Прямая в пространстве

Аналитическая геометрия

Прямая задана точкой и направляющим вектором. Каноническое уравнение.

$M_0(x_0; y_0; z_0) \in l -$ *заданная точка искомой прямой*

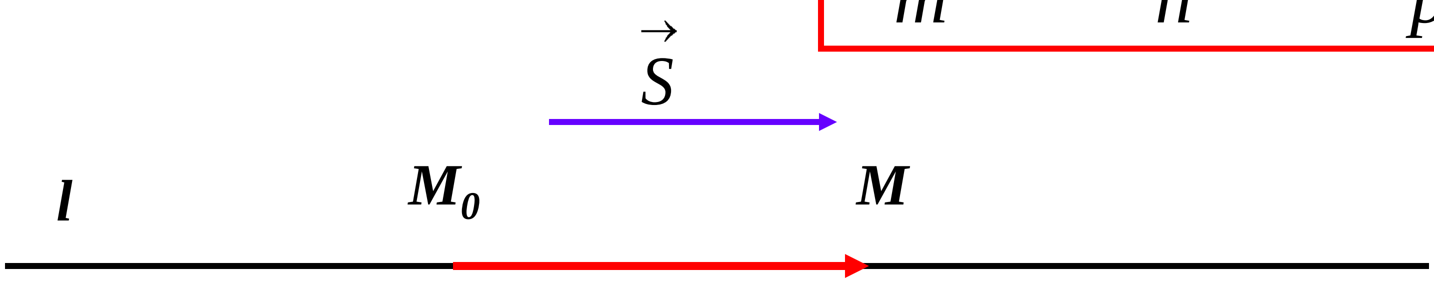
$M(x; y; z) \in l -$ *произвольная точка искомой прямой*

$\vec{S} = \{m; n; p\} -$ *заданный направляющий вектор*

$l -$ *искомая прямая*

$\vec{S} \parallel l$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$



Прямая задана двумя точками

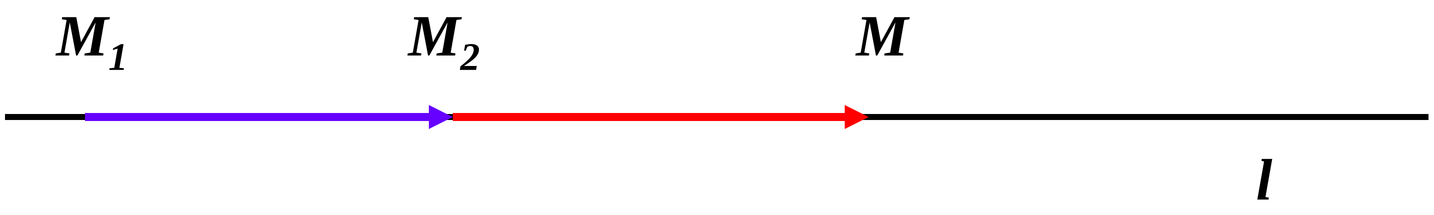
$M_1(x_1; y_1; z_1) \in l$ – *заданная точка искомой прямой*

