Прямая в пространстве

Аналитическая геометрия

Прямая задана точкой и направляющим вектором. Каноническое уравнение.

$M_0(x_0; y_0; z_0) \in l -$ *заданная точка искомой прямой*

$M(x; y; z) \in l -$ *произвольная точка искомой прямой*

$\vec{S} = \{m; n; p\} -$ *заданный направляющий вектор*

$l -$ *искомая прямая*

$\vec{S} \parallel l$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$

Прямая задана двумя точками

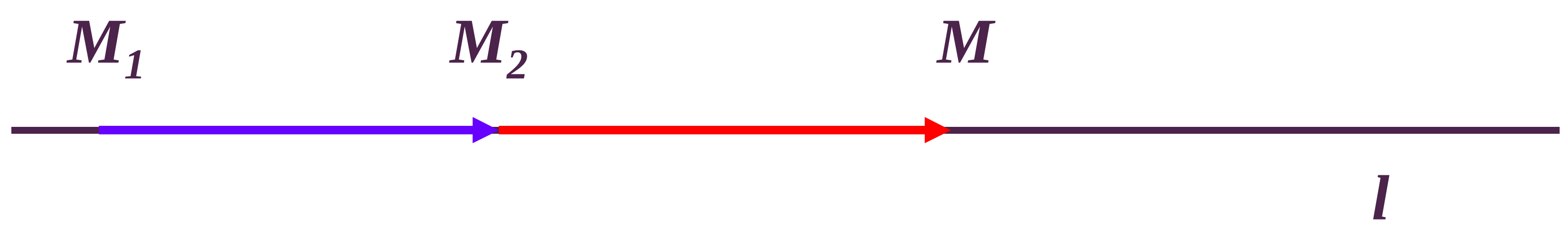
$M_1(x_1; y_1; z_1) \in l$ – *заданная точка искомой прямой*

$M_2(x_2; y_2; z_2) \in l$ – *заданная точка искомой прямой*

$M(x; y; z) \in l$ – *произвольная точка искомой прямой*

l – *искомая прямая*

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

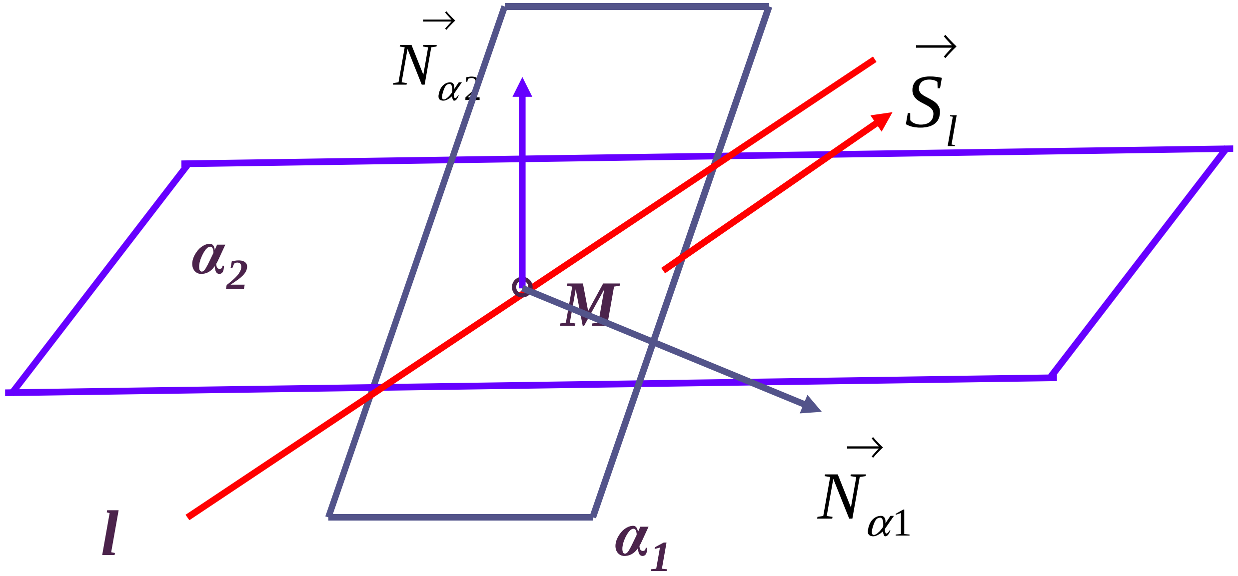


Параметрическое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Прямая задана как линия пересечения 2-х плоскостей.



