{x}, \vec{y})/|\vec{x}|\,|\vec{y}|;\\ &2)\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi. \end{aligned} \tag{27.20}$$

◊ Условие 2 последнего определения гарантирует единственность угла φ.

◊ Для того чтобы из (27.20) можно было определить угол φ, должно выполняться неравенство

$$-1 \leqslant \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|} \leqslant 1$$

или, что тоже самое,

$$\frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2} \leqslant 1,$$

т.е.

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leqslant (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}). \tag{27.21}$$

Другими словами, для того чтобы корректно определить угол между двумя векторами формулой (27.20), необходимо доказать неравенство (27.21).

Теорема 27.7. *Для любых двух элементов $\vec{x}, \vec{y}$ произвольного евклидова пространства справедливо неравенство*

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leqslant (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}), \tag{27.22}$$

называемое неравенством Коши–Буняковского.

Доказательство. Из аксиомы 4 следует, что для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо

$$(\lambda\vec{x} - \vec{y}, \lambda\vec{x} - \vec{y}) \geqslant 0,$$

т.е. для любого λ

$$\lambda^2(\vec{x}, \vec{x}) - 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \geqslant 0.$$

Тот факт, что квадратный относительно λ полином принимает лишь неотрицательные значения, означает, что дискриминант уравнения

$$\lambda^2(\vec{x}, \vec{x}) - 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) = 0$$

не может быть положительным, т.е.

$$D = 4(\vec{x}, \vec{y})^2 - 4(\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) \leqslant 0,$$

откуда и следует (27.22).

Доказав неравенство Коши–Буняковского, мы вернемся к определителю Грама и покажем, что с его помощью возникает возможность для исследования линейной зависимости векторов.

Теорема 27.8. *Определитель Грама любой системы векторов всегда больше или равен нулю. Он равен нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\ldots, \vec{e}_n$ линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ линейно зависимы. Тогда хоть один из них, например $\vec{e}_n$, есть линейная комбинация остальных:

$$\vec{e}_n = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\vec{e}_{n-1}.$$

Поэтому последняя строка в определителе Грама есть линейная комбинация остальных. Значит, он равен нулю.

Утверждение о том, что определитель Грама положительно определен, докажем для двух векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. В этом случае

$$\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) \end{vmatrix} = (\vec{e}_1, \vec{e}_1)(\vec{e}_2, \vec{e}_2) - (\vec{e}_1, \vec{e}_2)^2 \geqslant 0, \tag{27.23}$$

и утверждение о том, что $\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \geqslant 0$, эквивалентно неравенству Коши–Буняковского.

Пример 27.1. Дать геометрическую интерпретацию определителя Грама для двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из $\mathcal{E}_2$.

Решение. Будем считать векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ базисными. Запишем для них определитель Грама:

$$\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{vmatrix} (\vec{x}, \vec{x}) & (\vec{x}, \vec{y}) \\ (\vec{y}, \vec{x}) & (\vec{y}, \vec{y}) \end{vmatrix} = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - (\vec{x}, \vec{y})^2.$$

Теперь воспользуемся равенством (27.20), записанным в виде

$$(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}|\,|\vec{y}|\cos\varphi,$$

тогда

$$\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - (\vec{x}, \vec{y})^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2(1 - \cos^2\varphi) = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2\sin^2\varphi = (|\vec{x}|\,|\vec{y}|\sin\varphi)^2.$$

Но из элементарной геометрии известно, что модуль произведения $|\vec{x}|\,|\vec{y}|\sin\varphi$ определяет площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$ как на сторонах, т.е.

$$S_{\text{пар}} = ||\vec{x}|\,|\vec{y}|\sin\varphi|.$$

Отсюда следует, что

$$\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = S^2_{\text{пар}}. \tag{27.24}$$

Таким образом, определитель Грама векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ равен квадрату площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$ как на сторонах.

Пример 27.2. Показать, что определитель Грама любых n линейно независимых векторов из $\mathcal{E}_n$ равен квадрату объема параллелепипеда, построенного на этих векторах как на сторонах.

Решение. Для двумерного пространства это утверждение доказано в предыдущем примере. Рассмотрим теперь трехмерное подпространство. Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ — три линейно независимых вектора из $\mathcal{E}_n$ с координатами $\vec{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})$,

$\vec{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})$, $\vec{x}_3 = (x_{31}, x_{32}, x_{33})$ в ортогональном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Из элементарной геометрии известно, что объем параллелепипеда со сторонами $|\vec{x}_1|$, $|\vec{x}_2|$, $|\vec{x}_3|$ равен

$$V_3 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}.$$

Вычислим квадрат этого определителя, умножив строки на строки:

$$(\det A)^2 = \det A \det A^\intercal = \det(AA^\intercal).$$

Получим

$$V_3^2 = \begin{vmatrix} x_{11}^2 + x_{21}^2 + x_{31}^2 & x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} + x_{13}x_{23} & x_{11}x_{31} + x_{12}x_{32} + x_{13}x_{33} \\ x_{21}x_{11} + x_{22}x_{12} + x_{23}x_{13} & x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2 & x_{21}x_{31} + x_{22}x_{32} + x_{23}x_{33} \\ x_{31}x_{11} + x_{32}x_{12} + x_{33}x_{13} & x_{31}x_{21} + x_{32}x_{22} + x_{33}x_{23} & x_{31}^2 + x_{32}^2 + x_{33}^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\vec{x}_1, \vec{x}_1) & (\vec{x}_1, \vec{x}_2) & (\vec{x}_1, \vec{x}_3) \\ (\vec{x}_2, \vec{x}_1) & (\vec{x}_2, \vec{x}_2) & (\vec{x}_2, \vec{x}_3) \\ (\vec{x}_3, \vec{x}_1) & (\vec{x}_3, \vec{x}_2) & (\vec{x}_3, \vec{x}_3) \end{vmatrix} = \Gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3).$$

Таким образом, для трехмерного подпространства утверждение тоже доказано. По индукции для векторов $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ найдем

$$V_n^2 = \begin{vmatrix} (\vec{x}_1, \vec{x}_1) & \ldots & (\vec{x}_1, \vec{x}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\vec{x}_n, \vec{x}_1) & \ldots & (\vec{x}_n, \vec{x}_n) \end{vmatrix} = \Gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n). \qquad (27.25)$$

Пример 27.3. Вычислить косинус угла между векторами $\vec{x} = (0, 1, 1, 1)$ и $\vec{y} = (\sqrt{7}, 1, 2, 0)$, если скалярное произведение в данном базисе имеет вид

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{l=1}^{n} x_l y_l = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

Решение. По определению,

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|} = \frac{0 \cdot \sqrt{7} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0}{\sqrt{0 + 1 + 1 + 1}\sqrt{7 + 1 + 4 + 0}} = \frac{3}{\sqrt{3 \cdot 12}} = \frac{1}{2}.$$

♦ Линейное пространство $\mathcal{L}$ над полем комплексных чисел называется *комплексным евклидовым* (а также *унитарным* или *эрмитовым*), если в нем указано правило, ставящее в соответствие любым двум упорядоченным элементам $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{L}$ определенное число из $\mathbb{C}$, которое обозначается $(\vec{x}, \vec{y})$ и называется скалярным произведением векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Это правило для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{L}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{C}$ удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})^*$;
2. $(\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{z}, \vec{y})$;
3. $(\vec{x}, \alpha\vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$;
4. $(\vec{x}, \vec{x})$ есть вещественное неотрицательное число, равное нулю лишь при $\vec{x} = 0$.

Из этих аксиом вытекают свойства 2 векторов в комплексном евклидовом пространстве.

Свойство 1. Справедливо соотношение

$$(\vec{x}, \alpha\vec{y}) = \alpha^*(\vec{x}, \vec{y}).$$

Доказательство. Действительно,

$$(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \alpha\vec{x})^* = (\alpha(\vec{y}, \vec{x}))^* = \alpha^*(\vec{y}, \vec{x})^* = \alpha^*(\vec{x}, \vec{y}).$$

Свойство 2. Справедливо соотношение

$$(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z}).$$

Доказательство полностью аналогично доказательству предыдущего свойства.

Пример 27.4. Показать, что система аксиом скалярного произведения, принятая для действительного евклидова пространства, применительно к комплексному евклидову пространству становится противоречивой.

Решение. В самом деле, пусть для комплексного евклидова пространства ($\lambda \in \mathbb{C}$) первая аксиома имеет вид

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x}).$$

Тогда

$$(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{y}, \vec{x})$$

и соответственно

$$(\lambda\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda^2(\vec{y}, \vec{x}).$$

Поскольку $\lambda \in \mathbb{C}$, то, выбрав $\lambda = i$, получим

$$(i\vec{x}, i\vec{x}) = i^2(\vec{x}, \vec{x}) = -(\vec{x}, \vec{x}),$$

т.е. скалярные произведения $(\vec{x}, \vec{x})$ и $(\vec{y}, \vec{y})$, где $\vec{y} = i\vec{x}$, имеют разные знаки, что противоречит аксиоме 4.

Это противоречие устраняется новой формулировкой аксиомы 1:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})^*.$$

Тогда, согласно следствию 1, имеем

$$(\lambda\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda\lambda^*(\vec{x}, \vec{y}) = |\lambda|^2(\vec{x}, \vec{y}),$$

что соответствует аксиоме 4.

28. Ортогональность подпространств евклидова пространства

Пусть $\mathcal{E}_k$ — подпространство некоторого евклидова пространства $\mathcal{E}_n$.

♦ Вектор $\vec{a} \in \mathcal{E}_n$ называется *ортогональным подпространству* $\mathcal{E}_k \subset \mathcal{E}_n$, если он ортогонален любому вектору $\vec{x}$ из подпространства $\mathcal{E}_k$.

Для того чтобы вектор $\vec{z}$ был ортогонален k-мерному подпространству $\mathcal{E}_k$, достаточно, чтобы он был ортогонален векторам любого базиса $\vec{e}_j$, $j = \overline{1, n}$, из $\mathcal{E}_k$:

$$(\vec{z}, \vec{e}_j) = 0, \quad j = \overline{1, k}. \tag{28.1}$$

Действительно, любой вектор $\vec{x}$ из $\mathcal{E}_k$ можно представить линейной комбинацией

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{e}_j.$$

Отсюда с учетом (28.1) следует ортогональность вектора $\vec{z}$ и любого $\vec{x} \in \mathcal{E}_k$:

$$(\vec{z}, \vec{x}) = \left(\vec{z}, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (\vec{z}, \vec{e}_j) = 0.$$

♦ Два подпространства $\mathcal{E}_k$ и $\mathcal{E}_l$ евклидова пространства $\mathcal{E}_n$ называются *взаимно ортогональными*, если каждый вектор из $\mathcal{E}_k$ ортогонален каждому вектору из $\mathcal{E}_l$ (будем писать $\mathcal{E}_k \perp \mathcal{E}_l$).

Лемма 28.1. *Для того чтобы подпространства $\mathcal{E}_k$ и $\mathcal{E}_l$ евклидова пространства $\mathcal{E}_n$ были взаимно ортогональными, необходимо и достаточно, чтобы все базисные векторы одного подпространства были ортогональны всем базисным векторам другого.*

Доказательство. Необходимость следует непосредственно из определения, а для доказательства достаточности предположим, что $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^{k}$ — базис в $\mathcal{E}_k$ и $\{\vec{f}_m\}_{m=1}^{l}$ — базис в $\mathcal{E}_l$. Тогда для каждого $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_k\vec{e}_k$ из $\mathcal{E}_k$ и каждого $\vec{y} = y_1\vec{f}_1 + \ldots + y_l\vec{f}_l$ из $\mathcal{E}_l$ скалярное произведение равно нулю:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{j=1}^{k} x_j \vec{e}_j, \sum_{m=1}^{l} y_m \vec{f}_m\right) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{l} x_j y_m (\vec{e}_j, \vec{f}_m) = 0$$

и, значит, эти векторы ортогональны, что и требовалось доказать.

Достаточность доказывается аналогично.

Лемма 28.2. *Два взаимно ортогональных подпространства пересекаются только по нулевому вектору.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}_k \perp \mathcal{E}_l$. Если вектор $\vec{x} \in \mathcal{E}_k$ и одновременно $\vec{x} \in \mathcal{E}_l$, но тогда $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ и из аксиомы 4 следует, что $\vec{x} = 0$.

◊ В обычном трехмерном пространстве плоскость и перпендикулярная ей прямая образуют два взаимно перпендикулярных подпространства $\mathcal{E}_k \perp \mathcal{E}_l$. Однако уже две перпендикулярные плоскости не будут ортогональными подпространствами, поскольку не все векторы одной плоскости перпендикулярны векторам другой (рис. 28). Кроме того, они пересекаются по прямой, что противоречит лемме 28.2.

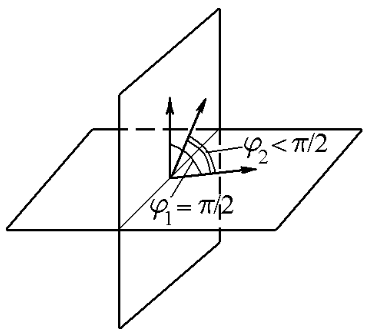


Рис. 28.

♦ Подпространство $\mathcal{E}_l$, образованное всевозможными векторами из $\mathcal{E}_k$, ортогональными к подпространству $\mathcal{E}_k$, называется *ортогональным дополнением* подпространства $\mathcal{E}_k$ и обозначается $\mathcal{E}_l = \mathcal{E}_k^{\perp}$.

Легко видеть, что размерность ортогонального дополнения равна $l = n - k$, т.е. $\mathcal{E}_k^{\perp} = \mathcal{E}_{n-k}$, а также $(\mathcal{E}_k^{\perp})^{\perp} = \mathcal{E}_k$.

Теорема 28.1. *Евклидово пространство $\mathcal{E}_n$ является прямой суммой любого своего подпространства и его ортогонального дополнения:*

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_k \oplus \mathcal{E}_k^{\perp}. \qquad (28.2)$$

Доказательство. Поскольку $\mathcal{E}_k^\perp = \mathcal{E}_{n-k}$, то $\mathcal{E}_k^\perp$ и $\mathcal{E}_k$ порождают все пространство $\mathcal{E}_n$ и пересекаются по нулевому вектору, что и доказывает справедливость (28.2).

Следствие 28.1.1. Каждый вектор $\vec{x}$ из $\mathcal{E}_n$ однозначно представляется в виде суммы

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}, \tag{28.3}$$

где $\vec{y} \in \mathcal{E}_k$, а $\vec{z} \in \mathcal{E}_k^\perp$.

♦ Вектор $\vec{y}$ из (28.3) называется *ортогональной проекцией* вектора $\vec{x}$ на подпространство $\mathcal{E}_k$, а вектор $\vec{z}$ — *перпендикуляром* на подпространство $\mathcal{E}_k$.

Лемма 28.3. *Ортогональная проекция вектора $\vec{x} \in \mathcal{E}_k$ на подпространство $\mathcal{E}_k \subset \mathcal{E}_n$ является единственной.*

Доказательство. Пусть наряду с (28.3) существует другое разложение

$$\vec{x} = \vec{y}_1 + \vec{z}_1, \tag{28.4}$$

где $\vec{y}_1 \in \mathcal{E}_k$, а $\vec{z}_1 \perp \mathcal{E}_k$. Вычтя (28.4) из (28.3), запишем

$$\vec{y} + \vec{z} = \vec{y}_1 + \vec{z}_1$$

или

$$\vec{y} - \vec{y}_1 = \vec{z}_1 - \vec{z}.$$

С учетом этого получим

$$(\vec{y} - \vec{y}_1, \vec{y} - \vec{y}_1) = (\vec{y} - \vec{y}_1, \vec{z}_1 - \vec{z}) = 0,$$

поскольку $\vec{y} - \vec{y}_1 \in \mathcal{E}_k$, а $\vec{z}, \vec{z}_1 \perp \mathcal{E}_k$. Отсюда, согласно аксиоме 4, следует $\vec{y} - \vec{y}_1 = 0$ или $\vec{y} = \vec{y}_1$, что и требовалось доказать.

♦ *Углом между вектором $\vec{x} \in \mathcal{E}_n$ и подпространством $\mathcal{E}_k \subset \mathcal{E}_n$* называется угол φ между вектором $\vec{x}$ и его ортогональной проекцией $\vec{y}$ на подпространство $\mathcal{E}_k$:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|} = \frac{(\vec{y} + \vec{z}, \vec{y})}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|} = \frac{(\vec{y}, \vec{y})}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|} = \frac{|\vec{y}|^2}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|} = \frac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|}. \tag{28.5}$$

Пример 28.1. Дать геометрическую интерпретацию системы

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{gathered}$$

в терминах ортогональных подпространств.

