

Операции с векторами в координатной форме

Векторная алгебра

Линейные операции

$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow x_1 = x_2; y_1 = y_2; z_1 = z_2$$

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2\}$$

$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} = \{\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\}$$

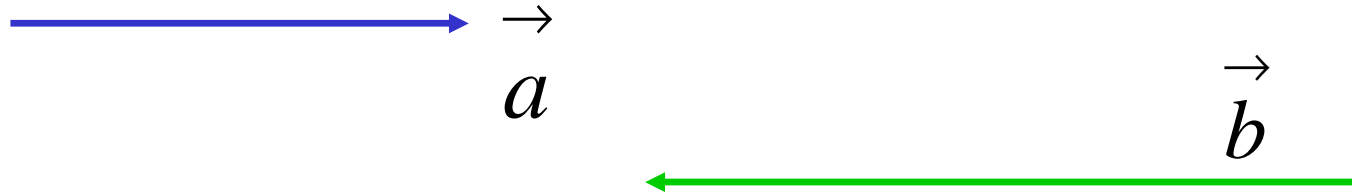
Линейные операции



$$A = \{x_1; y_1; z_1\} \quad B = \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

Условие коллинеарности



$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \implies \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Длина вектора. Расстояние между точками.



$$\vec{a} = \{x ; y ; z\} \quad \left| \vec{a} \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$A(x_1 ; y_1 ; z_1) \quad B(x_2 ; y_2 ; z_2)$$

$$\left| \vec{AB} \right| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Орт вектора.



$$\vec{a} = \{x; y; z\}, \quad |\vec{a}^0| = 1$$

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\}$$

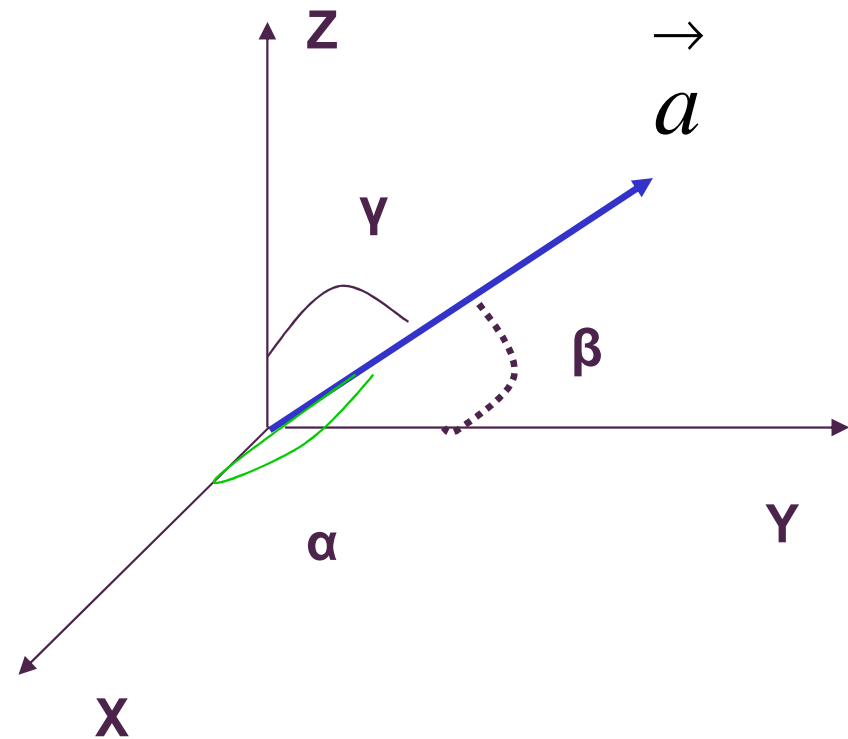
Направляющие косинусы.