$M_2(x_2; y_2; z_2) \in l$ – *заданная точка искомой прямой*

$M(x; y; z) \in l$ – *произвольная точка искомой прямой*

l – *искомая прямая*

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

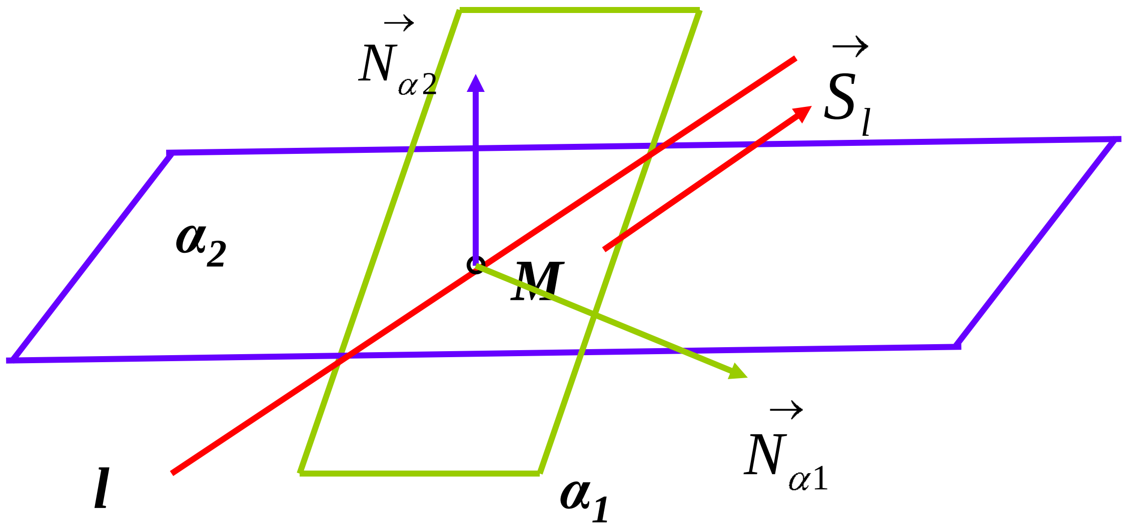


Параметрическое уравнение прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

Прямая задана как линия пересечения 2-х плоскостей.



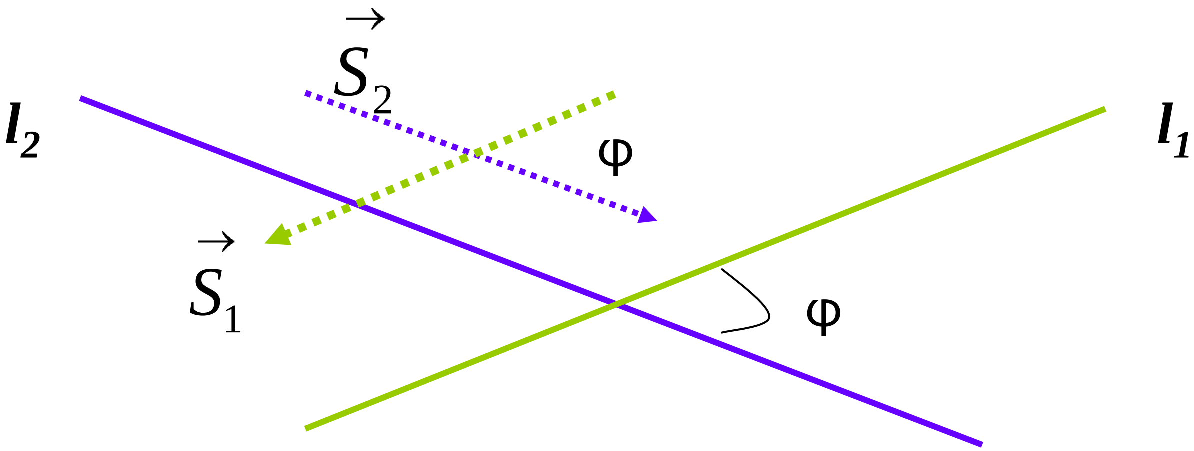
$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$M(x_0; y_0; z_0) \in l$ – *произвольная точка на искомой прямой*

l *искомая прямая*

Нахождение угла при пересечении 2-х прямых.