Решение. Ранее мы уже рассматривали эту систему как пересечение m гиперплоскостей из пространства $\mathcal{A}_n$, проходящих через начало координат. Возможна и другая геометрическая интерпретация этой системы.

Можно считать, что в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ заданы m векторов $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$, $j = \overline{1,m}$. Задача состоит в том, чтобы найти все векторы $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ортогональные каждому из векторов $\vec{a}_j$, $j = \overline{1,m}$.

Пусть ранг матрицы системы равен r. Если вектор $\vec{x}$ ортогонален ко всем векторам $\vec{a}_j$, $j = \overline{1,m}$, то он ортогонален и к порождаемому ими r-мерному подпространству $\mathcal{E}_r$. Таким образом, векторы-решения $\vec{x}$ образуют ортогональное дополнение $\mathcal{E}_r^\perp$ подпространства $\mathcal{E}_n$. Размерность $\mathcal{E}_n^\perp$ (максимальное число линейно независимых решений системы) равна, как известно, $n - r$. Каждая фундаментальная система решений — это базис подпространства $\mathcal{E}_k^\perp$.

Таким образом, коэффициенты системы и ее решения составляют единое евклидово пространство $\mathcal{E}_n$, представляя собой два ортогональных подпространства, являющихся ортогональными дополнениями друг друга.

Пример 28.2. Найти базис ортогонального дополнения $\mathcal{L}_2^{\intercal}$ подпространства $\mathcal{L}$, являющегося линейной оболочкой векторов

$$\vec{a}_1 = (1 \quad 0 \quad 2 \quad 1)^{\intercal}; \quad \vec{a}_2 = (2 \quad 1 \quad 2 \quad 3)^{\intercal}; \quad \vec{a}_3 = (0 \quad 1 \quad -2 \quad 1)^{\intercal}. \tag{28.6}$$

Решение. Из координат векторов (28.6) составим матрицу A и определим ее ранг с помощью указанных элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{S_2-2S_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{S_3-S_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{28.7}$$

Из (28.7) следует, что $\operatorname{rang} A = 2$. Это означает, что размерность линейного пространства, являющегося линейной оболочкой векторов (28.6) равна двум, т.е. $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2$. В качестве базиса этого линейного пространства можно выбрать, например, векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_3$. Тогда $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_3$.

Базис ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$ к $\mathcal{L}$ можно найти из условий

$$\begin{aligned} (\vec{a}_1, \vec{x}) = 0, \\ (\vec{a}_3, \vec{x}) = 0, \end{aligned} \tag{28.8}$$

которые соответствуют системе

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{aligned} \tag{28.9}$$

для координат вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Общее решение этой системы имеет вид

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2x_3 - x_4 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

а для фундаментальной системы решений получим

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{28.10}$$

Тогда общее решение можно записать как

$$\vec{x} = C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2, \tag{28.11}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Это означает, что пространство решений (28.11) представляет собой двумерное линейное пространство с базисом (28.10). Но, по определению, это подпространство является ортогональным дополнением $\mathcal{L}_2^{\perp}$ к пространству $\mathcal{L}_2$, поскольку в силу соотношений (28.8) базисы $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$ взаимно ортогональны. Очевидно, что их совокупность $\{\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ образует базис четырехмерного пространства $\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_2^{\perp}$.

Пример 28.3. Линейное пространство $\mathcal{L}$ задано системой уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0. \end{aligned} \tag{28.12}$$

Найти базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

Решение. Чтобы найти размерность пространства $\mathcal{L}$, выпишем матрицу системы и определим ее ранг с помощью указанных элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix} \underset{S_3 - S_1}{\overset{S_2 - 2S_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \underset{S_3 + S_2}{\sim}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{S_1 - 2S_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (28.13)$$

Из (28.13) следует, что $\operatorname{rang} A = 2$ и $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2$, а, кроме того, система (28.12) равносильна системе

$$\begin{aligned} &x_2 - 9x_3 - x_4 = 0, \\ &x_1 + 6x_3 = 0. \end{aligned} \qquad (28.14)$$

Исходя из (28.14), имеем базис ортогонального дополнения $\mathcal{L}^\perp$

$$\vec{a}_1 = (0 \quad 1 \quad -9 \quad -1)^\intercal, \quad \vec{a}_2 = (1 \quad 0 \quad 6 \quad 0)^\intercal. \qquad (28.15)$$

С помощью векторов (28.15) систему (28.14) можно записать в виде $(\vec{a}_1, \vec{x}) = (\vec{a}_2, \vec{x})$.

◊ Вместо (28.15) можно выбрать векторы, координатами которых являются коэффициенты любых двух уравнений системы (28.12), например двух первых

$$\vec{a}_1{}' = (2 \quad 1 \quad 3 \quad -1), \qquad \vec{a}_2{}' = (3 \quad 2 \quad 0 \quad -2). \qquad (28.16)$$

Пример 28.4. Линейное пространство $\mathcal{L}$ задается системой уравнений из примера 28.3. Найти уравнения, задающие ортогональное дополнение $\mathcal{L}^\perp$.

Решение. Как было показано в примере 28.3, исходная система (28.12) равносильна системе (28.14) с общим решением

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -6x_3 \\ 9x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

которое с помощью фундаментальной системы решений

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (28.17)$$

и произвольных постоянных C_1 и C_2 можно записать в виде

$$\vec{x} = C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2.$$

Множеством этих векторов определяется пространство $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2$ с базисом (28.17). Тогда система уравнений, определяющих его ортогональное дополнение $\mathcal{L}_2^\perp$, состоит из двух уравнений, коэффициентами которых являются координаты базисных векторов пространства $\mathcal{L}_2$, т.е. векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Исходя из (28.17), имеем систему уравнений, определяющих $\mathcal{L}_2^\perp$:

$$\begin{gathered} -6x_1 + 9x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0. \end{gathered} \qquad (28.18)$$

Нетрудно проверить, что фундаментальная система решений системы (28.18) имеет вид (28.15).

◊ Если выписать параллельно системы уравнений, определяющих пространства $\mathcal{L}_2$ (28.14) и $\mathcal{L}_2^\perp$ (28.18) и их базисы (28.15) и (28.17):

$$
\begin{array}{cc}
\mathcal{L}_2 : x_2 - 9x_3 - x_4 = 0, & \mathcal{L}_2^\perp : -6x_1 + 9x_2 + x_3 = 0, \\
x_1 + 6x_3 = 0, & x_2 + x_4 = 0, \\
\vec e_1 = (-6 \quad 9 \quad 1 \quad 0)^\intercal, & \vec a_1 = (0 \quad 1 \quad -9 \quad -1)^\intercal, \\
\vec e_2 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)^\intercal & \vec a_2 = (1 \quad 0 \quad 6 \quad 0)^\intercal,
\end{array}
$$

то можно видеть, что коэффициенты одной системы определяют фундаментальную систему решений другой и наоборот. При этом совокупный базис $(\vec e_1, \vec e_2, \vec a_1, \vec a_2)$ является базисом пространства $\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_2^\perp$.

29. Евклидово (точечно-векторное) пространство

Пусть $\mathcal{A}_n$ — вещественное n-мерное аффинное пространство и $\mathcal{E}_n$ — соответствующее ему векторное евклидово пространство. В пространстве $\mathcal{A}_n$ введено понятие точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которую можно рассматривать как конец радиуса-вектора $OM(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Воспользовавшись введенными в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ понятиями длины вектора и угла между векторами, в пространстве $\mathcal{A}_n$ можно определить расстояние между двумя любыми его точками M и N, положив его равным длине вектора $\overrightarrow{MN}$, а в случае вещественного пространства — и угол MPN, считая его углом между векторами $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{PN}$.

♦ Пространство $\mathcal{A}_n$ с введенной в нем таким образом метрикой называется *евклидовым пространством.*

◊ Именно пространство$\mathcal{A}_n$ изучается аналитической геометрией. Поскольку само векторное евклидово пространство для краткости тоже называют евклидовым, то для евклидова пространства $\mathcal{A}_n$ иногда используют дополнительную характеристику: точечно-векторное. Как правило, из контекста всегда понятно, о каком евклидовом пространстве идет речь.

Пример 29.1. Для вектора $\vec x$ из пространства $\mathcal{E}_n$ найти ортогональную проекцию $\vec y$ и ортогональную составляющую (перпендикуляр) на подпространство $\mathcal{E}_m \subset \mathcal{E}_n$.

Решение. Пусть $\{\vec e_j\}_{j=1}^n$ — ортонормированный базис в $\mathcal{E}_n$, а $\{\vec a_l\}_{l=1}^m$ — произвольный базис в $\mathcal{E}_m$. Представим произвольный вектор $\vec x$ из $\mathcal{E}_n$ в виде суммы его ортогональной проекции $\vec y$ и перпендикуляра $\vec z$ на подпространство $\mathcal{E}_m$ (для векторов $\vec x$ и $\vec y$ используются иногда обозначения $y = \vec x_\tau$ $\vec z = \vec x_{\text{н}}$, которые, однако, неудобны для координатной записи):

$$\vec x = \vec y + \vec z = \vec x_\tau + \vec x_{\text{н}}. \tag{29.1}$$

Будем искать ортогональную проекцию $\vec y$, принадлежащую пространству $\mathcal{E}_m$, в виде

$$\vec y = c_1\vec a_1 + \ldots + c_m\vec a_m. \tag{29.2}$$

Коэффициенты c_l, $l = \overline{1, m}$, найдем из условия ортогональности вектора $\vec z$ к $\mathcal{E}_m$: необходимо и достаточно, чтобы выполнялись m равенств

$$(\vec z, \vec a_l) = 0, \qquad l = \overline{1, m}, \tag{29.3}$$

Отсюда, согласно (29.1), следует

$$(\vec{x} - \vec{y}, \vec{a}_l) = 0, \quad l = \overline{1, m},$$

или

$$(\vec{y}, \vec{a}_l) = (\vec{x}, \vec{a}_l), \quad l = \overline{1, m}. \tag{29.4}$$

Подставив сюда $\vec{y}$ из (29.2), получим систему m уравнений

$$\begin{array}{l} c_1(\vec{a}_1, \vec{a}_1) + \ldots + c_m(\vec{a}_m, \vec{a}_1) = (\vec{x}, \vec{a}_1); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ c_1(\vec{a}_1, \vec{a}_m) + \ldots + c_m(\vec{a}_m, \vec{a}_m) = (\vec{x}, \vec{a}_m). \end{array} \tag{29.5}$$

Поскольку определитель этой системы, являясь определителем Грама векторов базиса $\{\vec{a}_l\}_{l=1}^m$, отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Воспользовавшись правилом Крамера, найдем

$$c_l = \frac{\begin{vmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) \cdots (\vec{a}_1, \vec{a}_{l-1})(\vec{a}_1, \vec{x})(\vec{a}_1, \vec{a}_{l+1}) \cdots (\vec{a}_1, \vec{a}_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\vec{a}_m, \vec{a}_1) \cdots (\vec{a}_m, \vec{a}_{l-1})(\vec{a}_m, \vec{x})(\vec{a}_m, \vec{a}_{l+1}) \cdots (\vec{a}_m, \vec{a}_m) \end{vmatrix}}{\Gamma(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{l-1}, \vec{a}_l, \vec{a}_{l+1}, \ldots, \vec{a}_m)}, \quad l = \overline{1, m}. \tag{29.6}$$

Определив из (29.6) коэффициенты c_l, найдем ортогональную проекцию вектора $\vec{y}$ по формуле (29.2). Теперь, зная $\vec{y}$, найдем ортогональную составляющую вектора $\vec{x}$:

$$\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}. \tag{29.7}$$

Заметим, что если базис $\{\vec{a}_l\}_{l=1}^m$ является ортонормированным, то из (29.6) следует простое равенство

$$c_l = (\vec{x}, \vec{a}_l), \quad l = \overline{1, m}. \tag{29.8}$$

Пример 29.2. Найти ортогональную проекцию $\vec{y}$ и ортогональную составляющую $\vec{z}$ вектора $\vec{x} = (4, -1, -3, 4)$ на подпространство, являющееся линейной оболочкой векторов

$$\vec{b}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \vec{b}_2 = (1, 2, 2, -1), \quad \vec{b}_3 = (1, 0, 0, 3). \tag{29.9}$$

Решение. Из координат векторов (29.9) составим матрицу A и определим ее ранг с помощью указанных элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{S_2 - 2S_1}{\sim} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{S_2 + S_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rang} A = 2$. Это означает, что линейная оболочка векторов (29.9) представляет собой пространство $\mathcal{E}_2$ с базисом, состоящим из двух векторов ($\vec{b}_3 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2$), например,

$$\vec{a}_1 = \vec{b}_1 = (1, 1, 1, 1), \qquad \vec{a}_2 = \vec{b}_3 = (1, 0, 0, 3). \tag{29.10}$$

Теперь ортогональную проекцию $\vec{y}$ вектора $\vec{x}$ на подпространство $\mathcal{E}_2$ с базисом (29.10) ищем в виде (29.2), т.е.

$$\vec{y} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2, \tag{29.11}$$

а коэффициенты c_1, c_2 находим по формулам (29.6):

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} (\vec{a}_1, \vec{x}) & (\vec{a}_1, \vec{a}_2) \\ (\vec{a}_2, \vec{x}) & (\vec{a}_2, \vec{a}_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & (\vec{a}_1, \vec{a}_2) \\ (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & (\vec{a}_2, \vec{a}_2) \end{vmatrix}}, \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & (\vec{a}_1, \vec{x}) \\ (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & (\vec{a}_2, \vec{x}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & (\vec{a}_1, \vec{a}_2) \\ (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & (\vec{a}_2, \vec{a}_2) \end{vmatrix}}.$$

Вычислив

$$(\vec{x}, \vec{a}_1) = (4 \ \ -1 \ \ -3 \ 4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 - 1 - 3 + 4 = 4;$$

$$(\vec{x}, \vec{a}_2) = (4 \ \ -1 \ \ -3 \ 4) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 + 12 = 16;$$

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_1) = (1\ 1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4;$$

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = (1\ 1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 + 3 = 4;$$

$$(\vec{a}_2, \vec{a}_2) = (1\ 0\ 0\ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 + 9 = 10,$$

получим

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 16 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{-24}{24} = -1; \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{48}{24} = 2.$$

Тогда, согласно (29.11), найдем координаты ортогональной проекции

$$\vec{y} = -\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix},$$

а согласно (29.7) — координаты перпендикуляра:

$$\vec{z} = \vec{x} - \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Для проверки полученных значений $\vec{x}$ и $\vec{z}$ воспользуемся теоремой Пифагора

$$|\vec{x}|^2 = |\vec{y}|^2 + |\vec{z}|^2,$$

тогда

$$(16+1+1+16) = (1+1+1+25) + (9+4+1),$$

т.е. $42 = 42$.

$\lozenge$ Если от базиса (28.17) перейти к ортонормированному базису $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$, то вектор $\vec{y}$ можно найти как

$$\vec{y} = \tilde{c}_1\vec{g}_1 + \tilde{c}_2\vec{g}_2, \tag{29.12}$$

где коэффициенты $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ определяются по формуле (29.8). Согласно методу ортогонализации Грама–Шмидта (лемма 27.1), в качестве ортогональных векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ выберем

$$\vec{v}_1 = \vec{a}_1 = (1,1,1,1), \qquad \vec{v}_2 = \vec{a}_2 + \lambda_{21}\vec{v}_1, \tag{29.13}$$

где число λ_{21} найдем согласно (27.6)

$$\lambda_{21} = -\frac{(\vec{a}_2, \vec{v}_1)}{(\vec{v}_1, \vec{v}_1)} = -\frac{(\vec{a}_2, \vec{a}_1)}{(\vec{a}_1, \vec{a}_1)} = -\frac{4}{4} = -1.$$

Таким образом,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}; \qquad \vec{v}_2 = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}. \tag{29.14}$$

Нормировка базиса (29.14) дает

$$\vec{g}_1 = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{g}_2 = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}. \tag{29.15}$$

Отсюда в силу (29.8) найдем

$$\tilde{c}_1 = (\vec{x}, \vec{g}_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -1 & -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}4 = 2;$$

$$\tilde{c}_2 = (\vec{x}, \vec{g}_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}4 & -1 & -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}12 = \frac{12}{\sqrt{6}}.$$

Подставив эти значения в (29.12), получим ортогональную проекцию

$$\vec{y} = 2\vec{g}_1 + \frac{12}{\sqrt{6}}\vec{g}_2 = 2\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{12}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\5\end{pmatrix},$$

совпадающую с найденной ранее.