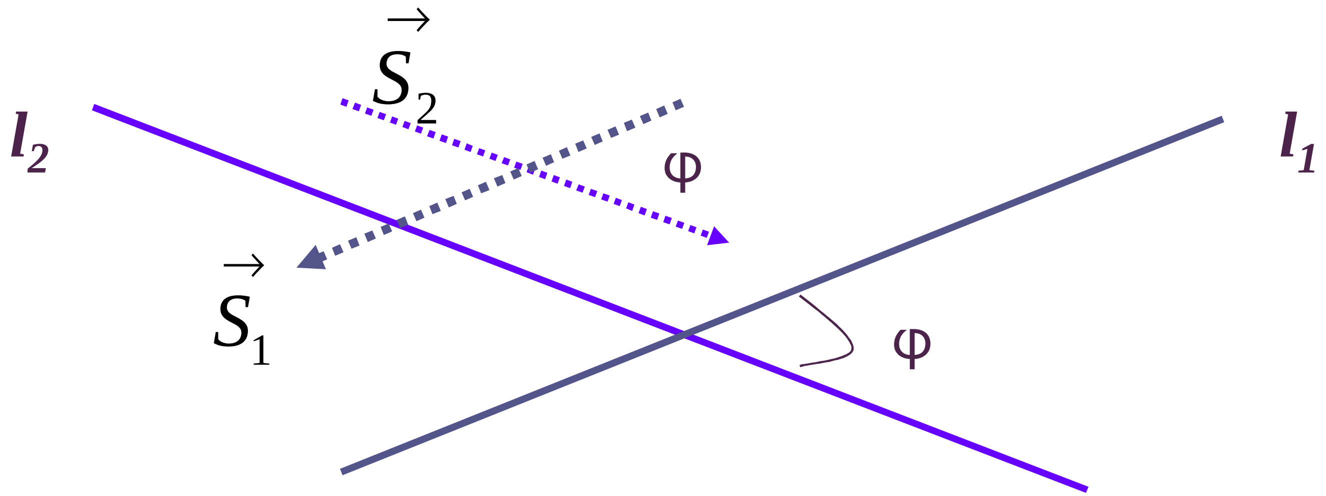
$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$M(x_0; y_0; z_0) \in l$ – *произвольная точка на искомой прямой*

l *искомая прямая*

Нахождение угла при пересечении 2-х прямых.



$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

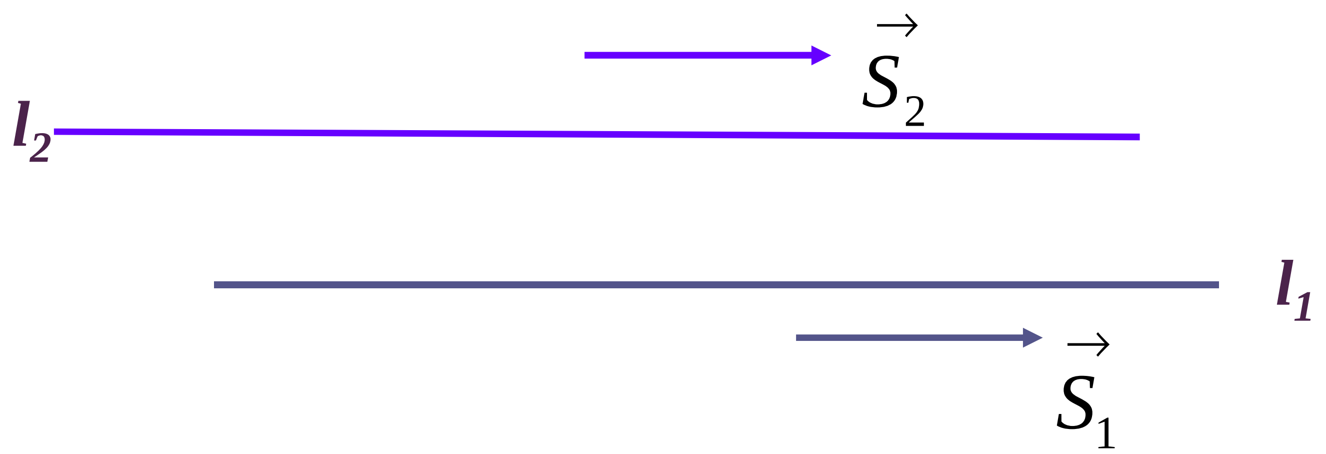
$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}}$$

$\vec{S}_1(m_1;n_1;p_1)$ – *направляющий вектор* l_1

$\vec{S}_2(m_2;n_2;p_2)$ – *направляющий вектор* l_2

Проверка условия параллельности.