$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

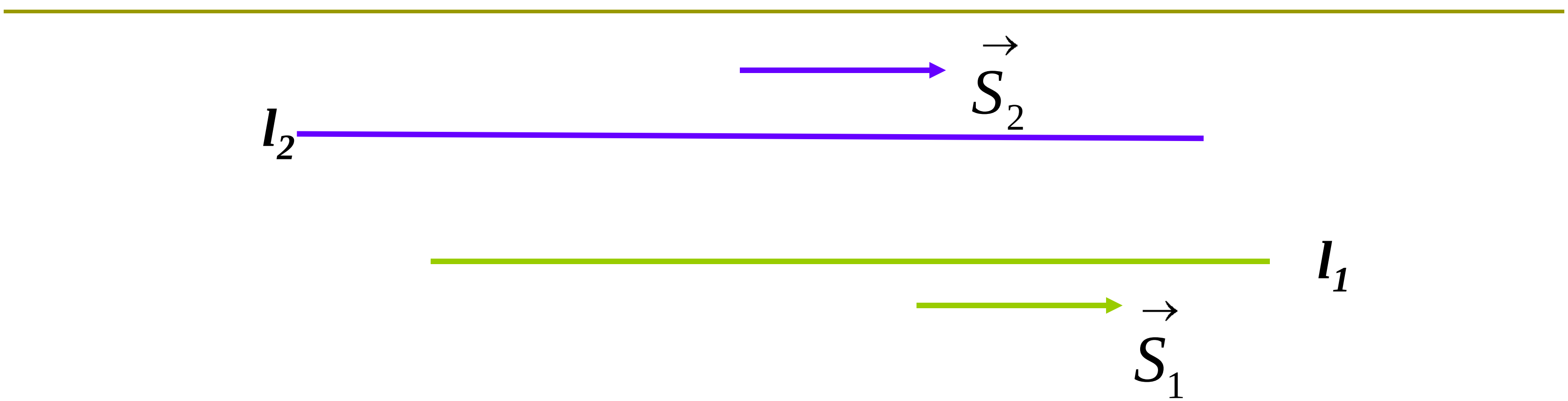
$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}}$$

$\vec{S}_1(m_1; n_1; p_1)$ – *направляющий вектор* l_1

$\vec{S}_2(m_2; n_2; p_2)$ – *направляющий вектор* l_2

Проверка условия параллельности.



$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

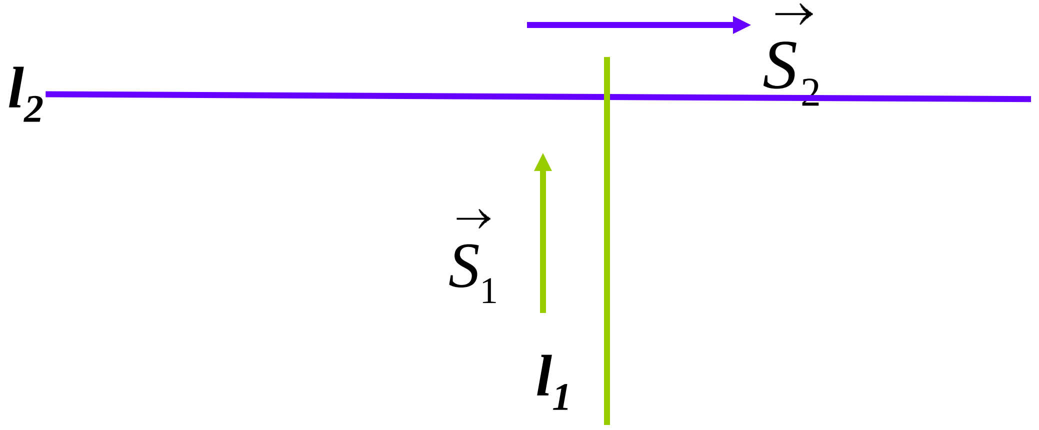
$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

$$\vec{S}_1(m_1; n_1; p_1) - \textit{направляющий вектор } l_1$$

$$\vec{S}_2(m_2; n_2; p_2) - \textit{направляющий вектор } l_2$$

$$\boxed{\vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 : \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}$$

Проверка условия перпендикулярности.



$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

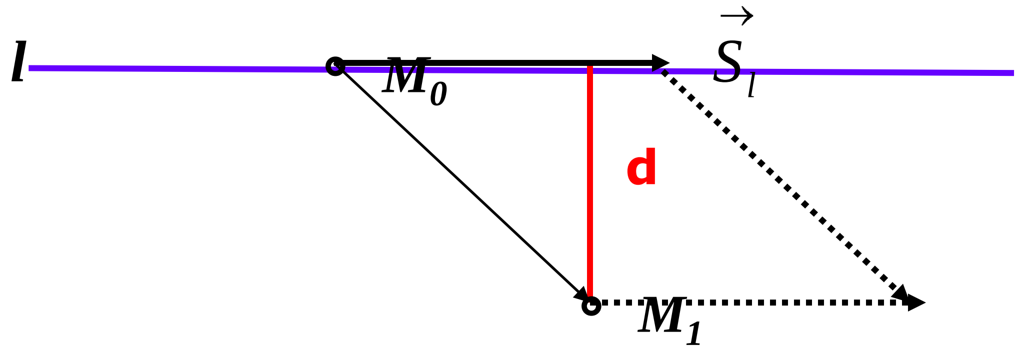
$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