Пример 29.3. В пространстве $\mathcal{E}_n$ найти угол между вектором $\vec{x} = (4,-1,-3,4)$ и подпространством, являющимся линейной оболочкой векторов

$$\vec{b}_1 = (1,1,1,1), \quad \vec{b}_2 = (1,2,2,-1), \quad \vec{b}_3 = (1,0,0,3).$$

Решение. В примере 29.2 было показано, что ортогональной проекцией вектора $\vec{x}$ на указанное подпространство является вектор $\vec{y} = (1, -1, -1, 5)$. Но тогда, согласно определению (28.5), для угла между ними получим

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|} = \frac{\sqrt{1+1+1+25}}{\sqrt{16+1+9+16}} = \sqrt{\frac{28}{42}} = \sqrt{\frac{7}{12}}, \qquad \varphi = \arccos\sqrt{\frac{7}{12}} \approx 40^\circ.$$

Пример 29.4. Пусть $\mathcal{E}_k$ и $\mathcal{E}_l$ — подпространства пространства $\mathcal{E}_n$. Равносильны ли равенства

$$\mathcal{E}_k^\perp \bigcap \mathcal{E}_l = 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_k \bigcap \mathcal{E}_l^\perp = 0? \tag{29.16}$$

Решение. Из первого равенства следует, что подпространство $\mathcal{E}_l$ является еще и подпространством $\mathcal{E}_k$, поскольку $\mathcal{E}_k^\perp \bigcap \mathcal{E}_l = 0$. Но тогда сумма $\mathcal{E}_k$ и $\mathcal{E}_l$ равна

$$\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_l = \mathcal{E}_k. \tag{29.17}$$

Из второго же равенства следует, что подпространство $\mathcal{E}_k$, в свою очередь, является подпространством $\mathcal{E}_l$, и, следовательно,

$$\mathcal{E}_l + \mathcal{E}_k = \mathcal{E}_l. \tag{29.18}$$

Равенства (29.17) и (29.18) равносильны только при условии $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_l$. Это же условие является условием равносильности равенств (29.16).

Пусть в евклидовом пространстве $\mathcal{A}_n$ заданы k-мерная плоскость $\pi_k^{(0)}$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = 0, \end{array} \tag{29.19}$$

проходящая через начало координат O, и точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда, как известно, радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ можно разложить на ортогональную проекцию $\overrightarrow{OM'}$ и перпендикуляр $\overrightarrow{M'M}$ ($\overrightarrow{OM'} \in \pi_k^{(0)}$, $\overrightarrow{M'M} \in (\pi_k^{(0)})^\perp$):

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}. \tag{29.20}$$

♦ Точка M' называется *ортогональной проекцией точки* M на плоскость $\pi_k^{(0)}$, если разность радиус-векторов

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M'M}$$

является перпендикуляром к плоскости $\pi_k^{(0)}$, т.е. $\overrightarrow{M'M} \perp \pi_k^{(0)}$ (рис. 29).

♦ *Расстоянием от точки* M *до плоскости* $\pi_k^{(0)}$ называется расстояние от этой точки до ее ортогональной проекции M' на заданную плоскость $\pi_k^{(0)}$.

Другими словами, расстояние от точки M до плоскости π равно длине перпендикуляра $\overrightarrow{M'M}$.

Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ — базис направляющего подпространства $\mathcal{E}_k$ плоскости $\pi_k^{(0)}$, то ортогональная проекция $\overrightarrow{OM'}$ и перпендикуляр $\overrightarrow{M'M}$ находятся по формулам (29.2), (29.6) и (29.7).

Ортогональная проекция точки на плоскость обладает замечательным свойством, которое сформулировано в следующей лемме.

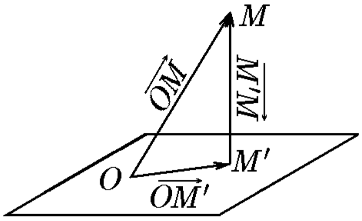


Рис. 29.

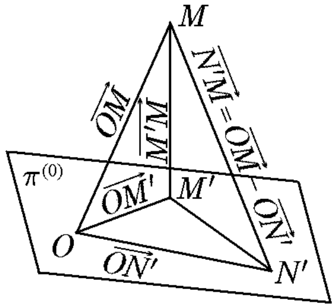


Рис. 30.

Лемма 29.1. *Ортогональная проекция M' точки M на плоскость π является ближайшей к M точкой из всех точек плоскости π.*

Доказательство. Пусть M — некоторая точка, не принадлежащая плоскости $\pi^{(0)}$, проходящей через начало координат O, а M' — ее ортогональная проекция на плоскость $\pi^{(0)}$. Из рис. 30 следует, что лемма будет доказана, если мы покажем, что

$$|\overrightarrow{N'M}| \geqslant |\overrightarrow{M'M}| \tag{29.21}$$

(причем равенство в (29.21) возможно только тогда, когда N' совпадает с M').

Поскольку

$$\overrightarrow{N'M} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{N'M'}$$

и $\overrightarrow{M'M} \perp \overrightarrow{N'M'}$, то по теореме Пифагора

$$|\overrightarrow{N'M}|^2 = |\overrightarrow{M'M}|^2 + |\overrightarrow{N'M'}|^2,$$

откуда и следует (29.21). Равенство в (29.21) достигается, когда $|\overrightarrow{N'M'}| = 0$, т.е. точка N' совпадает с ортогональной проекцией M'.

Пусть теперь в евклидовом пространстве $\mathcal{A}_n$ заданы произвольная k-мерная плоскость $\pi_k^{(0)}$

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{matrix} \tag{29.22}$$

и точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Плоскость π_k (29.22) получается из плоскости $\pi_k^{(0)}$ параллельным переносом на вектор $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, т.е. плоскость π_k параллельна $\pi_k^{(0)}$, но проходит не через начало координат O, а через точку B. Ей соответствует радиус-вектор $\overrightarrow{OB}$, равный $\vec{b}$.

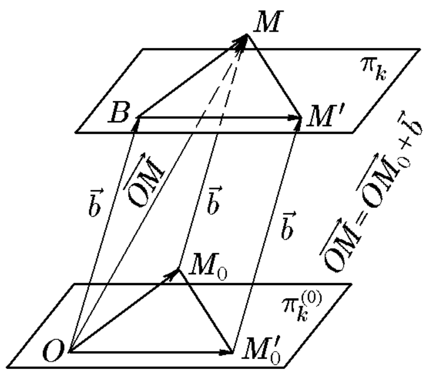


Рис. 31.

Введенные раньше понятия ортогональной проекции точки на плоскость и расстояния до нее естественным образом обобщаются на произвольную плоскость, проходящую через точку B с радиус-вектором $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, если вместо вектора $\overrightarrow{OM}$ рассматривать вектор $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \vec{b}$, как на рис. 31.

Пример 29.5. В пространстве $\mathcal{A}_4$ найти расстояние от точки $M(4, 2, -5, 1)$ до плоскости π_2 (линейного многообразия), задаваемой уравнением

$$\begin{aligned} &2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ &2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12. \end{aligned} \qquad (29.23)$$

Решение. Общее решение системы (29.23) легко находится и имеет вид

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{x}_0 + C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2. \qquad (29.24)$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные; вектор $\vec{x}_0$ — частное решение неоднородного уравнения, а векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения. Явный вид векторов определяется соотношениями

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad (29.25)$$

Если произвольные постоянные C_1 и C_2 в (29.24) заменить параметрами t_1 и t_2, изменяющимися от $-\infty$ до $+\infty$, то мы получим уравнения плоскости π_2 в параметрической форме:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}_1 t_1 + \vec{a}_2 t_2. \qquad (29.26)$$

Из (29.26) следует, что плоскость π_2 получается параллельным переносом на вектор $\vec{x}_0$ плоскости $\pi_2^{(0)}$

$$\vec{x} = \vec{a}_1 t_1 + \vec{a}_2 t_2, \qquad (29.27)$$

векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ которой образуют базис ее направляющего линейного подпространства.

Найдем теперь вектор

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (29.28)$$

ортогональную проекцию которого на плоскость $\pi_2^{(0)}$ (см. рис. 31, где $\vec{b} = \vec{x}_0$) ищем в виде

$$\overrightarrow{BM}' = \overrightarrow{OM}'_0 = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2.$$

Вычислив коэффициенты c_1 и c_2 по формулам (29.8):

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} (\vec{a}_1, \overrightarrow{BM}) & (\vec{a}_1, \vec{a}_2) \\ (\vec{a}_2, \overrightarrow{BM}) & (\vec{a}_2, \vec{a}_2) \end{vmatrix}}{\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2)} = \frac{\begin{vmatrix} -13/2 & 1 \\ 9/2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}} = -\frac{87}{2\cdot 29} = -\frac{3}{2};$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & (\vec{a}_1, \overrightarrow{BM}) \\ (\vec{a}_2, \vec{a}_2) & (\vec{a}_2, \overrightarrow{BM}) \end{vmatrix}}{\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2)} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -13/2 \\ 1 & 9/2 \end{vmatrix}}{29} = \frac{58}{2\cdot 29} = 1,$$

имеем

$$\overrightarrow{BM}' = \overrightarrow{OM}'_0 = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1/2\\-3\\2\end{pmatrix}. \qquad (29.29)$$

По полученной ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{BM}$ найдем его перпендикулярную составляющую:

$$\overrightarrow{M'_0M_0} = \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}' = \begin{pmatrix}1\\7/2\\-5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1/2\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-2\\-1\end{pmatrix}.$$

Теперь расстояние от точки M до плоскости π_2 определится соотношением

$$|\overrightarrow{M'M}| = |\overrightarrow{M'_0M_0} = \sqrt{4+16+4+1} = 5.$$

Пример 29.6. В пространстве $\mathcal{A}_4$ найти ортогональную проекцию M' точки $M(4, 2, -5, 1)$ на плоскость π_2:

$$\begin{aligned} &2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9,\\ &2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12. \end{aligned}$$

Решение. В примере 29.5 получено уравнение плоскости π_2 в параметрической форме (29.26) и найдена ортогональная проекция $\overrightarrow{BM}' = (-1, -1/2, -3, 2)^\intercal$ (29.29) вектора $\overrightarrow{OM}$. Теперь, как следует из рис. 31, радиус-вектор $\overrightarrow{OM}'$ найдется как

$$\overrightarrow{OM}' = \vec{x}_0 + \overrightarrow{BM}' = \begin{pmatrix}3\\-3/2\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1/2\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-3\\2\end{pmatrix}.$$

Координаты этого радиус-вектора являются и координатами точки M' — ортогональной проекции точки M на плоскость π_2. Легко проверить, что точка M' принадлежит плоскости π_2. Действительно, подстановка координат точки M' в уравнения плоскости π_2 обращает их в тождества.

Ранее мы ввели понятие объема n-мерного параллелепипеда для евклидова пространства и выразили этот объем через определитель Грама. Найдем формулу, выражающую объем параллелепипеда через ортогональную проекцию одного из его ребер.

Пусть $\{\vec{x}_j\}_{j=1}^k$ — базис некоторого подпространства евклидова пространства $\mathcal{E}_n$. Найдем объем параллелепипеда, постоенного на этих векторах. Обозначим через $\vec{h}_j$ перпендикуляр, опущенный из из конца вектора $\vec{x}_{j+1}$ на подпространство размерности $j = \overline{1, k-1}$. Тогда при $j = 1$ имеем дело с одномерной задачей. В этом случае объем V_1 равен длине вектора:

$$V_1 = |\vec{x}_1|. \qquad (29.30)$$

При $j = 2$ имеем дело с двумерной задачей. В этом случае объем V_2 равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ (см. пример 27.1):

$$V_2 = V_1|\vec{h}_1| = |\vec{x}_1|\,|\vec{h}_1|. \qquad (29.31)$$

При $j = 3$ трехмерный объем V_3 равен площади параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$:

$$V_3 = V_2|\vec{h}_2| = |\vec{x}_1|\,|\vec{h}_1|\,|\vec{h}_2| \tag{29.32}$$

и т.д. И, наконец, при $j = k$ k-мерный объем V_k равен площади гиперпараллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$:

$$V_k = V_{k-1}|\vec{h}_{k-1}| = |\vec{x}_1|\,|\vec{h}_1| \cdots |\vec{h}_{k-1}|. \tag{29.33}$$

Из формул (29.30)–(29.33) найдем еще одно выражение для определения длины перпендикуляра $|\vec{h}_{k-1}|$:

$$|\vec{h}_{k-1}| = \frac{V_k}{V_{k-1}}, \tag{29.34}$$

которое с учетом (27.25) можно записать через соответствующие определители Грама:

$$|\vec{h}_{k-1}| = \sqrt{\frac{\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})}}. \tag{29.35}$$

Пример 29.7. В пространстве $\mathcal{A}_4$ с помощью формулы (29.35) найти расстояние от точки $M(4, 2-5, 1)$ до плоскости π_2:

$$\begin{aligned} &2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9,\\ &2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12. \end{aligned}$$

Решение. Это задача в примере 29.5 была решена с помощью ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{BM}$. С помощью формул (29.35) решение можно упростить, вычислив соответствующие определители Грама.

Итак, имеем три вектора (см. пример 29.5), два из которых

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\2\\0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\2 \end{pmatrix}$$

образуют базис в направляющем подпространстве плоскости π_2, а третий

$$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 1\\7/2\\-5\\1 \end{pmatrix}$$

проведен из точки B, принадлежащей плоскости π_2, в точку M (рис. 31).

Теперь, вычислив

$$\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{BM}) = \begin{vmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & (\vec{a}_1, \vec{a}_2) & (\vec{a}_1, \overrightarrow{BM})\\ (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & (\vec{a}_2, \vec{a}_2) & (\vec{a}_2, \overrightarrow{BM})\\ (\overrightarrow{BM}, \vec{a}_1) & (\overrightarrow{BM}, \vec{a}_2) & (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -13/2\\ 1 & 6 & 9/2\\ -13/2 & 9/2 & 157/2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{13}{2}\begin{vmatrix} 1 & -13/2\\ 6 & 9/2 \end{vmatrix} - \frac{9}{2}\begin{vmatrix} 5 & -13/2\\ 1 & 9/2 \end{vmatrix} + \frac{157}{4}\begin{vmatrix} 5 & 1\\ 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{13}{2}\frac{87}{2} - \frac{9}{2}\frac{58}{2} + \frac{157}{4}29 = \frac{2900}{4} = 725;$$

$$\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \begin{vmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & (\vec{a}_1, \vec{a}_2) \\ (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & (\vec{a}_2, \vec{a}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 29,$$

согласно (29.35), найдем искомое расстояние:

$$|\overrightarrow{BM}| = \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{BM})}{\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}} = \sqrt{\frac{725}{29}} = \sqrt{25} = 5,$$

совпадающее с найденным в примере 29.5.

Пример 29.8. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4, 2, -5, 1)$ перпендикулярно плоскости π_2:

$$\begin{array}{l} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12. \end{array} \tag{29.36}$$

Решение. Так как исходная плоскость π_2 есть двумерная плоскость в пространстве $\mathcal{A}_4$, то ее ортогональным дополнением $\pi_2^\perp$ также может быть только двумерная плоскость ($l = n - k = 4 - 2 = 2$). При решении примера 28.4 мы отмечали, что в качестве базиса направляющего подпространства плоскости $\pi_2^\perp$ можно выбрать векторы, имеющие своими координатами коэффициенты уравнений, определяющих исходную плоскость π_2:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим два способа решения задачи.

1-й способ. Запишем, согласно (15.5), параметрические уравнения плоскости $\pi_2^\perp$:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OM} + \vec{e}_1 t_1 + \vec{e}_2 t_2$$

или

$$\begin{array}{l} x_1 = 4 + 2t_1 + 2t_2, \\ x_2 = 2 - 2t_1 - 4t_2, \\ x_3 = -5 + t_1 + 2t_2, \\ x_4 = 1 + 2t_1 + 3t_2. \end{array} \tag{29.37}$$

2-й способ. Из примера 29.5 следует, что система (29.36) имеет фундаментальную систему решений

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы образуют базис направляющего подпространства плоскости π_2. Тогда система уравнений, описывающая плоскость, являющуюся ее ортогональным дополнением $\pi_2^\perp$, имеет вид

$$\begin{array}{r} x_2 + 2x_3 = \mu, \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 = \nu. \end{array} \tag{29.38}$$

Неизвестные μ и ν можно определить, подставив в (29.38) координаты точки M:

$$\begin{gathered}2+2\cdot(-5)=-8=\mu,\\ -4+2+2\cdot 1=0=\nu.\end{gathered}$$

С учетом этого из (29.37) получим уравнения

$$\begin{gathered}x_2+2x_3=-8,\\ -x_1+x_2+2x_4=0\end{gathered}\qquad(29.39)$$

плоскости, которая перпендикулярна заданной и проходит через заданную точку M.