$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

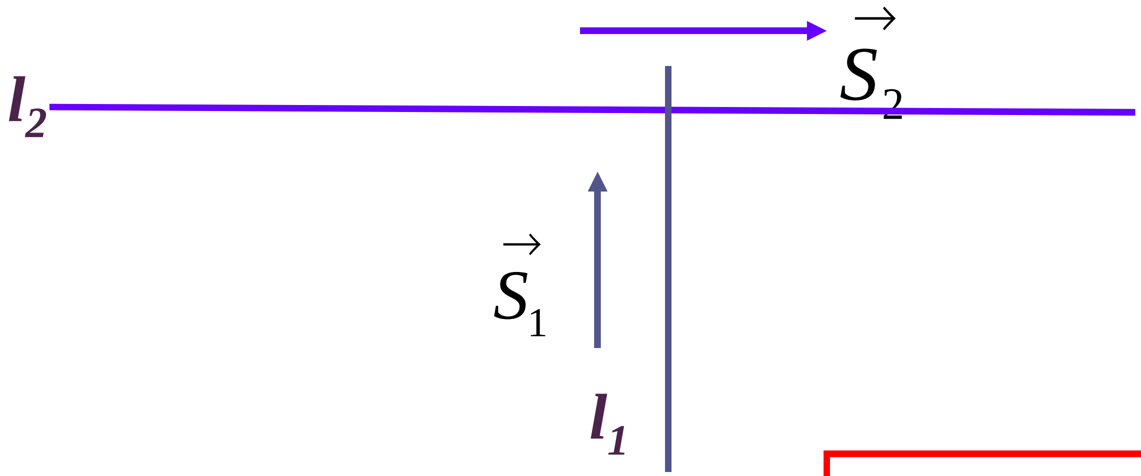
$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

$\vec{S}_1(m_1; n_1; p_1)$ – *направляющий вектор* l_1

$\vec{S}_2(m_2; n_2; p_2)$ – *направляющий вектор* l_2

$$\boxed{\vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 : \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}$$

Проверка условия перпендикулярности.



$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

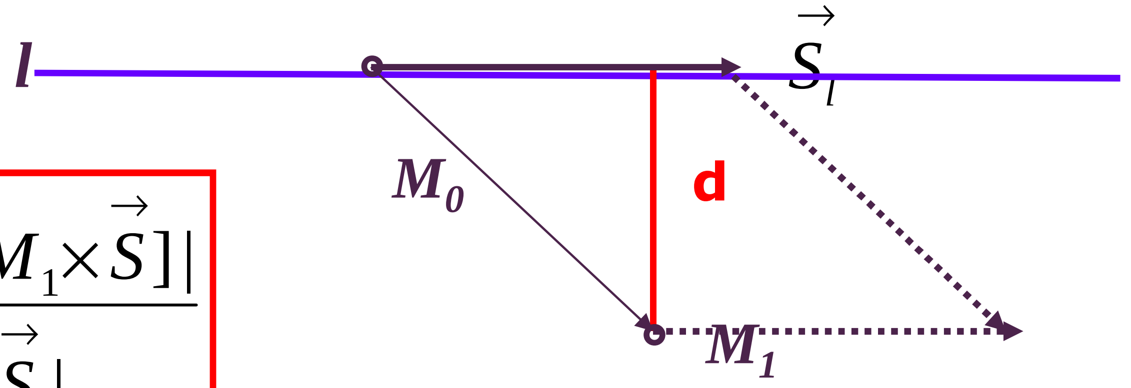
$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

$\vec{S}_1(m_1; n_1; p_1)$ – *направляющий вектор* l_1

$\vec{S}_2(m_2; n_2; p_2)$ – *направляющий вектор* l_2

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2 \Rightarrow (\vec{S}_1, \vec{S}_2) = 0 \\ m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0\end{gathered}}$$

Нахождение расстояния от точки до прямой в пространстве.



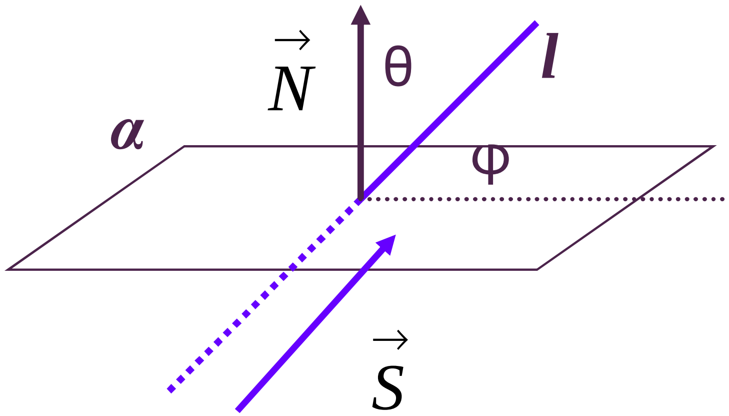
$$d = \frac{|[\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}]|}{|\vec{S}|}$$

$$l\ : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} - \textit{заданная прямая}$$