$$\vec{S}_1(m_1; n_1; p_1) - \textit{направляющий вектор } l_1$$

$$\vec{S}_2(m_2; n_2; p_2) - \textit{направляющий вектор } l_2$$

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2 \Rightarrow (\vec{S}_1, \vec{S}_2) = 0 \\ m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0\end{gathered}}$$

Нахождение расстояния от точки до прямой в пространстве.



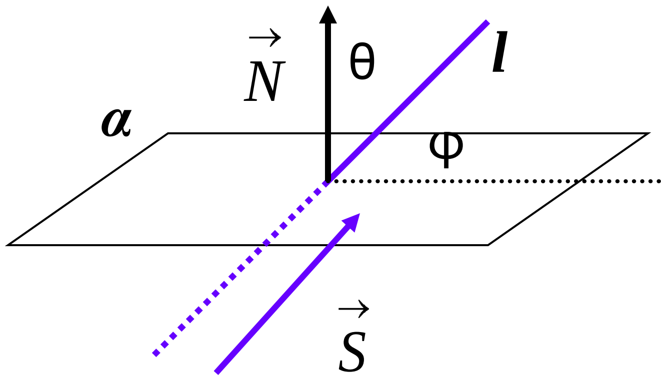
$$l\ :\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}-\text{заданная прямая}$$

$$M_0(x_0;y_0;z_0)\in l-\text{произвольная точка}$$

$$M_1(x_1;y_1;z_1)-\text{заданная точка}$$

$$\boxed{d=\frac{|[\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{S}]|}{|\vec{S}|}}$$

Нахождение угла между прямой и плоскостью.



$$\cos\theta = \frac{(\vec{N}, \vec{S})}{|\vec{N}||\vec{S}|} = \cos(90^0 - \varphi) = \sin\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

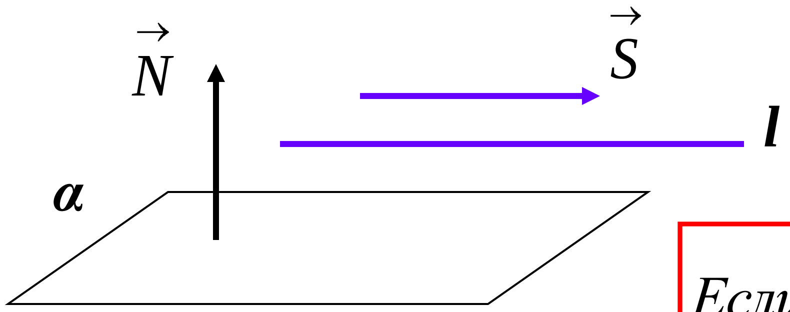
$l: \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ – *заданная прямая*

$\vec{S} = \{m; n; p\}$ – *направляющий вектор прямой*

$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ – *заданная плоскость*

$\vec{N} = \{A; B; C\}$ – *вектор нормали плоскости*

Условие параллельности прямой и плоскости



$$\text{Если } \alpha \parallel l \Rightarrow \vec{N} \perp \vec{S} \Rightarrow (\vec{N}, \vec{S}) = 0$$

$$Am + Bn + Cp = 0$$

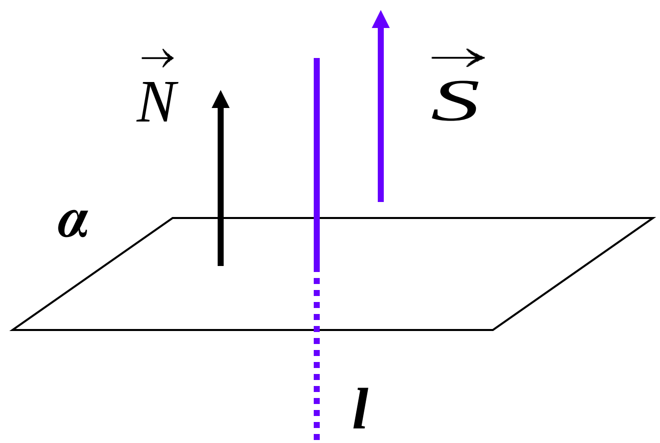
$$l: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} - \text{заданная прямая}$$