Можно проверить, что подстановка уравнений (29.37) в (29.39) обращает последние в тождество, подтверждая правильность полученного решения.

Пример 29.9. Найти площадь треугольника ABC и длину высоты, опущенной из точки B, если $A(1,2,3)$, $B(4,1,5)$ и $C(3,3,2)$.

Решение. Найдем векторы: $\overrightarrow{AB}=(3,-1,2)$ и $\overrightarrow{AC}=(2,1,-1)$, тогда площадь треугольника ABC можно найти как половину площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Площадь этого параллелограмма, согласно (27.25), находится через определитель Грама:

$$S_{\text{пар}}=\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}=\sqrt{\begin{vmatrix}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}) & (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\\ (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) & (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC})\end{vmatrix}}=\sqrt{\begin{vmatrix}14 & 3\\ 3 & 6\end{vmatrix}}=\sqrt{75}.$$

Тогда площадь треугольника ABC

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{\text{пар}}=\frac{1}{2}\sqrt{75}.$$

Длину высоты h_B, опущенной из точки B, найдем по формуле (29.34):

$$h_B=\sqrt{\frac{\Gamma(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}}=\sqrt{\frac{75}{6}}=\sqrt{12{,}5}.$$

◊ Заметим, что площадь параллелограмма мы нашли без использования векторного произведения векторов, как это принято в аналитической геометрии:

$$S_{\text{пар}}=|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]|.$$

Воспользуемся этой формулой для проверки полученного результата:

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-\vec{\imath}+7\vec{\jmath}+5\vec{k},$$

тогда

$$S_{\text{пар}}=|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]|=\sqrt{1+49+25}=\sqrt{75},$$

что совпадает с полученным выше значением.

Пример 29.10. Найти объем трехмерного симплекса с вершинами $A(1,2,3)$, $B(4,1,5)$, $C(3,3,2)$, $D(1,2,3)$ и длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Решение. Трехмерный симплекс представляет собой четырехгранник, т.е. треугольную пирамиду $ABCD$. Как известно из элементарной геометрии, ее объем находится как $V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{\text{пар}}$, где $V_{\text{пар}}$ — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Вычислим координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB} = (3,-1,2)^\intercal, \quad \overrightarrow{AC} = (2,-1,1)^\intercal, \quad \overrightarrow{AD} = (0,0,2)^\intercal. \tag{29.40}$$

Теперь с помощью определителя Грама, согласно (27.25), найдем

$$V_{\text{пар}} = \sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})} = \begin{vmatrix} (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}) & (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) & (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}) \\ (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) & (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}) & (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) \\ (\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}) & (\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}) & (\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD}) \end{vmatrix}^{1/2} =$$

$$= \begin{vmatrix} 14 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}^{1/2} = \begin{vmatrix} 20 & 15 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \\ 10 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{2(200-150)} = \sqrt{100} = 10,$$

следовательно, $V_{ABCD} = 10/8$.

Длину высоты h_D найдем по формуле (29.35):

$$h_D = \sqrt{\frac{\Gamma(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})}{\Gamma(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}}.$$

Значение определителя Грама $\Gamma(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ найдено только что, а определитель $\Gamma(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ найден в предыдущем примере. С учетом этого получим

$$h_D = \sqrt{\frac{100}{75}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$\Diamond$ Отметим, что объем параллелепипеда мы нашли без использования смешанного произведения векторов, как это принято в аналитической геометрии:

$$V_{\text{пар}} = |(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|, \quad (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 = 10.$$

Результат совпадает с полученным выше.

Пример 29.11. Найти расстояние от точки $M'(2,5,0,1)$ до гиперплоскости π_3:

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 5.$$

Решение. Запишем уравнение гиперплоскости в параметрической форме:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{e}_1 t_1 + \vec{e}_2 t_2 + +\vec{e}_3 t_3,$$

где

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— базис направляющего подпространства гиперплоскости, а радиус-вектор

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

определяет координаты точки O', через которую проходит гиперплоскость π_3 при $t_1 = t_2 = t_3 = 0$. Разность

$$\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OM}' - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

определяет вектор $\overrightarrow{O'M'}$, начало которого принадлежит гиперплоскости π_3, а конец совпадает с точкой M'. Тогда по формуле (29.35) найдем искомое расстояние

$$h = \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \overrightarrow{O'M'})}{\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}}.$$

Вычислив

$$\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \overrightarrow{O'M'}) = \begin{vmatrix} 5 & 8 & -2 & 2 \\ 8 & 17 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 16 & -6 & 0 \\ 8 & 17 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \\ 12 & 20 & -9 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 16 & -6 \\ 8 & 17 & -4 & 0 \\ 12 & 20 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 8 & 17 & -4 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 25 & 12 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 25 & 12 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -(75 - 84) = 9;$$

$$\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 9 & 16 & -6 \\ 8 & 17 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 2(27 - 16) = 22,$$

получим

$$h = \sqrt{\frac{9}{22}} = \frac{3}{\sqrt{22}}.$$

Вычисление расстояния от точки до плоскости в пространстве $\mathcal{A}_n$ по формуле (29.35) усложняется с ростом размерности заданной плоскости и становится наиболее громоздким для плоскостей наибольшей размерности, т.е. гиперплоскостей π_{n-1}. Оказывается, расстояние от заданной точки до гиперплоскости можно найти, не вычисляя определитель Грама, а непосредственно из самого уравнения плоскости, если привести его к виду, называемому нормальным. Это можно сделать следующим образом.

Пусть гиперплоскость π_{n-1} определена уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = (\vec{a}, \vec{x}) = b. \tag{29.41}$$

Как уже отмечалось, эта гиперплоскость получается параллельным переносом гиперплоскости $\pi_{n-1}^{(0)}$, проходящей через начало координат:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = (\vec{a}, \vec{x}) = 0, \tag{29.42}$$

на радиус-вектор $\vec{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$, координаты которого удовлетворяют уравнению

$$a_1x_{01} + a_2x_{02} + \ldots + a_nx_{0n} = (\vec{a}, \vec{x}_0) = b. \tag{29.43}$$

Как известно, вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, составленный из коэффициентов уравнения (29.42) гиперплоскости $\pi_{n-1}^{(0)}$, является ее ортогональным дополнением (что, впрочем, следует и из (29.42)). Это означает, что вектор $\vec{a}$ ортогонален не только плоскости $\pi_{n-1}^{(0)}$, но и плоскости π_{n-1} в силу их параллельности.

Положим

$$\alpha = \pm|\vec{a}| = \pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \neq 0, \tag{29.44}$$

причем знак выберем так, чтобы число b/α было неотрицательным:

$$b/\alpha \geqslant 0.$$

Деление уравнения (29.41) на число α приводит его к виду

$$\frac{a_1}{\alpha}x_1 + \frac{a_2}{\alpha}x_2 + \ldots + \frac{a_n}{\alpha}x_n - \frac{b}{\alpha} = 0, \quad \frac{b}{\alpha} \geqslant 0. \tag{29.45}$$

♦ Уравнение (29.45) называется *нормальным уравнением* гиперплоскости π_{n-1}.

С помощью единичного вектора

$$\vec{m} = \frac{\vec{a}}{\alpha} = \Big(\frac{a_1}{\alpha}, \frac{a_2}{\alpha}, \ldots, \frac{a_n}{\alpha}\Big), \quad |\vec{m}| = \frac{|\vec{a}|}{|\alpha|} = 1,$$

коллинеарного вектору $\vec{a}$, уравнение (29.45) можно записать как

$$(\vec{m}, \vec{x}) - \frac{b}{\alpha} = 0, \quad \frac{b}{\alpha} \geqslant 0. \tag{29.46}$$

Единичный вектор $\vec{m}$, как и вектор $\vec{a}$, перпендикулярен обеим гиперплоскостям: $\pi_{n-1}^{(0)}$ и π_{n-1}.

Пусть теперь нам дана некоторая точка M', координаты которой совпадают с координатами радиус-вектора $\overrightarrow{OM}'$. Обозначим их через $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$.

Точку M' можно рассматривать как сдвиг на вектор $\vec{x}_0$ некоторой точки M, координаты которой равны координатам радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Этот вектор можно разложить на его ортогональную проекцию $\vec{y}$ на плоскость $\pi_{n-1}^{(0)}$ и ортогональную составляющую $\vec{z}$, т.е. перпендикуляр на эту же плоскость:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{y} + \vec{z}, \qquad \vec{y} \in \pi_{n-1}^{(0)}, \quad \vec{z} \perp \pi_{n-1}^{(0)}. \tag{29.47}$$

В таком случае искомое расстояние от точки M' до плоскости π_{n-1} будет равно расстоянию от точки M до плоскости $\pi_{n-1}^{(0)}$, которое, в свою очередь, равно длине вектора $\vec{z}$. Вектор $\vec{z}$ коллинеарен $\vec{m}$, следовательно, найдется число h такое, что $\vec{z} = h\vec{m}$. Так как $\vec{m}$ — единичный, то искомое расстояние, равное $|\vec{z}|$, равно $|h|$, т.е. $|\vec{z}| = |h|$.

Итак, имеем два равенства:

$$\overrightarrow{OM}' = \vec{x}_0 + \overrightarrow{OM},$$
$$\overrightarrow{OM} = \vec{y} + \vec{z} = \vec{y} + h\vec{m}.$$

Подставив второе уравнение в первое:

$$\overrightarrow{OM}' = \vec{x}_0 + \vec{y} + h\vec{m}$$

и умножив полученное уравнение на вектор $\vec{m}$, запишем

$$(\overrightarrow{OM}', \vec{m}) = (\vec{x}_0, \vec{m}) + (\vec{y}, \vec{m}) + h(\vec{m}, \vec{m}).$$

Так как $\vec{y} \perp \vec{m}$ ($\vec{y} \in \pi_{n-1}^{(0)} \perp \vec{m}$), то $(\vec{y}, \vec{m}) = 0$, а $(\vec{m}, \vec{m}) = |\vec{m}|^2 = 1$ и $(\vec{x}_0, \vec{m}) = b/\alpha$. Учтя это, получим

$$(\overrightarrow{OM}', \vec{m}) = \frac{b}{\alpha} + 0 + h,$$

откуда

$$h = (\overrightarrow{OM}', \vec{m}) - \frac{b}{\alpha}.$$

Учтем теперь, что

$$(\overrightarrow{OM}', \vec{m}) = \left(\overrightarrow{OM}', \frac{\vec{a}}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}(\overrightarrow{OM}', \vec{a}) = \frac{1}{\alpha}(a_1x_1' + a_2x_2' + \ldots + a_nx_n'),$$

найдем

$$h = \frac{1}{\alpha}[a_1x_1' + a_2x_2' + \ldots + a_nx_n' - b]$$

и, соответственно,

$$|h| = \frac{|a_1x_1' + a_2x_2' + \ldots + a_nx_n' - b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}. \tag{29.48}$$

◊ Таким образом, чтобы найти расстояние от точки до гиперплоскости, нужно подставить координаты этой точки в левую часть нормального уравнения гиперплоскости (29.46) и найти модуль полученного значения.

Пример 29.12. Найти расстояние от точки $M'(2, 5, 0, 1)$ до гиперплоскости π_3:

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 5. \tag{29.49}$$

Решение. Уравнение гиперплоскости запишем в нормальном виде. Поскольку $\vec{a} = (2, 1, 4, -1)$ и $b = 5$, то $|\vec{a}| = \sqrt{4 + 1 + 16 + 1} = \sqrt{22}$. Теперь, подставив в (29.49) координаты точки M', согласно (29.48), найдем искомое расстояние

$$|h| = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{22}} = \frac{3}{\sqrt{22}}.$$

Этот же результат получен в примере 29.11 гораздо более громоздким способом.

30. Метод наименьших квадратов

Ортогональная проекция вектора $\vec{x}$ на подпространство или плоскость заданного евклидова пространства и соответствующая ортогональная составляющая вектора $\vec{x}$ играют важную роль в самых разных приложениях: при рассмотрении несовместных систем линейных уравнений, интерполировании функций полиномами, представлении периодических функций тригонометрическими полиномами (рядом Фурье), при изучении ортогональных полиномов и т.д.

Очевидно, что перечисленные задачи принадлежат различным разделам математики и решаются методами, присущими этим разделам. С точки зрения линейной алгебры, все эти задачи однотипны и фактически сводятся к задаче о нахождении ортогональной проекции и ортогональной составляющей некоторого вектора. Рассмотрим некоторые из них более подробно.

I. Несовместные системы линейных уравнений

Пусть дана несовместная система линейных уравнений

$$\begin{array}{l} a_1^1x_1 + a_2^1x_2 + \ldots + a_m^1x_m = b_1, \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_m^2x_m = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1^nx_1 + a_2^nx_2 + \ldots + a_m^nx_m = b_n. \end{array} \tag{30.1}$$

Поскольку она несовместна, ее нельзя решить, т.е. нельзя найти такие числа $c_1, c_2, \ldots, c_m$, чтобы при подстановке этих чисел вместо неизвестных $x_1, \ldots, x_m$ удовлетворялись бы все уравнения системы (30.1). Таким образом, поскольку говорить о точном решении системы (30.1) бессмысленно, то возникает вопрос о ее приближенном решении. В этом случае ставится задача о нахождении чисел $c_1, c_2, \ldots, c_m$, при которых левые части уравнений (30.1) были бы возможно более близки к соответствующим правым частям $b_1, b_2, \ldots, b_n$. В качестве «меры близости» берется так называемое квадратичное уклонение левых частей уравнений от свободных членов, т.е. величина

$$\delta^2 = \sum_{k=1}^{n}(a_1^kc_1 + a_2^kc_2 + \ldots + a_m^kc_m - b_k)^2. \tag{30.2}$$

Если ввести обозначения

$$\begin{array}{l} \beta_1 = a_1^1c_1 + a_2^1c_2 + \ldots + a_m^1c_m, \\ \beta_2 = a_1^2c_1 + a_2^2c_2 + \ldots + a_m^2c_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta_n = a_1^nc_1 + a_2^nc_2 + \ldots + a_m^nc_m, \end{array} \tag{30.3}$$

то условие (30.2) запишется в виде

$$\delta^2 = (\beta_1 - b_1)^2 + (\beta_2 - b_2)^2 + \ldots + (\beta_n - b_n)^2 \tag{30.4}$$

или

$$\delta = \sqrt{(\beta_1 - b_1)^2 + (\beta_2 - b_2)^2 + \ldots + (\beta_n - b_n)^2}. \tag{30.5}$$

Задачу на минимум величины $\delta = \delta(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ можно решить непосредственно. Однако ее решение получается немедленно, если истолковать задачу с точки зрения векторных пространств.

В самом деле, рассмотрим n-мерное евклидово пространство $\mathcal{E}_n$ и в нем векторы

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \dots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \dots \\ a_2^n \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{a}_m = \begin{pmatrix} a_m^1 \\ a_m^2 \\ \dots \\ a_m^n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \tag{30.6}$$

координаты которых определяются системой уравнений (30.1). В пространстве $\mathcal{E}_n$ выделим подпространство $\mathcal{E}_m$ $(m < n)$ с базисом $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$. Выписав линейную комбинацию (30.3) в векторной форме:

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_m\vec{a}_m = \vec{\beta}, \tag{30.7}$$

мы получим вектор

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

принадлежащий подпространству $\mathcal{E}_m$, поскольку он является линейной комбинацией его базисных векторов. С помощью векторов (30.6) исходная система (30.1) запишется в виде

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_m\vec{a}_m = \vec{b}, \tag{30.8}$$

аналогичном (30.7). Но в силу несовместности системы (30.1) равенство (30.8) не выполняется для всех $x_1, \dots, x_m$ и, следовательно, вектор $\vec{b}$, будучи вектором в пространстве $\mathcal{E}_n$, не принадлежит пространству $\mathcal{E}_m$, поскольку не является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$.

В такой интерпретации среднее квадратичное отклонение δ (30.5) определяет норму разности векторов $|\vec{\beta} - \vec{b}|$, т.е. расстояние от вектора $\vec{b}$ до подпространства $\mathcal{E}_m$. Но это расстояние будет, как известно, наименьшим, если вектор $\vec{\beta}$ является ортогональной проекцией вектора $\vec{b}$ на подпространство $\mathcal{E}_m$, а тогда величина $|\vec{\beta} - \vec{b}|$ будет определяться как длина ортогональной составляющей вектора $\vec{b}$ на подпространство $\mathcal{E}_m$.

Таким образом, задача о приближенном решении несовместной системы (30.1) с наименьшим квадратичным отклонением (30.5) равносильна задаче о нахождении ортогональной проекции и ортогональной составляющей заданного вектора $\vec{b}$ на подпространство $\mathcal{E}_m$. При этом коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_m$ линейной комбинации (30.7), определяющие ортогональную проекцию, дают приближенное решение исходной системы (30.1), а длина ортогональной составляющей (перпендикуляра) дает оценку этого приближения — величину квадратичного отклонения δ.