$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in l - \textit{произвольн ая точка}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) - \textit{заданная точка}$$

Нахождение угла между прямой и плоскостью.



$$\cos\theta = \frac{(\vec{N},\vec{S})}{|\vec{N}||\vec{S}|} = \cos(90^0 - \varphi) = \sin\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

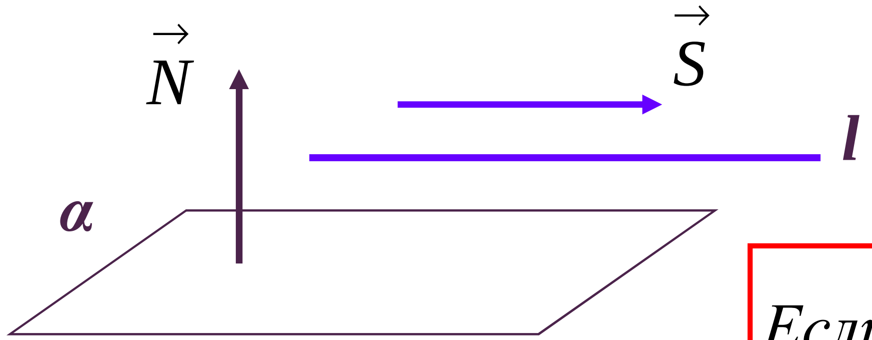
$$l: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} - \textit{заданная прямая}$$

$$\vec{S} = \{m; n; p\} - \textit{направляющий вектор прямой}$$

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0 - \textit{заданная плоскость}$$

$$\vec{N} = \{A; B; C\} - \textit{вектор нормали плоскости}$$

Условие параллельности прямой и плоскости



$$\text{Если } \alpha \parallel l \Rightarrow \vec{N} \perp \vec{S} \Rightarrow (\vec{N}, \vec{S}) = 0$$
$$Am + Bn + Cp = 0$$

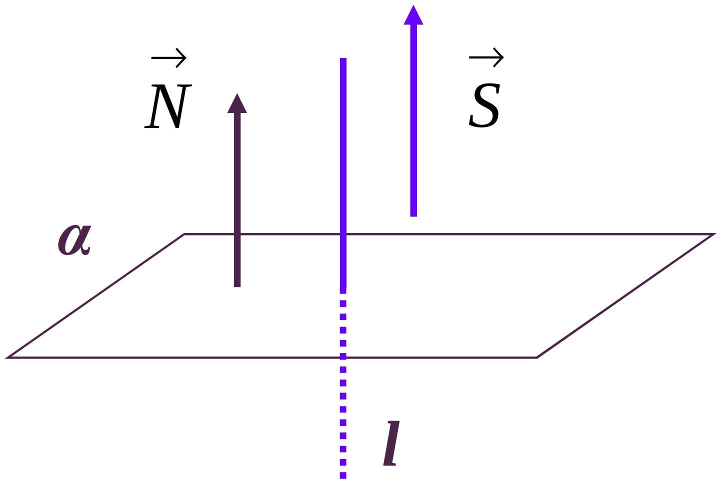
$$l: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} - \text{заданная прямая}$$

$$\vec{S} = \{m; n; p\} - \text{направляющий вектор прямой}$$

$$\alpha: A\,x + B\,y + Cz + D = 0 - \text{заданная плоскость}$$

$$\vec{N} = \{A; B; C\} - \text{вектор нормали плоскости}$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости



$$Если\ \alpha \perp l \Rightarrow \vec{N} \parallel \vec{S}$$

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

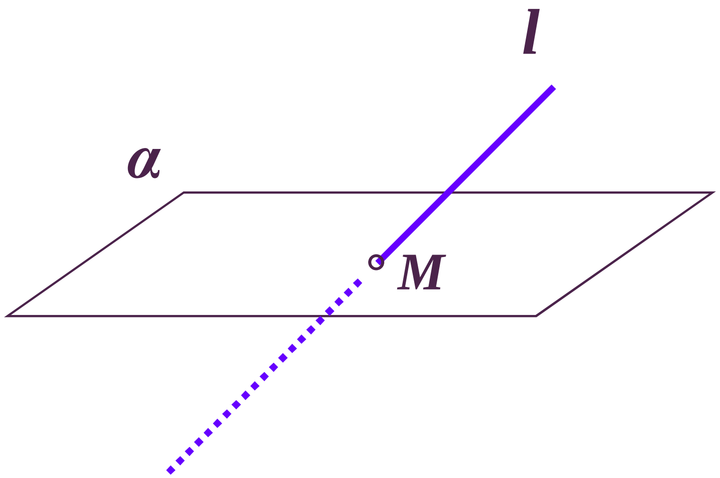
$$l: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} - заданная\ прямая$$