$$\vec{S} = \{m; n; p\} - \text{направляющий вектор прямой}$$

$$\alpha : A\,x + B\,y + Cz + D = 0 - \text{заданная плоскость}$$

$$\vec{N} = \{A; B; C\} - \text{вектор нормали плоскости}$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости



$$Если\ \ \alpha \perp l \Rightarrow \vec{N} \parallel \vec{S}$$

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

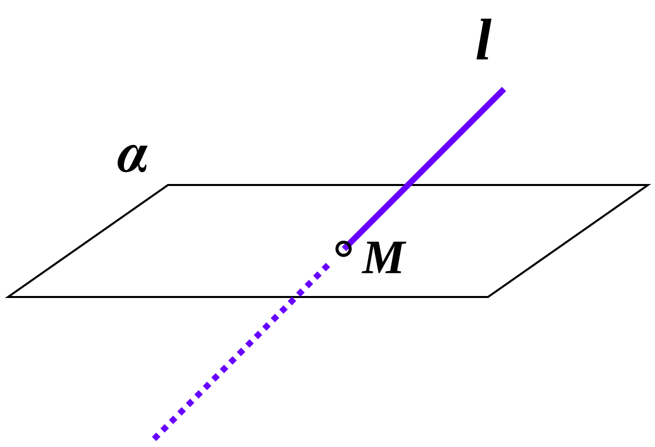
$l: \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ – *заданная прямая*

$\vec{S} = \{m; n; p\}$ – *направляющий вектор прямой*

$\alpha : A\,x + B\,y + Cz + D = 0$ – *заданная плоскость*

$\vec{N} = \{A; B; C\}$ – *вектор нормали плоскости*

Нахождение точки пересечения прямой с плоскостью.



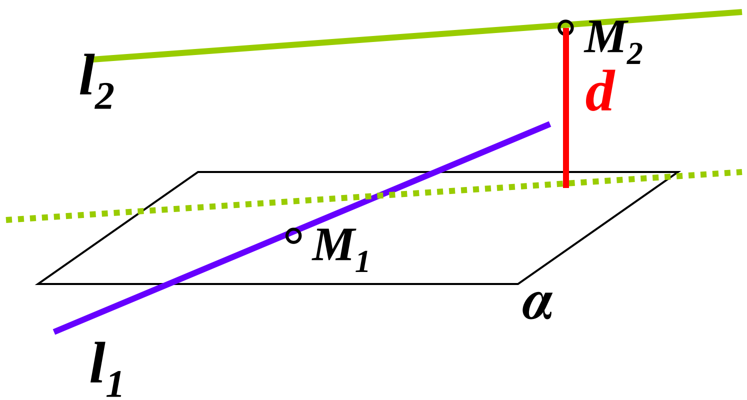
$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p} = t \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

$l: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ – *заданная прямая*

$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ – *заданная плоскость*

$M(x; y; z)$ – *искомая точка*

Расстояние между скрещивающимися прямыми (непересекающимися)



1. Составить уравнение плоскости, проходящей через l_1, параллельно l_2.
2. Найти расстояние от M_2 до найденной плоскости.

$$\vec{S}_1 = \{m_1; n_1; p_1\} \in \alpha$$

$$\vec{S}_2 = \{m_2; n_2; p_2\} \parallel \alpha$$

$$\vec{N}_\alpha = [\vec{S}_{l1} \times \vec{S}_{l2}] \perp \alpha$$

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} - \text{заданная прямая}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \in l_1$$

$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} - \text{заданная прямая}$$

$$M_2(x_2; y_2; z_2) \in l_2$$

$$\boxed{d = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$