Именно такая задача была рассмотрена в примере 29.1 и свелась к решению системы (29.5), которая в данном случае выглядит так:

$$\begin{array}{c} c_1(\vec{a}_1, \vec{a}_1) + \dots + c_m(\vec{a}_m, \vec{a}_1) = (\vec{x}, \vec{a}_1); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ c_1(\vec{a}_1, \vec{a}_m) + \dots + c_m(\vec{a}_m, \vec{a}_m) = (\vec{x}, \vec{a}_m). \end{array} \tag{30.9}$$

Решение этой системы получено в примере 29.1 и имеет вид

$$c_l = \frac{\begin{vmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) \cdots (\vec{a}_1, \vec{a}_{l-1})(\vec{a}_1, \vec{x})(\vec{a}_1, \vec{a}_{l+1}) \cdots (\vec{a}_1, \vec{a}_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\vec{a}_m, \vec{a}_1) \cdots (\vec{a}_m, \vec{a}_{l-1})(\vec{a}_m, \vec{x})(\vec{a}_m, \vec{a}_{l+1}) \cdots (\vec{a}_m, \vec{a}_m) \end{vmatrix}}{\Gamma(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{l-1}, \vec{a}_l, \vec{a}_{l+1}, \dots, \vec{a}_m)}, \quad l = \overline{1, m}. \tag{30.10}$$

Вычислив по этим формулам величины $c_1, c_2, \ldots, c_m$, мы можем по формуле (30.7) найти вектор $\vec{\beta}$. Если оба вектора: $\vec{\beta}$ и $\vec{b}$ известны, из равенства (30.5) можно найти δ. Замечательно, что величину δ можно найти независимо от вектора $\vec{\beta}$, если воспользоваться формулой (29.5) для вычисления длины перпендикуляра, которая в данном случае имеет вид

$$\delta = \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m, \vec{b})}{\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m)}}. \tag{30.11}$$

$\Diamond$ Предварительная оценка (30.11) зачастую позволяет принять решение о целесообразности нахождения решения системы (30.1) в рамках такого приближения.

Таким образом, приближенное решение несовместной системы (30.1) в терминах линейных пространств сводится к решению системы нормальных уравнений (30.9). Именно ее решение в виде (30.10) обеспечивает минимальное значение квадратичного отклонения δ.

$\Diamond$ Величина δ, согласно (30.5), будет наименьшей, если наименьшими будут все квадраты, входящие в сумму (30.5). По этой причине указанный метод называется *методом наименьших квадратов*.

Пример 30.1. В экспериментах по определению некоторых величин x_1 и x_2 из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений:

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 = 1,\\ &3x_1 + 2x_2 = 3,\\ &5x_1 + 3x_2 = 5. \end{aligned} \tag{30.12}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин x_1 и x_2.

Решение. Несовместность системы (30.12) очевидна, поскольку расширенная матрица системы простейшим элементарным преобразованием приводится к противоречивому виду

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 5 \end{array}\right) \underset{S_3-(S_1+S_2)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(сумма первых двух уравнений несовместна с третьим).

1 способ. Воспользуемся методом наименьших квадратов.

Чтобы найти решение этим методом, в пространстве $\mathcal{E}_3$, исходя из (30.12), выпишем векторы

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2\\ 3\\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1\\ 3\\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathcal{E}_2, \quad \vec{b} \notin \mathcal{E}_2, \tag{30.13}$$

по которым составляем систему нормальных уравнений (30.9):

$$\begin{aligned} &(\vec{a}_a, \vec{a}_1)c_1 + (\vec{a}_2, \vec{a}_1)c_2 = (\vec{b}, \vec{a}_1),\\ &(\vec{a}_1, \vec{a}_2)c_1 + (\vec{a}_2, \vec{a}_2)c_2 = (\vec{b}, \vec{a}_2). \end{aligned} \tag{30.14}$$

Вычислив

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_1) = 4 + 9 + 25 = 38, \quad (\vec{a}_2, \vec{a}_1) = 2 + 6 + 15 = 23, \quad (\vec{b}, \vec{a}_1) = 2 + 9 + 25 = 36,$$

$$(\vec{a}_2, \vec{a}_1) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 23, \quad (\vec{a}_2, \vec{a}_2) = 1 + 4 + 9 = 14, \quad (\vec{b}, \vec{a}_2) = 1 + 6 + 15 = 22,$$

из (30.14) получим

$$\begin{aligned} 38c_1 + 23c_2 &= 36, \\ 23c_1 + 14c_2 &= 22. \end{aligned} \tag{30.15}$$

Решим эту систему методом Крамера. Вычислив

$$\Delta = \begin{vmatrix} 38 & 23 \\ 23 & 14 \end{vmatrix} = 3, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 36 & 23 \\ 22 & 14 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 38 & 36 \\ 23 & 22 \end{vmatrix} = 8,$$

найдем

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{2}{3}, \qquad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{3}. \tag{30.16}$$

Такой же результат дают формулы (30.10). Эти значения и определяют приближенное решение исходной системы:

$$x_1 \approx c_1 = -\frac{2}{3}, \qquad x_2 \approx c_2 = \frac{8}{3}. \tag{30.17}$$

Зная c_1 и c_2, можно найти вектор

$$\vec{\beta} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{8}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix},$$

а следовательно, и разность

$$\vec{b} - \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \tag{30.18}$$

норма (модуль) которой дает наименьшее квадратичное отклонение

$$\delta = |\vec{b} - \vec{\beta}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{30.19}$$

характеризующее надежность измерений.

◊ Отметим, что если в качестве c_1 и c_2 выбрать точные решения первых двух уравнений: $c_1' = -1$, $c_2' = 3$, то

$$\vec{\beta}' = c_1'\vec{a}_1 + c_2'\vec{a}_2 = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

и

$$\vec{b} - \vec{\beta}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

что дает квадратичное отклонение

$$\delta' = |\vec{b} - \vec{\beta}'| = \sqrt{0^2 + o^2 + 1^2} = 1 > \delta = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

большее, чем дает метод наименьших квадратов (30.19).

2 способ. Воспользуемся методом нахождения экстремума функции многих (в данном случае двух) переменных.

Исходим из основной характеристики метода наименьших квадратов — квадратичного отклонения δ, рассматривая его как функцию двух переменных:

$$\delta = |\vec{b} - (c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2)|,$$

которую с учетом (30.13) можно записать в виде

$$\delta = \sqrt{[1-(2x_1+c_2)]^2 + [3-(3c_1+2c_2)]^2 + [5-(5c_1+3c_2)]^2}.$$

Вычислив частные производные

$$\frac{\partial\delta}{\partial c_1} = \frac{1}{\delta}\{(1-2c_1-c_2)(-2)+(3-3c_1-2c_2)(-3)+(5-5c_1-3c_2)(-5)\},$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial c_2} = \frac{1}{\delta}\{(1-2c_1-c_2)(-1)+(3-3c_1-2c_2)(-2)+(5-5c_1-3c_2)(-3)\}$$

и приравняв их к нулю:

$$\frac{\partial\delta}{\partial c_1} = 0, \qquad \frac{\partial\delta}{\partial c_2} = 0,$$

придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} 38c_1 + 23c_2 &= 36,\\ 23c_1 + 14c_2 &= 22, \end{aligned}$$

совпадающей с (30.15), полученной 1-м способом. Далее, действуя аналогично, придем к уже найденному решению.

II. Интерполяция функций

Пример 30.2. Пусть на отрезке $[a, b]$ в точках $x_j \in [a, b]$, $j = \overline{1, n}$, заданы значения некоторой функции $y(x_j) = y_j$. Требуется указать полином $P_k(x)$, $k < n$, для которого квадратичное отклонение

$$\delta = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}[P_k(x_j) - y_j]^2} \tag{30.20}$$

является наименьшим.

Решение. Задачу решаем методом наименьших квадратов.

Пусть $\mathcal{E}_n$ — евклидово пространство функций $y(x)$, рассматриваемых только в точках x_j, $j = \overline{1, n}$, со скалярным произведением

$$(f(x), g(x)) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)g(x_j). \tag{30.21}$$

Тогда наша задача сведется к определению ортогональной проекции вектора $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ на пространство всех полиномов степени, не превосходящей $k < n$. Коэффициенты искомого полинома

$$P_k(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_kx^k \tag{30.22}$$

найдутся из системы нормальных уравнений, аналогичных (30.9), которые в данном случае будут иметь вид

$$\begin{array}{l} c_0(1,1) + c_1(x,1) + \ldots + c_k(x^k,1) = (y,1), \\ c_0(1,x) + c_1(x,x) + \ldots + c_k(x^k,x) = (y,x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_0(1,x^k) + c_1(x,x^k) + \ldots + c_k(x^k,x^k) = (y,x^k). \end{array} \tag{30.23}$$

Ее решение задается формулами, аналогичными (30.10), а само наименьшее отклонение — по формуле, аналогичной (30.11).

Пример 30.3. Экспериментально получены пять значений искомой функции $y = y(x)$ для пяти значений аргумента, которые представлены таблицей:

x_j	1	2	3	4	5
y_j	5,1	6,1	4,6	2,6	3,1

Методом наименьших квадратов найти линейной полином $P_1(x) = c_0 + c_1x$, представляющий функцию $y(x)$.

Решение. *1-й способ.* Исходя из условий задачи, выпишем систему (30.23):

$$\begin{array}{l} c_0(1,1) + c_1(x,1) = (y,1), \\ c_0(1,x) + c_1(x,x) = (y,x). \end{array} \tag{30.24}$$

Вычислим, согласно (30.18):

$$\begin{gathered} (1,1) = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 5, \\ (x,1) = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 5\cdot 1 = 15, \\ (x,x) = 1^1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55, \\ (y,1) = 5{,}1 + 6{,}1 + 4{,}6 + 2{,}6 + 3{,}1 = 21{,}5, \\ (y,x) = 5{,}1\cdot 1 + 6{,}1\cdot 2 + 4{,}6\cdot 3 + 2{,}6\cdot 4 + 3{,}1\cdot 5 = 57. \end{gathered}$$

Из (30.24) получим

$$\begin{array}{l} 5c_0 + 15c_1 = 21{,}5, \\ 15c_0 + 55c_1 = 57. \end{array} \tag{30.25}$$

Решив эту систему (или воспользовавшись формулой, аналогичной (30.10)), найдем

$$c_0 = 6{,}55, \quad c_1 = -0{,}75.$$

Стало быть, искомый полином имеет вид

$$y(x) \approx P_1(x) = 6{,}55 - 0{,}75x. \tag{30.26}$$

Чтобы найти квадратичное отклонение, можно воспользоваться либо формулой (30.18), либо формулой

$$\delta = \sqrt{\frac{\Gamma(1,x,y)}{\Gamma(1,x)}} = \begin{vmatrix} 5 & 15 & 21{,}5 \\ 15 & 55 & 57 \\ 21{,}5 & 57 & 100{,}75 \end{vmatrix}^{1/2} \begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{vmatrix}^{1/2} = \sqrt{\frac{133{,}75}{50}} = \sqrt{2{,}675} = 1{,}635. \tag{30.27}$$

Кроме того, вычислив значения полинома:

$$\begin{gathered} P_1(x_1) = P_1(1) = 6{,}55 - 0{,}75\cdot 1 = 5{,}8; \quad P_1(2) = 5{,}05; \\ P_1(3) = 4{,}3; \quad P_1(4) = 3{,}55; \quad P_1(5) = 2{,}8, \end{gathered} \tag{30.28}$$

из (30.17) найдем значение

$$\delta = \sqrt{(5{,}8-5{,}1)^2+(5{,}05-6{,}1)^2+(4{,}3-4{,}6)^2+(3{,}55-2{,}6)^2+(2{,}8-3{,}1)^2} = \\ = \sqrt{2{,}675} = 1{,}635,$$

совпадающее с (30.27).

Решение задачи можно проиллюстрировать графически, воспользовавшись исходной таблицей и значениями $P_1(x_j)$ из (30.28).

2-й способ. Рассматривая квадратичное отклонение

$$\delta = \sqrt{\sum_{j=1}^{5}[y_j-(c_0+c_1x_j)]^2}$$

как функцию двух переменных c_0 и c_1, найдем ее экстремум.

Вычислив частные производные

$$\frac{\partial\delta}{\partial c_0} = \frac{1}{\delta}\left\{\sum_{j=1}^{5}(y_j-c_0-c_1x_j)(-1)\right\},$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial c_1} = \frac{1}{\delta}\left\{\sum_{j=1}^{5}(y_j-c_0-c_1x_j)(-x_j)\right\}$$

и приравняв их к нулю:

$$\sum_{j=1}^{5}(y_j-c_0-c_1x_j)=0,$$
$$\sum_{j=1}^{5}(y_j-c_0-c_1x_j)x_j=0,$$

с учетом того, что

$$\sum_{j=1}^{5}x_j=15;\quad \sum_{j=1}^{5}x_j^2=55;\quad \sum_{j=1}^{5}y_j=21{,}5,\quad \sum_{j=1}^{5}y_jx_j=57,$$

придем к системе

$$5c_0+15c_1=21{,}5;$$
$$15c_0+55c_1=57,$$

совпадающей с (30.25), полученной первым способом. Далее действуем аналогично, придя к уже найденному решению.

III. Приближение функций тригонометрическими полиномами

♦ *Тригонометрическим полиномом* порядка (не степени!) n будем называть полином вида

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2}+a_1\cos x+\ldots+a_n\cos nx+b_1\sin x+\ldots+b_n\sin nx. \qquad (30.29)$$

Пусть $f(x)$ — некоторая непрерывная функция, заданная на интервале $]0, 2\pi[$. В некоторых приложениях зачастую требуется подобрать тригонометрический полином (30.29) заданного порядка n, возможно меньше отличающийся от $f(x)$. В качестве меры отклонения $P_n(x)$ от $f(x)$ выбирается квадратичное отклонение

$$\delta = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} [f(x) - P_n(x)]^2 dx}. \tag{30.30}$$

Введем в рассмотрение евклидово пространство $\mathcal{E}$ функций, непрерывных на интервале $]a, b[$. Скалярное произведение в этом пространстве функций, как обычно, зададим интегралом

$$(f(x), g(x)) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx, \tag{30.31}$$

тогда длина вектора $f(x)$ находится как

$$|f(x)| = \sqrt{(f(x), f(x))} = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}.$$

Но в таком случае квадратичное отклонение (30.30) в рассматриваемом пространстве ($a = 0, b = 2\pi$) есть расстояние от $f(x)$ до $P_n(x)$. Тригонометрические полиномы порядка n (30.29) образуют в этом пространстве подпространство $\mathcal{E}_{2n+1}$. В такой интерпретации задача заключается в том, чтобы найти вектор из $\mathcal{E}_{2n+1}$, лежащий на минимальном расстоянии от вектора $f(x)$. Эта задача снова решается построением перпендикуляра из точки $f(x)$ на подпространство $\mathcal{E}_{2n+1}$. В качестве ортонормированного базиса этого подпространства, как известно, можно выбрать функции

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ e_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ e_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,\ e_{2n-1} = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ e_{2n} = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}. \tag{30.32}$$

Тогда решением задачи является ортогональная проекция

$$P_n(x) = c_0e_0 + c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_{2n-1}e_{2n-1} + c_{2n}e_{2n}, \tag{30.33}$$

где c_k — решения системы нормальных уравнений (30.10), которая в силу ортонормированности $e_k(x)$ имеет вид

$$c_k = (f(x), e_k(x)),$$

а с учетом явного вида (30.32) и скалярного произведения (30.31):

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi} f(x)dx,$$

$$c_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kx\, dx, \tag{30.34}$$

$$c_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx.$$

Подставив одновременно (30.32) и (30.34) в (30.33), получим

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{30.35}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad k = \overline{0, n}; \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{30.36}$$

Эти коэффициенты принято называть *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$.

Таким образом, тригонометрический полином порядка n (30.29) имеет минимальное квадратичное отклонение, если его коэффициентами являются коэффициенты Фурье (30.36). Задача допускает обобщение при $n \to \infty$ к ряду Фурье (см. [7]).

31. Операторы в евклидовом пространстве

Среди операторов, действующих в евклидовом пространстве, наибольший интерес вызывают ортогональные и симметричные операторы.

♦ Оператор $\widehat{A}$, действующий в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, называется *изометрическим* (*ортогональным*), если для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ справедливо

$$(\widehat{A}\vec{x}, \widehat{A}\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}). \tag{31.1}$$

Другими словами, он сохраняет метрику пространства.