$$\vec{S} = \{m; n; p\} - направляющий\ вектор\ прямой$$

$$\alpha: A\,x + B\,y + Cz + D = 0 - заданная\ плоскость$$

$$\vec{N} = \{A; B; C\} - вектор\ нормали\ плоскости$$

Нахождение точки пересечения прямой с плоскостью.



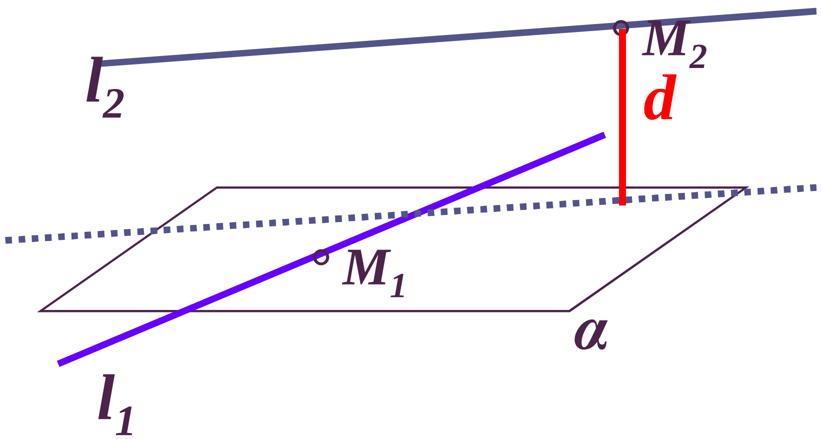
$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

$$l:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}-\textit{заданная прямая}$$

$$\alpha: Ax+By+Cz+D=0-\textit{заданная плоскость}$$

$$M(x;y;z)-\textit{искомая точка}$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми (непересекающимися)



1. Составить уравнение плоскости, проходящей через l_1, параллельно l_2.
2. Найти расстояние от M_2 до найденной плоскости.

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} - \textit{заданная прямая}$$

$$M_1(x_1;y_1;z_1)\in l_1$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2} - \textit{заданная прямая}$$

$$M_2(x_2;y_2;z_2)\in l_2$$

$$\boxed{d=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

$$\vec{S}_1=\{m_1;n_1;p_1\}\in\alpha$$

$$\vec{S}_2=\{m_2;n_2;p_2\}\parallel\alpha$$

$$\vec{N}_\alpha=[\vec{S}_{l1}\times\vec{S}_{l2}]\perp\alpha$$

Поверхности второго порядка

Аналитическая геометрия

Эллипсоид

- С центром в начале координат

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

- Со смещенным центром

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

Сфера

- С центром в начале координат

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

- Со смещенным центром

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Однополосный гиперболоид

- Симметричный относительно оси OZ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

- Симметричный относительно оси OX

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

- Симметричный относительно оси OY

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Двухполосный гиперболоид

- Симметричный относительно оси OZ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

- Симметричный относительно оси OX

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

- Симметричный относительно оси OY

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Конус

- Симметричный относительно оси OZ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

- Симметричный относительно оси OX

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

- Симметричный относительно оси OY

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

Эллиптический параболоид

- Симметричный относительно оси OZ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm z$$

- Симметричный относительно оси OX

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm x$$

- Симметричный относительно оси OY

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm y$$

Гиперболический параболоид

- Симметричный относительно оси OZ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm z$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm x$$

- Симметричный относительно оси OX

- Симметричный относительно оси OY

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm y$$

Эллиптический цилиндр

- Симметричный относительно оси OZ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

- Симметричный относительно оси OX

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

- Симметричный относительно оси OY

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Гиперболический цилиндр

- Симметричный относительно оси OZ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Симметричный относительно оси OX

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- Симметричный относительно оси OY

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Параболический цилиндр

- Ориентированный относительно оси OZ $\quad y = x^2 \qquad x = y^2$
- Ориентированный относительно оси OX $\quad y = z^2 \qquad z = y^2$
- Ориентированный относительно оси OY $\quad x = z^2 \qquad z = x^2$