$$\vec{a} = \{x ; y ; z\}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

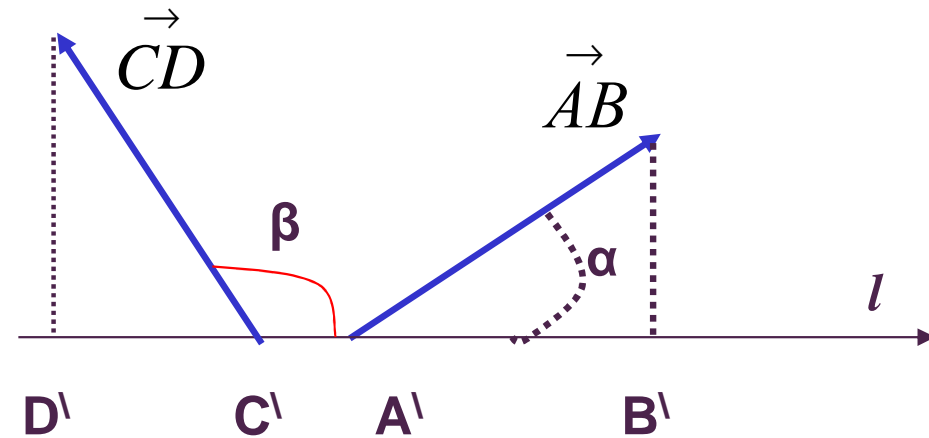
$$\cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



Проекция вектора на ось.

Проекцией вектора на ось называется длина направленного отрезка на этой оси, взятая со знаком (+), если направление с осью совпадают, и со знаком (-), если направления противоположные.



$$A'B' = \text{Pr}_l \vec{AB} = |\vec{AB}| \cdot \cos \alpha > 0$$

$$C'D' = \text{Pr}_l \vec{CD} = |\vec{CD}| \cdot \cos \beta < 0$$

Свойства проекции.

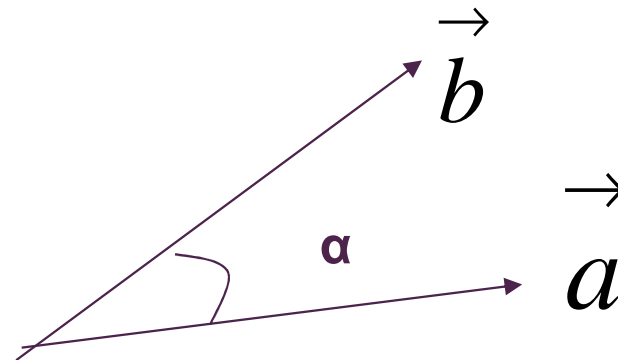
$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \text{Пр}_l \vec{a} = \text{Пр}_l \vec{b}$$

$$\text{Пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Пр}_l \vec{a} + \text{Пр}_l \vec{b}$$

$$\text{Пр}_l(\lambda \vec{a}) = \lambda \text{Пр}_l \vec{a}$$

Скалярное произведение векторов. Определение.

- **Скалярным произведением** 2-х векторов называется **число (скаляр)**, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

Свойства скалярного произведения.

$$\vec{a}, \vec{b} \quad \vec{b}, \vec{a}$$
$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$$

$$\vec{a}, \vec{b} \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$
$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \text{ если } \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a}, \vec{b} \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$
$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \text{ если } \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\vec{a}, \vec{a}$$
$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{\lambda a}, \vec{b}$$
$$(\vec{\lambda a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \pm \vec{b}$$
$$(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2 \cdot (\vec{a}, \vec{b}) + \vec{b}^2$$

Скалярное произведение в координатной форме.

$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$$

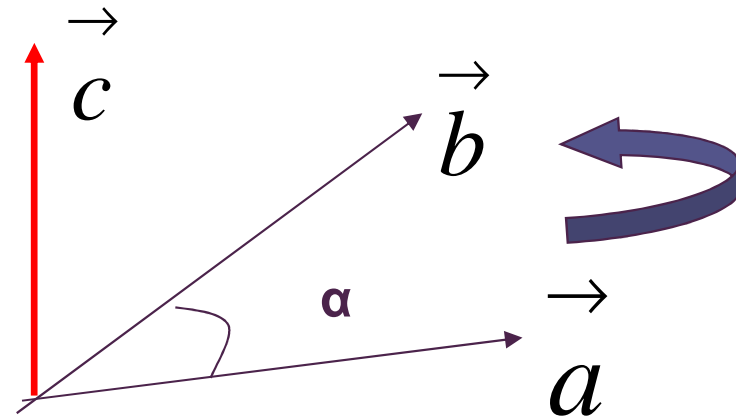
$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Векторное произведение векторов. Определение.

- **Векторным произведением** 2-х векторов называется **вектор**, длина которого равна произведению длин этих векторов на синус угла между ними. При этом результирующий вектор перпендикулярен перемножаемым.