Теорема 31.1. *В любом ортонормированном базисе $\vec{e}_k$ матрица A ортогонального (изометрического) оператора является ортогональной.*

Доказательство. Действительно, пусть $\vec{e}_k$ — ортонормированный базис. Пусть

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix},$$

A — матрица оператора $\widehat{A}$ в этом базисе. Тогда вектор $\widehat{A}\vec{x}$ имеет координаты AX, а вектор $\widehat{A}\vec{y}$ координаты AY. Но скалярные произведения векторов $\widehat{A}\vec{y}$ и $\widehat{A}\vec{x}$ равны (31.1). С другой стороны,

$$(\widehat{A}\vec{x}, \widehat{A}\vec{y}) = (AX)^{\intercal} AY = X^{\intercal} A^{\intercal} AY = X^{\intercal} Y.$$

В силу произвольности векторов X, Y получим

$$A^{\intercal} A = \mathbb{I},$$

что и требовалось доказать.

♦ Оператор $\widehat{B}$, действующий в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, называется *сопряженным* к линейному оператору $\widehat{A}$, если для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ справедливо

$$(\widehat{B}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \widehat{A}\vec{y}). \tag{31.2}$$

Для обозначения сопряженных операторов используется символ $\widehat{A}^+$.

Свойства сопряженных операторов:

1. $\widehat{E}^+ = \widehat{E}$;
2. $(\widehat{A} + \widehat{B})^+ = \widehat{A}^+ + \widehat{B}^+$;
3. $(\alpha\widehat{A})^+ = \alpha^*\widehat{A}$;
4. $(\widehat{A}^+)^+ = \widehat{A}$;
5. $(\widehat{A}\widehat{B})^+ = \widehat{B}^+\widehat{A}^+$.

Докажем, например, свойства 3 и 5 для произвольных векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$.

3. По определению,

$$(\vec{y}, (\widehat{A}\alpha)^+\vec{x}) = (\alpha\widehat{A}\vec{y}, \vec{x}) = \alpha^*(\widehat{A}\vec{y}, \vec{x}) = \alpha^*(\vec{y}, \widehat{A}^+\vec{x}) = (\vec{y}, \alpha^*\widehat{A}^+\vec{x}).$$

5. По определению,

$$(\vec{y}, (\widehat{A}\widehat{B})^+\vec{x}) = ((\widehat{A}\widehat{B})\vec{y}, \vec{x}) = (\widehat{A}\widehat{B}\vec{y}, \vec{x}) = (\widehat{B}\vec{y}, \widehat{A}^+\vec{x}) = (\vec{y}, \widehat{B}^+\widehat{A}^+\vec{x}).$$

♦ Линейный оператор $\widehat{A}$ называется *самосопряженным*, если

$$\widehat{A}^+ = \widehat{A}. \tag{31.3}$$

Теорема 31.2. *Если оператор $\widehat{A}$ — самосопряженный, то для любого $\vec{x} \in \mathcal{E}$ скалярное произведение $(A\vec{x}, \vec{x})$ есть вещественное число.*

Доказательство. Действительно,

$$(\widehat{A}\vec{x}, \vec{x})^* = (\vec{x}, \widehat{A}\vec{x}) = (\widehat{A}^+\vec{x}, \vec{x}) = (\widehat{A}\vec{x}, \vec{x}),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 31.3. *Собственные значения самосопряженного оператора вещественны.*

Доказательство. Собственные значения оператора $\widehat{A}$ определяются соотношениям $\widehat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Поскольку $\widehat{A}^+ = \widehat{A}$, то

$$(\vec{x}, \widehat{A}\vec{x}) = (\vec{x}, \lambda\vec{x}) = \lambda(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda\|\vec{x}\|^2.$$

Так как $\|\vec{x}\|^2$ и $(\vec{x}, \widehat{A}\vec{x})$ вещественны, то и λ — вещественное число.

Теорема 31.4. *Если $\widehat{A}$ — самосопряженный оператор, то собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть x_1 и $\vec{x}_2$ — собственные векторы оператора $\widehat{A}$, отвечающие различным собственным значениям $\widehat{A}\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1$, $\widehat{A}\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2$. Тогда

$$(\vec{x}_2, \widehat{A}\vec{x}_1) = \lambda_1(\vec{x}_2, \vec{x}_1). \tag{31.4}$$

С другой стороны,

$$(\vec{x}_2, \widehat{A}\vec{x}_1) = (\widehat{A}\vec{x}_2, \vec{x}_1) = (\lambda_2\vec{x}_2, \vec{x}_1) = \lambda_2^*(\vec{x}_2, \vec{x}_1) = \lambda_2(\vec{x}_2, \vec{x}_1). \tag{31.5}$$

Так как $\widehat{A}$ — самосопряженный оператор, то

$$(\vec{x}_2, \widehat{A}\vec{x}_1) = (\vec{x}_1, \widehat{A}\vec{x}_2).$$

Следовательно, вычтя (31.5) из (31.4), получим

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)(\vec{x}_1, \vec{x}_2),$$

откуда следует

$$(\vec{x}_2, \vec{x}_1) = 0.$$

Теорема 31.5. *У каждого самосопряженного оператора $\widehat{A}$, действующего в n-мерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, существует n линейно независимых попарно ортогональных (нормированных) собственных векторов.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы Жордана, поскольку у самосопряженных операторов отсутствуют присоединенные векторы.

Теоретические вопросы

1. Числовые поля. Примеры числовых полей.
2. Матрицы и действия над матрицами. Простейшие операции над матрицами и их свойства.
3. Матрицы и действия над матрицами. Произведение матриц и его свойства. Коммутатор.
4. Перестановки и определители
5. Свойства определителей (доказать четыре свойства исходя из определения определителя).
6. Миноры и алгебраические дополнения.
7. Свойства определителей (доказать четыре свойства методом алгебраических дополнений).
8. Ранг матрицы и его основные свойства. Метод элементарных преобразований. Теорема об элементарных преобразованиях.
9. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы. Теорема об окаймляющих минорах (доказательство двух теорем).
10. Обратная матрица. Метод присоединенных матриц. Свойства обратной матрицы.
11. Обратная матрица. Метод элементарных преобразований. Лемма об элементарных преобразованиях.
12. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли.
13. Системы линейных уравнений. Решение систем методом Крамера.
14. Системы линейных уравнений. Решение систем методом Гаусса–Жордана.
15. Матричные уравнения. Решение систем матричным методом.
16. Свойства решений однородных систем линейных уравнений. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений.
17. Свойства решений неоднородных систем линейных уравнений. Теорема о структуре общего решения неоднородной системы линейных уравнений.
18. Собственные векторы и собственные значения квадратных матриц. Жорданова форма квадратных матриц.
19. Линейные пространства. Базис линейного пространства. Преобразование базиса.
20. Аффинные пространства. Репер линейного пространства. Преобразование репера.
21. Линейные операции над векторами. Простейшие задачи векторной алгебры.
22. Линейная оболочка и её порождающая система.
23. Сумма и произведение линейных пространств, их размерность.
24. Прямая сумма подпространств.
25. Плоскости в аффинном пространстве, направляющие подпространства и параметрические уравнения.
26. Взаимное расположение плоскостей в аффинном пространстве.
27. Системы линейных неравенств и многогранники.
28. Симплексы и барицентрические координаты.
29. Использование аффинных пространств в задачах линейного программирования.
30. Скалярное произведение и евклидова геометрия.
31. Определитель Грама и его геометрический смысл
32. Неравенство Коши–Буняковского в евклидовом пространстве
33. Метод ортогонализации произвольного базиса в евклидовом пространстве
34. Линейная независимость ортогональной системы векторов
35. Взаимно ортогональные подпространства, угол между вектором и подпространством
36. Ортогональная составляющая и ортогональная проекция вектора
37. Расстояние от точки до плоскости
38. Метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений
39. Метод наименьших квадратов в задачах интерполяции функций

Индивидуальные задания

Вариант № 1

1.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 1-ой строки;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(3A)$;
г) составить матрицу B, заменив 2-ой столбец матрицы A линейной комбинацией 1-го и 4-го столбцов с коэффициентами 2 и 10 соответственно;
д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

1.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

1.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 1.1, умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:

а) поменять местами 1-ю и 3-ю строки;
б) к 1-й строке прибавить 2-ю и 3-ю, умноженные на 2 и -1, соответственно.

1.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3, \\ x_1 + 6x_2 + 3x_4 &= -2. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

1.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 - 5x_3 &= 3, \\ -4x_1 + 7x_2 - x_3 &= -8, \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 &= -4. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_1 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

1.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned}&2x_1 - 8x_2 + 3x_3 + x_4 = 0,\\ &x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0,\\ &x_1 - 3x_2 + x_3 = 0,\\ &2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0.\end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

1.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned}&3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2,\\ &9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 5,\\ &x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 1,\\ &x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2.\end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;
б) найти ее общее и какое-либо частное решение;
в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

1.9. Показать, что решение однородной системы из примера 1.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

1.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 1.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

1.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 1.1.

1.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 1.11.

1.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (3,4,-3)$, $\vec{f}_2 = (2,3,-5)$, $\vec{f}_3 = (1,1,1)$, $\vec{x} = (2,1,1)$.
а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

1.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (x_3 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_1), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_1 - x_2, x_3, -x_1).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_1 + \widehat{G}_2\widehat{G}_1)$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 1.13.

1.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & -5\\ -2 & 7\end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

1.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 1.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;
б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

1.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} &4x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 3,\\ &-4x_1 + 7x_2 - x_3 = -8,\\ &-4x_1 + 7x_2 - x_3 = -7. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 2

2.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 5\\ 2 & 2 & -3 & -4\\ 4 & 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 4-го столбца;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(-2A)$;
г) составить матрицу B, заменив 4-ый столбец матрицы A линейной комбинацией 2-го и 3-го столбцов с коэффициентами 3 и -4 соответственно;
д) вычислить $\det D$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

2.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 2 & 4\\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3\\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0\\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\intercal} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\intercal}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

2.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3\\ 2 & 3 & -5\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 14 & -5 & 0\\ 2 & -7 & -4\\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 2.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 2-ю и 3-ю строки;
б) к 1-й строке прибавить 2-ю и 4-ю, умноженные на 2 и 3, соответственно.

2.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2,\\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4,\\ &2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 15,\\ &4x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 11. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;

в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

2.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= -3, \\ x_3 &= 1. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_1 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

2.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 8x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;

б) найти ее фундаментальную систему решений;

в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

2.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 &= 3, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 &= -1. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;

б) найти ее общее и какое-либо частное решение;

в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

2.9. Показать, что решение однородной системы из примера 2.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

2.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 2.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

2.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 2.1.

2.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 2.11.

2.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (2,1,2)$, $\vec{f}_2 = (3,2,5)$, $\vec{f}_3 = (4,0,0)$, $\vec{x} = (10,1,-3)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

2.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (-x_3 - 5x_2, -4x_3 + 5x_1, 4x_2 + x_1), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (-x_1, x_1 + x_3, x_2).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $\widehat{G}_1\widehat{G}_2$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 2.10.

2.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 2.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

2.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= -3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 3

3.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 1-ой строки;

б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;

в) вычислить $\det(A/3)$;

г) составить матрицу B, заменив 3-ю строку матрицы A линейной комбинацией 1-й и 4-й строк с коэффициентами 3 и 2, соответственно;

д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;

е) вычислить $\det A^{-1}$.

3.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

3.3. Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 3.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:

а) поменять местами 1-ю и 2-ю строки;
б) ко 2-й строке прибавить 2-ю и 3-ю, умноженные на 2 и -1, соответственно.

3.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned}&x_1 - x_2 + x_3 = 2,\\ &x_2 + x_3 - x_4 = 0,\\ &3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2,\\ &3x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = 0.\end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_4 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

3.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned}&x_1 + x_2 + x_3 = 1,\\ &2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4,\\ &2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1.\end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

3.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned}&2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0,\\ &5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0,\\ &9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0.\end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

3.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned}&2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1,\\ &3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2,\\ &3x_1 - 4x_2 + 3x_4 + 5x_4 + 7x_5 = 1.\end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;
б) найти ее общее и какое-либо частное решение;
в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

3.9. Показать, что решение однородной системы из примера 3.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

3.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 3.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

3.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 3.1.

3.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 3.11.

3.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f_1} = (3,-2,1)$, $\vec{f_2} = (-1,1,-2)$, $\vec{f_3} = (2,1,-3)$, $\vec{x} = (11,-6,5)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f_i}\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e_i}\}$ к базису $\{\vec{f_i}\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f_i}\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e_i}\}$ и $\{\vec{f_i}\}$.

3.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (-x_3 + 3x_2, -2x_3 - 3x_1, 2x_2 + x_1), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (2x_1, x_1 + x_2, -x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e_i}\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_1 - \widehat{G}_1\widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f_i}\}$ из предыдущей задачи 3.13.

3.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 3.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

3.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 4

4.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & 2 & 2 \\ 8 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 2-го столбца;

б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;

в) вычислить $\det(3A)$;

г) составить матрицу B, заменив 2-ой столбец матрицы A линейной комбинацией 4-го и 3-го столбцов с коэффициентами 2 и $1/2$, соответственно;

д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;

е) вычислить $\det A^{-1}$.

4.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

4.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

4.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из 4.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 1-ю и 2-ю строки;
б) ко 2-й строке прибавить 2-ю и 3-ю, умноженные на 2 и -1, соответственно.

4.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -14, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -14, \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -1, \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 &= -7. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

4.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_3 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

4.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 3x_5 &= 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

4.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 5, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 + 7x_4 &= 1. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;

б) найти ее общее и какое-либо частное решение;

в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

4.9. Показать, что решение однородной системы из примера 4.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

4.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 4.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

4.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\{\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 4.1.

4.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 4.12.

4.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (1,-1,1)$, $\vec{f}_2 = (-1,4,3)$, $\vec{f}_3 = (8,1,-1)$, $\vec{x} = (8,4,1)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

4.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (-x_2 - 2x_3, x_1 + x_3, 2x_1 - x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_3, 2x_2 - x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_1 - \widehat{G}_2\widehat{G}_1)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 4.13.

4.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 4.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

4.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ &2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ &2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 5

5.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 1-го столбца;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(-0{,}5A)$;
г) составить матрицу B, заменив 2-ой столбец матрицы A линейной комбинацией 1-го и 4-го столбцов с коэффициентами 3 и -2, соответственно;
д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

5.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

5.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 5.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 2-ю и 4-ю строки;
б) к 3-й строке прибавить 2-ю и 1-ю, умноженные на 1,5 и -1, соответственно.

5.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 5x_3 - 6x_4 &= 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &= 5, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

5.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

5.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 &= 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;

б) найти ее фундаментальную систему решений;

в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

5.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned}
&x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0,\\
&4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3,\\
&2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1,\\
&3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2.
\end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;

б) найти ее общее и какое-либо частное решение;

в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

5.9. Показать, что решение однородной системы из примера 5.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

5.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 5.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

5.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 5.1.

5.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 5.11.

5.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (3,1,2)$, $\vec{f}_2 = (2,0,3)$, $\vec{f}_3 = (1,0,2)$, $\vec{x} = (3,5,-6)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

5.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (4x_3 + 2x_2, -x_3 - 2x_1, x_2 - 4x_1), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (2x_3, -x_2, x_1).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_1\widehat{G}_2 - \widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 5.13.

5.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

5.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 5.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

5.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned}
&2x_1 - x_2 + x_3 = 0,\\
&3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3,\\
&3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4.
\end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 6

6.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 7 & 1\\ 2 & 2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 1-ой строки;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(-0{,}1A)$;
г) составить матрицу B, заменив 4-ю строку матрицы A линейной комбинацией 1-й и 3-й строк с коэффициентами 4 и 2, соответственно;
д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

6.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -2\\ 0 & 2\\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 2\\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2\\ 1 & 0{,}1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

6.3. Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4\\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

6.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 6.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 3-ю и 4-ю строки;
б) к 3-й строке прибавить 2-ю и 4-ю, умноженные на $-1{,}5$ и 1, соответственно.

6.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + 3x_4 = 0,\\
&x_1 + x_2 - 7x_3 - x_4 = -3,\\
&2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 6,\\
&2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0.
\end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_4 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

6.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_3 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

6.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ &2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ &x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ &-x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

6.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -3, \\ &3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -3, \\ &-x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ &-x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;
б) найти ее общее и какое-либо частное решение;
в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6.9. Показать, что решение однородной системы из примера 6.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

6.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 6.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

6.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 6.1.

6.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 6.10.

6.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (3,2,1)$, $\vec{f}_2 = (2,3,1)$, $\vec{f}_3 = (-1,-3,-1)$, $\vec{x} = (2,1,1)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

6.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (-2x_2 - 2x_3, 2x_1 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_3 - x_1, x_2 - x_1, x_1).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2 - \widehat{G}_1\widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 6.13.

