Функции нескольких переменных

Дифференциальное исчисление

Понятие и область определения

- <u>Определение</u>: Если каждой паре $(x; y) \in D$ по некоторому закону поставлено в соответствие значение переменной $z \in E$, то переменную z называют функцией двух переменных:

$$z = f(x; y)$$

D – область определения функции

E – область значений функции

$$F(x; y; z) = 0$$

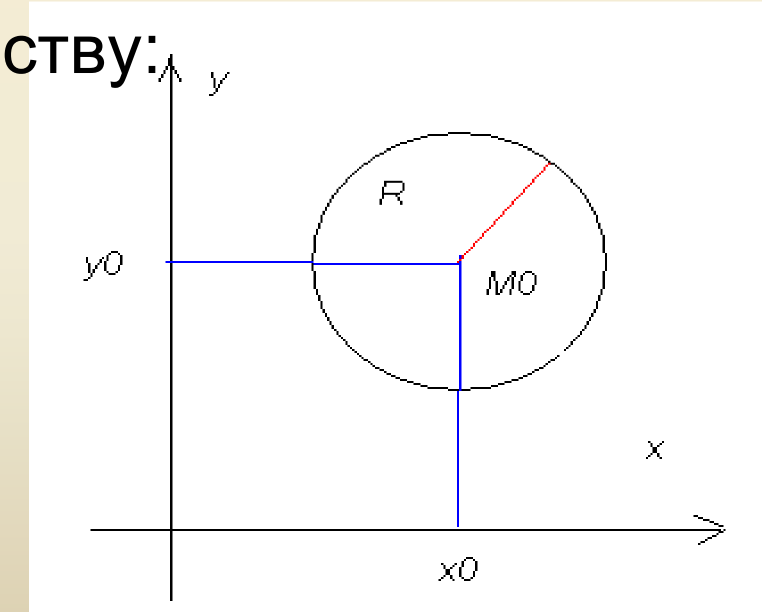
функция 2-х переменных определена неявным образом

Геометрический образ - поверхность

Предел и непрерывность функции 2-х переменных

- <u>Опр.1</u> R-окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$ называется совокупность всех точек с координатами $M_0(x_0; y_0)$, удовлетворяющих неравенству:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \leq R$$



Предел и непрерывность функции 2-х переменных

- <u>Опр.2</u> Число A называется пределом $f(x; y)$ при

$M(x; y) \to M_0(x_0; y_0)$, если для для любого числа ε

существует число $r > 0$, такое что для всех точек $M(x; y)$

будет выполняться неравенство:

$$|M M_0| < r \qquad |f(x; y) - A| < \varepsilon$$

$$\lim f(x; y) = A \text{ при } x \to x_{0,}\ y \to y_0$$

Предел и непрерывность функции 2-х переменных

- Опр.3 Пусть $M_0(x_0; y_0) \in D$, тогда $z = f(x; y)$ называется

непрерывной в точке $M_0(x_0; y_0)$, если:

$\lim f(x; y) = f(x_0; y_0)$ при $x \to x_0$ $y \to y_0$

При этом $M(x; y) \to M_0(x_0; y_0)$ произвольно в области D

Если функция $z = f(x; y)$ непрерывна в каждой точке области D, то она непрерывна во всей области D

Частные производные

$$\lim \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim \frac{f(x+\Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\lim \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x; y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Полное приращение и дифференциал

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

Дифференцирование сложной функции

- z = f (u; v)
- u = u (x; y)
- v= v (x; y)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Дифференцирование сложной функции

- $z = f(x; y)$
- $x = x(t)$
- $y = y(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

- $z = f(x; y)$
- $y = y(x)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Дифференцирование неявной функции

- F (x; y; z) = 0

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x^{|}}{F_z^{|}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y^{|}}{F_z^{|}}$$

Частные производные высших порядков

$$z = f(x; y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}$$

- Теорема

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Дифференциалы высших порядков

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Экстремум функции двух переменных

- Необходимый признак экстремума

$$z = f(x;\, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \infty$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \infty$$

Экстремум функции двух переменных

- Достаточное условие экстремума

$$z = f(x;\, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$