$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$$

$$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$$

Свойства векторного произведения.

$$\vec{a}, \vec{b} = -\vec{b}, \vec{a}$$

$$\vec{a}, \vec{b} = 0 \text{ если } \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\vec{a}, \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \text{ если } \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a}, \vec{a} = 0$$

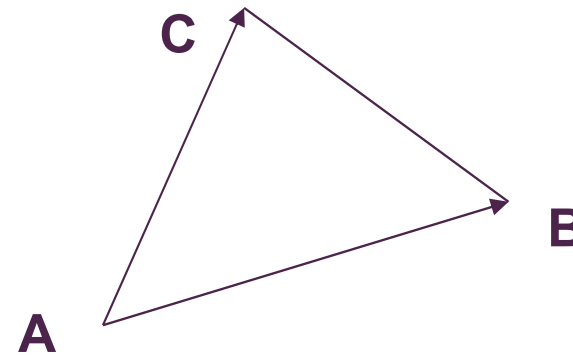
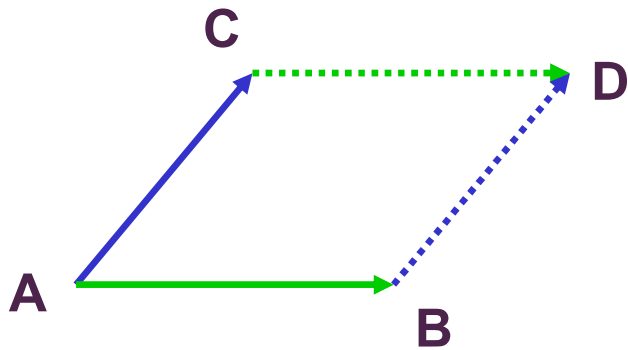
$$\vec{\lambda a}, \vec{b} = \lambda \vec{a}, \vec{b}$$

Векторное произведение в координатной форме.

$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Приложение векторного произведения.



$$S_{\text{параллелограмма}} = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$$

$$S_{\text{треугольника}} = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}]| = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$$

Смешанное произведение векторов.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}) = ([\vec{c}, \vec{a}], \vec{b})$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -([\vec{b}, \vec{a}], \vec{c}) = -([\vec{c}, \vec{b}], \vec{a}) = -([\vec{a}, \vec{c}], \vec{b})$$

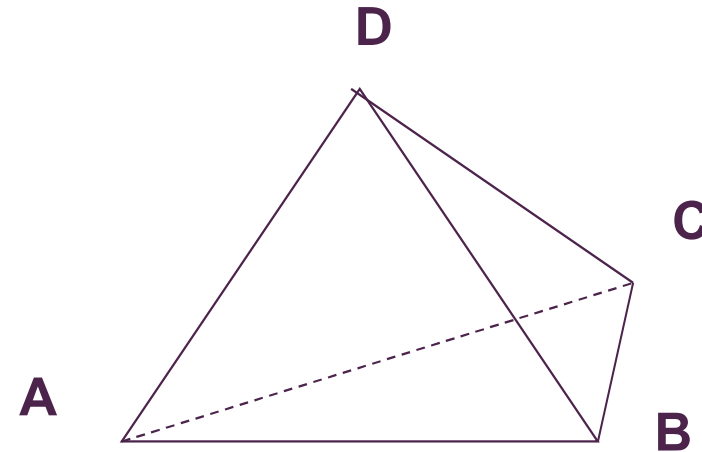
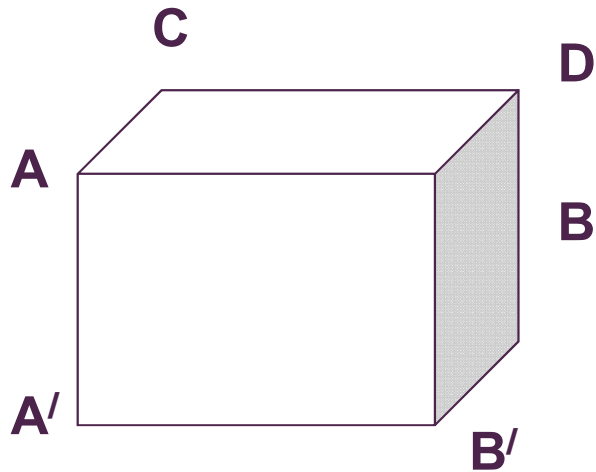
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \text{ если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — компланарные}$$

Смешанное произведение в координатной форме.

$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\} \quad \vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Приложение смешанного произведения.



$$V_{\text{параллелепипеда}} = |([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})|$$

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} |([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})|$$