6.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

6.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 6.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

6.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ x_2 + x_3 &= 2, \\ x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 7

7.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 3-й строки;

б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;

в) вычислить $\det(\pi A)$;

г) составить матрицу B, заменив 2-ю строку матрицы A линейной комбинацией 3-й и 4-й строк с коэффициентами 1 и 1,5, соответственно;

д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;

е) вычислить $\det A^{-1}$.

7.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

7.3. Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

7.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 7.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:

а) поменять местами 1-ю и 2-ю, 3-ю и 4-ю строки;
б) к 3-й строке прибавить 1-ю, умноженную на 4.

7.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 3x_4 = 5, \\ &4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ &3x_1 - 4x_3 + x_4 = -2, \\ &x_1 + x_2 + 3x_4 = 10. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_4 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

7.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7, \\ x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_1 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

7.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ &2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ &x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

7.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ &-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -2, \\ &3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = -1. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;
б) найти ее общее и какое-либо частное решение;
в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

7.9. Показать, что решение однородной системы из примера 7.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

7.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 7.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

7.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 7.1.

7.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 7.11.

7.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f_1} = (4,2,-1)$, $\vec{f_2} = (5,3,-2)$, $\vec{f_3} = (3,2,-1)$, $\vec{x} = (4,3,-2)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

7.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (-3x_3 - 5x_2, -2x_3 + 5x_1, 2x_2 + 3x_1),$$
$$\widehat{G}_2\vec{x} = (4x_1 - 6x_2 + 10x_3, -6x_1 + 9x_2 - 15x_3, 10x_1 - 15x_2 + 25x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_1\widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 7.13.

7.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

7.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 7.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

7.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 8

8.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 1-го столбца;

б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;

в) вычислить $\det(4A)$;

г) составить матрицу B, заменив 2-й столбец матрицы A линейной комбинацией 1-го и 3-го столбцов с коэффициентами -1 и 2, соответственно;

д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;

е) вычислить $\det A^{-1}$.

8.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

8.3. Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 8.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 1-ю и 3-ю, 2-ю и 4-ю строки;
б) ко 2-й строке прибавить 3-ю и 4-ю, умноженные на 2 и 2, соответственно.

8.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 &= 10, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 6x_4 &= 12, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

8.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_3 &= 2, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 &= -3. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

8.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

8.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= 2, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;

б) найти ее общее и какое-либо частное решение;

в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

8.9. Показать, что решение однородной системы из примера 8.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

8.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 8.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

8.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 8.1.

8.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 8.11.

8.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (1, -1, -1)$, $\vec{f}_2 = (1, 1, -1)$, $\vec{f}_3 = (1, 1, 1)$, $\vec{x} = (2, 3, 1)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

8.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (8x_3 - 2x_2, 4x_3 + 2x_1, -4x_2 - 8x_1), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_2, x_1 + x_3, x_1).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2 + \widehat{G}_1\widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 8.13.

8.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

8.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 8.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

8.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_3 &= 2, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 9

9.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 4-ой строки;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(2A^{\mathsf{T}})$;
г) составить матрицу B, заменив 4-й столбец матрицы A линейной комбинацией 2-го и 3-го столбцов с коэффициентами -3 и 2, соответственно;
д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

9.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

9.3. Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 9.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 2-ю и 3-ю, 1-ю и 4-ю строки;
б) к 1-й строке прибавить 2-ю и 4-ю, умноженные на 3 и -2, соответственно.

9.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ &4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ &-3x_1 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ &x_1 + x_2 + 3x_4 = 5. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

9.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 2, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

9.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} &2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ &x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ &4x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ &2x_1 - 10x_2 + 6x_3 - 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;

б) найти ее фундаментальную систему решений;

в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

9.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 2,\\
&2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 = 5,\\
&x_1 - x_2 - x_3 - 2x_5 = 0.
\end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;

б) найти ее общее и какое-либо частное решение;

в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

9.9. Показать, что решение однородной системы из примера 9.6 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

9.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 9.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

9.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из 9.1.

9.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 9.12.

9.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (3,-1,2)$, $\vec{f}_2 = (1,2,4)$, $\vec{f}_3 = (-3,1,-1)$, $\vec{x} = (2,4,9)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

9.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (7x_2 + 2x_3, -7x_1 + 5x_3, -2x_1 - 5x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_1 + x_3, -x_2, x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $\widehat{G}_2\widehat{G}_1$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 9.13.

9.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

9.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 9.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

9.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= -1,\\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 2,\\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 10

10.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2\\ 1 & 3 & 0 & -4\\ 2 & 5 & 2 & -4\\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 2-ой строки;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(10A)$;
г) составить матрицу B, заменив 2-й столбец матрицы A линейной комбинацией 1-го и 4-го столбцов с коэффициентами 2 и 4, соответственно;
д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

10.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4\\ 0 & 1\\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0\\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A+B, \quad 2A^{\mathsf{T}}+C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

10.3. Решить матричное уравнение

$$X\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7\\ 0 & 2 & 8\\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

10.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 10.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 1-ю и 4-ю, 2-ю и 3-ю строки;
б) к 4-й строке прибавить 1-ю и 3-ю, умноженные на 3 и -1, соответственно.

10.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0,\\ &x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 7,\\ &2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 11,\\ &x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

10.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 1, \\ 2x_2 + 8x_3 &= 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 3. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

10.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ &x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0, \\ &-2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0, \\ &x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

10.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 30, \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ &5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 7x_5 = -11. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;
б) найти ее общее и какое-либо частное решение;
в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

10.9. Показать, что решение однородной системы из примера 10.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

10.11. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 10.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

10.12. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 10.1.

10.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 10.11.

10.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (2,1,0)$, $\vec{f}_2 = (2,-1,2)$, $\vec{f}_3 = (2,2,-1)$, $\vec{x} = (3,7,-7)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

10.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (x_1 + 2x_2, x_3, -x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 4x_2 - 2x_3, -x_1 - 2x_2 + x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_2$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2 + \widehat{G}_2\widehat{G}_1)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 10.13.

10.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

10.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 10.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

10.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 1, \\ 2x_2 + 8x_3 &= 6, \\ 2x_2 + 8x_3 &= 7. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 11

11.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 3-го столбца;

б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;

в) вычислить $\det(4A)$;

г) составить матрицу B, заменив 4-ю строку матрицы A линейной комбинацией 1-й и 2-й строк с коэффициентами 1,5 и 3, соответственно;

д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;

е) вычислить $\det A^{-1}$.

11.2. Даны матрицы

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

11.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

11.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 11.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:

а) поменять местами 3-ю и 4-ю, 1-ю и 2-ю строки;
б) ко 2-й строке прибавить 4-ю, умноженную на 5.

11.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned}&x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4,\\&3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2,\\&3x_1 + x_2 - x_3 = 2,\\&4x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 14.\end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

11.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 2,\\x_1 - x_2 + x_3 &= 0,\\-x_1 + x_2 + x_3 &= 2.\end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_1 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

11.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned}&x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0,\\&2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0,\\&3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0,\\&x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0.\end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

11.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned}&4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1,\\&2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1,\\&2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1,\\&x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1.\end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;
б) найти ее общее и какое-либо частное решение;
в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

11.9. Показать, что решение однородной системы из примера 11.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

11.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 11.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

11.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из 11.1.

11.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 11.11.

11.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (2,-1,2)$, $\vec{f}_2 = (-6,7,7)$, $\vec{f}_3 = (1,1,-1)$, $\vec{x} = (4,0,1)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f_i}\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e_i}\}$ к базису $\{\vec{f_i}\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f_i}\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e_i}\}$ и $\{\vec{f_i}\}$.

11.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (x_2 - 3x_3, -x_1 + 4x_3, 3x_1 - 4x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (2x_1, -x_3, x_2).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_2$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e_i}\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2\widehat{G}_1 + \widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f_i}\}$ из предыдущей задачи 11.13.

11.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad G_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

11.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 11.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

11.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 12

12.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 2-ой строки;

б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;

в) вычислить $\det(5A)$;

г) составить матрицу B, заменив 3-й столбец матрицы A линейной комбинацией 2-го и 4-го столбцов с коэффициентами -2 и 2, соответственно;

д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;

е) вычислить $\det A^{-1}$.

12.2. Даны матрицы

$$A^{\mathsf T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}, \quad C^{\mathsf T} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf T} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf T}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

12.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

12.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 12.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 2-ю и 4-ю строки;
б) к 1-й строке прибавить 2-ю и 3-ю, умноженные на 2 и 3, соответственно.

12.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 2, \\ &2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ &3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -1, \\ &x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -4. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

12.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_1 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

12.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ &3x_1 - x_2 + 5x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ &x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

12.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ &x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ &5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;

б) найти ее общее и какое-либо частное решение;

в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

12.9. Показать, что решение однородной системы из примера 12.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

12.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 12.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

12.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 12.1.

12.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 12.11.

12.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (-7,3,7)$, $\vec{f}_2 = (-1,2,2)$, $\vec{f}_3 = (0,2,1)$, $\vec{x} = (-6,-1,4)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

12.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (4x_2 - 3x_3, -4x_1 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_3, -x_2, x_1 + x_2).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_2$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_1\widehat{G}_2 + \widehat{G}_1)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 12.13.

12.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

12.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 12.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

12.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 13

13.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 4-го столбца;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(A/4)$;
г) составить матрицу B, заменив 4-й столбец матрицы A линейной комбинацией 2-го и 4-го столбцов с коэффициентами 2 и 3, соответственно;
д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

13.2. Даны матрицы

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

13.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 0 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

13.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 13.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 3-ю и 4-ю строки;
б) ко 2-й строке прибавить 1-ю и 4-ю, умноженные на 2 и 4, соответственно.

13.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ &3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ &x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ &3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_4 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

13.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 &= 2, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_1 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

13.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ &x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ &3x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 0, \\ &2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;

б) найти ее фундаментальную систему решений;

в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

13.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 2, \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 2, \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_5 &= -2. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;

б) найти ее общее и какое-либо частное решение;

в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

13.9. Показать, что решение однородной системы из примера 13.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

13.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из задачи 13.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

13.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 13.1.

13.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 13.11.

13.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (4,1,-2)$, $\vec{f}_2 = (5,2,-3)$, $\vec{f}_3 = (2,3,-4)$, $\vec{x} = (-2,2,-2)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

13.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (9x_1 - 12x_2 + 3x_3, -12x_1 + 16x_2 - 4x_3, 3x_1 - 4x_2 + x_3), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (-x_2, x_3 - x_1, 2x_1).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2\widehat{G}_1 - \widehat{G}_1)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 13.13.

13.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

13.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 13.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

13.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{gathered} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 3. \end{gathered}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 14

14.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 3-й строки;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(2A/3)$;
г) составить матрицу B, заменив 4-ю строку матрицы A линейной комбинацией 1-й и 3-й строк с коэффициентами 4 и 2, соответственно;
д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

14.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

14.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

14.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 14.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 2-ю и 4-ю строки;
б) к 3-й строке прибавить 2-ю и 1-ю, умноженные на 1,5 и -1, соответственно.

14.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ &3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ &4x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ &x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

14.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -1. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

14.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ &4x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ &2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 14x_4 + x_5 = 0, \\ &10x_1 + 3x_2 + 15x_3 - 7x_4 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

14.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 7x_5 = -3, \\ &2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 13x_5 = -5, \\ &x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 = -1. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;
б) найти ее общее и какое-либо частное решение;
в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

14.9. Показать, что решение однородной системы из примера 14.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

14.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 14.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

14.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 14.1.

14.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 14.11.

14.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (1,2,3)$, $\vec{f}_2 = (1,1,-2)$, $\vec{f}_3 = (3,5,3)$, $\vec{x} = (-8,-12,-2)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

14.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\begin{aligned} &\widehat{G}_1\vec{x} = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_1), \\ &\widehat{G}_2\vec{x} = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + 4x_3). \end{aligned}$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $\widehat{G}_2\widehat{G}_1$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 14.13.

14.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 14.5. Найти:
а) расстояние от этой плоскости до начала координат;
б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

14.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 15

15.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -11 & 12 & 14 \\ 8 & -17 & 21 & 35 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 2-ой строки;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(3A/4)$;
г) составить матрицу B, заменив 1-й столбец матрицы A линейной комбинацией 3-го и 4-го столбцов с коэффициентами -3 и 1,5, соответственно;
д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

15.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

15.3. Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

15.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 15.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:

а) поменять местами 3-ю и 4-ю строки;
б) к 3-й строке прибавить 2-ю и 4-ю, умноженные на $-1{,}5$ и 1, соответственно.

15.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned}
&x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4,\\
&3x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 9,\\
&5x_1 - 11x_2 + 12x_3 + 14x_4 = 13,\\
&x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -2.
\end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

15.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 3,\\
x_2 + 2x_3 &= 1,\\
x_1 + 4x_3 &= 1.
\end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_3 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

15.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned}
&x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0,\\
&2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0,\\
&x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 0.
\end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

15.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned}
&2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1,\\
&-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -2,\\
&3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = -1.
\end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;
б) найти ее общее и какое-либо частное решение;
в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

15.9. Показать, что решение однородной системы из примера 15.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

15.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 15.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

15.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 15.1.

15.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 15.11.

15.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (3,2,-4)$, $\vec{f}_2 = (4,-1,-2)$, $\vec{f}_3 = (5,2,-3)$, $\vec{x} = (9,5,-8)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

15.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (2x_3 + x_2, -x_3 - x_1, x_2 - 2x_1), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (2x_3, x_1, x_2 + x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2 + \widehat{G}_2\widehat{G}_1)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 15.13.

15.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

15.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 15.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

15.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 3, \\ x_2 + 2x_3 &= 1, \\ x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 16

16.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & 4 & -1 & -4 \\ 4 & 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 4-го столбца;

б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;

в) вычислить $\det(5A)$;

г) составить матрицу B, заменив 4-й столбец матрицы A линейной комбинацией 2-го и 4-го столбцов с коэффициентами 2 и 4, соответственно;

д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;

е) вычислить $\det A^{-1}$.

16.2. Даны матрицы

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

16.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

16.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 16.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 1-ю и 2-ю, 3-ю и 4-ю строки;
б) к 3-й строке прибавить 1-ю, умноженную на 4.

16.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ &2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 3, \\ &3x_1 + 4x_2 - x_3 - 4x_4 = 7, \\ &4x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 11. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

16.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ &2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ &-x_1 - 3x_2 - x_3 = 2. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_1 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

16.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} &3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ &x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ &2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

16.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -3, \\ &3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -3, \\ &-x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ &-x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;

б) найти ее общее и какое-либо частное решение;

в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

16.9. Показать, что решение однородной системы из примера 16.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

16.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 16.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

16.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 16.1.

16.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 16.11.

16.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1=(3,5,3)$, $\vec{f}_2=(2,0,3)$, $\vec{f}_3=(0,1,-1)$, $\vec{x}=(-14,-7,-13)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

16.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x}=(-3x_2+2x_3, 3x_1+4x_3, -2x_1-4x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x}=(x_3, 2x_1, x_1+x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_2$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $\widehat{G}_2\widehat{G}_1$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 16.13.

16.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1=\begin{pmatrix} 4 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}, \qquad G_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3\\ 10 & -3 & -8\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

16.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 16.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

16.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3&=5,\\ 2x_1+2x_2+x_3&=5,\\ 2x_1+2x_2+x_3&=6. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 17

17.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 4-ой строки;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(A/4)$;
г) составить матрицу B, заменив 2-й столбец матрицы A линейной комбинацией 3-го и 4-го столбцов с коэффициентами 2 и 5, соответственно;
д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

17.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

17.3. Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

17.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 17.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 1-ю и 3-ю, 2-ю и 4-ю строки;
б) ко 2-й строке прибавить 3-ю и 4-ю, умноженные на 2 и 2, соответственно.

17.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ &2x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 4, \\ &x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ &x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 2. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_3 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

17.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_3 &= -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_1 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

17.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} &3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ &2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;

б) найти ее фундаментальную систему решений;

в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

17.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$x_1 + x_2 - 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 4,$$
$$x_1 - 3x_2 + x_4 - 5x_5 = 6,$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0.$$

а) Доказать, что система совместна;

б) найти ее общее и какое-либо частное решение;

в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

17.9. Показать, что решение однородной системы из примера 17.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

17.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 17.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

17.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 17.1.

17.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 17.11.

17.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (4,-5,-3)$, $\vec{f}_2 = (1,-1,-1)$, $\vec{f}_3 = (-1,1,2)$, $\vec{x} = (2,-1,-1)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

17.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (-x_2 - 7x_3, x_1 + 4x_3, 7x_1 - 4x_2),$$
$$\widehat{G}_2\vec{x} = (16x_1 + 28x_2 - 4x_3, 28x_1 + 49x_2 - 7x_3, -4x_1 - 7x_2 + x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_2$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_1 + \widehat{G}_1\widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 17.13.

17.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

17.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 17.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

17.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_3 &= -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 18

18.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 1-ой строки;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(7A)$;
г) составить матрицу B, заменив 4-й столбец матрицы A линейной комбинацией 2-го и 3-го столбцов с коэффициентами 2 и 4, соответственно;
д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

18.2. Даны матрицы

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

18.3. Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

18.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 18.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 2-ю и 3-ю, 1-ю и 4-ю строки;
б) к 1-й строке прибавить 2-ю и 4-ю, умноженные на 3 и -2, соответственно.

18.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &2x_1 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ &x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 7, \\ &x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 5, \\ &x_2 - 3x_3 - x_4 = -6. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

18.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1,\\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 2,\\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

18.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0,\\ &x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 0,\\ &x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 18x_5 = 0,\\ &2x_1 + 14x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 24x_5 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

18.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -3,\\ &x_1 - x_2 - x_4 - x_5 = 0,\\ &3x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 - 4x_5 = -3,\\ &x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = -3. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;
б) найти ее общее и какое-либо частное решение;
в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

18.9. Показать, что решение однородной системы из примера 18.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

18.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 18.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

18.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 18.1.

18.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 18.11.

18.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (1,2,3)$, $\vec{f}_2 = (2,3,1)$, $\vec{f}_3 = (1,1,-3)$, $\vec{x} = (2,4,1)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

18.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (x_3 - x_2, -2x_3 + x_1, 2x_2 - x_1), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_1 - \widehat{G}_1\widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 18.13.

18.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

18.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 18.5. Найти:
а) расстояние от этой плоскости до начала координат;
б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

18.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 19

19.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 3-ой строки;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(2A)$;
г) составить матрицу B, заменив 3-ю строку матрицы A линейной комбинацией 1-й и 4-й строк с коэффициентами 1 и -2, соответственно;
д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

19.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

19.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

19.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 19.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:

а) поменять местами 1-ю и 4-ю, 2-ю и 3-ю строки;
б) к 4-й строке прибавить 1-ю и 3-ю, умноженные на 3 и -1, соответственно.

19.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= -3,\\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 &= 2,\\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1,\\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 14x_4 &= -10. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

19.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 - 5x_3 &= 3,\\ -4x_1 + 7x_2 - x_3 &= -8,\\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 &= -4. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_1 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

19.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0,\\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0,\\ 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 &= 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

19.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= 3,\\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 4,\\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 5,\\ x_1 - x_2 - 6x_3 + 7x_4 &= 1. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;
б) найти ее общее и какое-либо частное решение;
в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

19.9. Показать, что решение однородной системы из примера 19.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

19.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 19.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

19.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 19.1.

19.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 19.11.

19.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (1,-1,-1)$, $\vec{f}_2 = (1,1,-1)$, $\vec{f}_3 = (1,1,1)$, $\vec{x} = (2,3,1)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

19.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (8x_3 - 2x_2, 4x_3 + 2x_1, -4x_2 - 8x_1), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_2, x_1 + x_3, x_1).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2 + \widehat{G}_1\widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 19.13.

19.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

19.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 19.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

19.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 - 5x_3 &= 3, \\ -4x_1 + 7x_2 - x_3 &= -8, \\ -4x_1 + 7x_2 - x_3 &= -7. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 20

20.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 1-го столбца;

б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;

в) вычислить $\det(2A/3)$;

г) составить матрицу B, заменив 3-й столбец матрицы A линейной комбинацией 1-го и 4-го столбцов с коэффициентами 2 и 2, соответственно;

д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;

е) вычислить $\det A^{-1}$.

20.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^\mathsf{T} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^\mathsf{T}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

20.3. Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

20.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 20.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 3-ю и 4-ю, 1-ю и 2-ю строки;
б) ко 2-й строке прибавить 4-ю, умноженную на 5.

20.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ &2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ &4x_2 + 3x_3 + x_4 = 10, \\ &2x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 12. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

20.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ &2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ &2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

20.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} &2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ &3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ &3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

20.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -3, \\ &3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -3, \\ &-x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ &-x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;

б) найти ее общее и какое-либо частное решение;

в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

20.9. Показать, что решение однородной системы из примера 20.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

20.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 20.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

20.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 20.1.

20.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 20.11.

20.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (2,1,0)$, $\vec{f}_2 = (2,-1,2)$, $\vec{f}_3 = (2,2,-1)$, $\vec{x} = (3,7,-7)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

20.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (x_1 + 2x_2, x_3, -x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 4x_2 - 2x_3, -x_1 - 2x_2 + x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_2$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2 + \widehat{G}_2\widehat{G}_1)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 20.13.

20.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

20.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 20.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

20.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 21

21.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 2-го столбца;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(-1{,}5A)$;
г) составить матрицу B, заменив 3-й столбец матрицы A линейной комбинацией 1-го и 2-го столбцов с коэффициентами (-3) и 2, соответственно;
д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

21.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

21.3. Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

21.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 21.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 2-ю и 4-ю строки;
б) к 1-й строке прибавить 2-ю и 3-ю, умноженные на 2 и 3, соответственно.

21.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ &3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 5, \\ &6x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 7, \\ &x_1 + 2x_3 - x_4 = 3. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

21.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_3 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

21.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;

б) найти ее фундаментальную систему решений;

в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

21.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ &2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 2, \\ &x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 2. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;

б) найти ее общее и какое-либо частное решение;

в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

21.9. Показать, что решение однородной системы из примера 21.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

21.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 21.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

21.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 21.1.

21.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 21.11.

21.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (4,1,-2)$, $\vec{f}_2 = (5,2,-3)$, $\vec{f}_3 = (2,3,-4)$, $\vec{x} = (-2,2,-2)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

21.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (9x_1 - 12x_2 + 3x_3, -12x_1 + 16x_2 - 4x_3, 3x_1 - 4x_2 + x_3), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (-x_2, x_3 - x_1, 2x_1).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2\widehat{G}_1 - \widehat{G}_1)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 21.13.

21.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

21.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 21.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

21.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2,\\ x_2 + x_3 &= 2,\\ x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 22

22.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -4\\ 2 & 5 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 3-й строки;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(-3A)$;
г) составить матрицу B, заменив 4-й столбец матрицы A линейной комбинацией 1-го и 2-го столбцов с коэффициентами -3 и 4, соответственно;
д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

22.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & -1\\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4\\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

22.3. Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3\\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

22.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 22.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 3-ю и 4-ю строки;
б) ко 2-й строке прибавить 1-ю и 4-ю, умноженные на 2 и 4, соответственно.

22.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 - 4x_4 = -5,\\ &2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,\\ &x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2,\\ &x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

22.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_3 &= 2, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 &= -3. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

22.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} &2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ &x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ &4x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ &2x_1 - 10x_2 + 6x_3 - 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

22.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 30, \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ &5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 7x_5 = -11. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;
б) найти ее общее и какое-либо частное решение;
в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

22.9. Показать, что решение однородной системы из примера 22.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

22.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 22.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

22.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 22.1.

22.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 22.11.

22.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (1,2,3)$, $\vec{f}_2 = (1,1,-2)$, $\vec{f}_3 = (3,5,3)$, $\vec{x} = (-8,-12,-2)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

22.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\begin{aligned} &\widehat{G}_1\vec{x} = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_1), \\ &\widehat{G}_2\vec{x} = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + 4x_3). \end{aligned}$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $\widehat{G}_2\widehat{G}_1$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 22.13.

22.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

22.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 22.5. Найти:
а) расстояние от этой плоскости до начала координат;
б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

22.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_3 &= 2, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 23

23.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 3-го столбца;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(-0{,}5A)$;
г) составить матрицу B, заменив 2-ю строку матрицы A линейной комбинацией 3-й и 4-й строк с коэффициентами 3 и 2, соответственно;
д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

23.2. Даны матрицы

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}, \quad C^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

23.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

23.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 23.1, умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:

а) поменять местами 1-ю и 3-ю строки;
б) к 1-й строке прибавить 2-ю и 3-ю, умноженные на 2 и -1, соответственно.

23.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3,\\
&2x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 4,\\
&3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -2,\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3.
\end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_4 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

23.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= 2,\\
x_1 - x_2 + x_3 &= 0,\\
-x_1 + x_2 + x_3 &= 2.
\end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_1 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

23.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned}
&2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0,\\
&x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0,\\
&3x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 0,\\
&2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0.
\end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

23.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7,\\
&x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23,\\
&5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12.
\end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;
б) найти ее общее и какое-либо частное решение;
в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

23.9. Показать, что решение однородной системы из примера 23.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

23.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 23.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

23.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из 23.1.

23.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 23.11.

22.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (1,2,3)$, $\vec{f}_2 = (1,1,-2)$, $\vec{f}_3 = (3,5,3)$, $\vec{x} = (-8,-12,-2)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f_i}\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e_i}\}$ к базису $\{\vec{f_i}\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f_i}\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e_i}\}$ и $\{\vec{f_i}\}$.

23.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (7x_2 + 2x_3, -7x_1 + 5x_3, -2x_1 - 5x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_1 + x_3, -x_2, x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e_i}\}$;

в) указать закон, по которому оператор $\widehat{G}_2\widehat{G}_1$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f_i}\}$ из предыдущей задачи 23.13.

23.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

23.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 23.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

23.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 24

24.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 2-ой строки;

б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;

в) вычислить $\det(-4A)$;

г) составить матрицу B, заменив 1-й столбец матрицы A линейной комбинацией 3-го и 4-го столбцов с коэффициентами -2 и -4, соответственно;

д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;

е) вычислить $\det A^{-1}$.

24.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

23.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

24.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 24.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:

а) поменять местами 2-ю и 3-ю строки;
б) к 1-й строке прибавить 2-ю и 4-ю, умноженные на 2 и 3, соответственно.

24.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 2, \\ &2x_1 + x_2 + 6x_4 = -3, \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1, \\ &3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -4. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_4 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

24.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -1. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_2 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

24.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ &2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ &x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

24.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -3, \\ &3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -3, \\ &-x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ &-x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;

б) найти ее общее и какое-либо частное решение;

в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

24.9. Показать, что решение однородной системы из примера 24.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

24.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 24.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

24.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 24.1.

24.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 24.11.

24.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (1,-1,-1)$, $\vec{f}_2 = (1,1,-1)$, $\vec{f}_3 = (1,1,1)$, $\vec{x} = (2,3,1)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

24.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (8x_3 - 2x_2, 4x_3 + 2x_1, -4x_2 - 8x_1), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_2, x_1 + x_3, x_1).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2 + \widehat{G}_1\widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 24.13.

24.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

24.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 24.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;

б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

24.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Вариант № 25

25.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Вычислить ее определитель $\det A$, разложив его по элементам 1-ой строки;
б) вычислить $\det A$, получив в каком-либо его ряду максимальное число нулей;
в) вычислить $\det(-A/2)$;
г) составить матрицу B, заменив 1-ю строку матрицы A линейной комбинацией 3-й и 4-й строк с коэффициентами $1/2$ и -1, соответственно;
д) вычислить $\det B$ и $\det(AB)$;
е) вычислить $\det A^{-1}$.

25.2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & 0{,}1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Указать, какие из операций:

$$A + B, \quad 2A^{\mathsf{T}} + C, \quad AB, \quad BA, \quad AC, \quad A^{\mathsf{T}}B, \quad B^{-1}C,$$

для них определены, и вычислить их результат.

25.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

25.4. Выписать матрицы S, с помощью которых над матрицей A из задачи 25.1 умножением SA можно провести следующие элементарные преобразования:
а) поменять местами 1-ю и 2-ю строки;
б) ко 2-й строке прибавить 2-ю и 3-ю, умноженные на 2 и -1, соответственно.

25.5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ &2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -1, \\ &x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ &4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение;
б) неизвестное x_1 найти по формулам Крамера;
в) остальные неизвестные найти методом Гаусса.

25.6. Дана система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ &2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ &-x_1 - 3x_2 - x_3 = 2. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом;

б) неизвестное x_1 найти по формулам Крамера и сравнить с полученным выше решением.

25.7. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0, \\ &x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ &x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 18x_5 = 0, \\ &2x_1 + 14x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 24x_5 = 0. \end{aligned}$$

а) Доказать, что система имеет нетривиальные решения;
б) найти ее фундаментальную систему решений;
в) с помощью фундаментальной системы решений записать ее общее и какое-либо частное решение.

25.8. Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= -1,\\
x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 &= 3,\\
x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 3,\\
x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 &= -1.
\end{aligned}$$

а) Доказать, что система совместна;
б) найти ее общее и какое-либо частное решение;
в) записать общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

25.9. Показать, что решение однородной системы из примера 25.7 образует линейное пространство. Указать его размерность и базис, а также размерность и базис его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{\perp}$.

25.10. Найти параметрические уравнения плоскости, являющейся пересечением гиперплоскостей пространства $\mathcal{A}_5$, задаваемых неоднородной системой уравнений из примера 25.8. Указать какую-либо точку из $\mathcal{A}_5$, через которую эта плоскость проходит, а также направляющее подпространство плоскости.

25.11. Найти объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, координаты которых заданы столбцами матрицы A из задачи 25.1.

25.12. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $\vec{x}_1$ на пространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ из задачи 25.11.

25.13. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (3,1,2)$, $\vec{f}_2 = (2,0,3)$, $\vec{f}_3 = (1,0,2)$, $\vec{x} = (3,5,-6)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

25.14. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (4x_3 + 2x_2, -x_3 - 2x_1, x_2 - 4x_1), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (2x_3, -x_2, x_1).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_1\widehat{G}_2 - \widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 25.13.

25.15. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

25.16. Пусть плоскость π_2 задается первыми двумя уравнениями из задачи 25.5. Найти:

а) расстояние от этой плоскости до начала координат;
б) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и являющейся ортогональным дополнением π_2.

25.17. В экспериментах по определению величин $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ из результатов измерений в силу их погрешности получена следующая несовместная система уравнений

$$\begin{gathered}
3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6.
\end{gathered}$$

Методом наименьших квадратов найти приближенные значения искомых величин и надежность их измерений.

Список литературы

1. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* — М.: Наука, 1987.
2. Беклемишев Д.В. *Дополнительные главы линейной алгебры.* — М.: Наука, 1983.
3. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.* — М.: Наука, 1987.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.* — М.: Наука, 1988.
5. Головина Л.И. *Линейная алгебра и некоторые ее приложения.* — М.: Наука, 1979.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. *Высшая математика в упражнениях и задачах.* — М.: Высшая школа, 1980.
7. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов.* Часть IV. *Ряды*: Учебное пособие. — Томск: Изд-во Томск. политехн. ун-та, 2006. — 343 с.
8. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов.* Часть V. *Дифференциальные уравнения*: Учебное пособие. — Томск: Изд-во Томск. политехн. ун-та, 2007. — 396 с.
9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* — М.: Наука, 1984.
10. Кайгородов В.Р. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* — Казань: Изд-во Каз. гос. ун-та, 1985.
11. Каплан И.А. *Практические занятия по высшей математике* (в 3-х т.). — Харьков: Изд-во Хар. гос. ун-та, т. 1., 1965.
12. Кузнецов Л.А. *Сборник индивидуальных заданий по курсу высшей математики.* — М.: Наука, 1964.
13. Минорский В.П. *Сборник задач по высшей математике.* — М.: Наука, 1987.
14. Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре.* — М.: Наука, 1984.
15. Рублев А.Н. *Курс линейной алгебры и аналитической геометрии.* — М.: Наука, 1972.
16. Терехина Л.И., Фикс И.И. *Высшая математика.* Часть 1. *Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия*: Учебное пособие. — Томск, Изд-во Томск. политехн. ун-та, 2002. — 224 с.
17. Фадеев Д.К., Соминский И.С. *Сборник задач по высшей алгебре.* — М.: Наука, 1977.

Учебное издание

ЗАДОРОЖНЫЙ Валерий Николаевич
ЗАЛЬМЕЖ Владимир Феликсович
ТРИФОНОВ Андрей Юрьевич
ШАПОВАЛОВ Александр Васильевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА для технических университетов Часть I. Линейная алгебра

Учебное пособие

Технический редактор *В.Н. Романенко*
Компьютерная верстка *В.Н. Романенко*

Набор и верстка выполнены на компьютерной технике
в издательской системе *TEX – LATEX*
с использованием семейства шрифтов Computer Modern

Подписано к печати . .2010. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать . Усл.печ.л. . Уч.-изд.л. .
Заказ . Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru