Теоремы о пределах

Введение в математический анализ

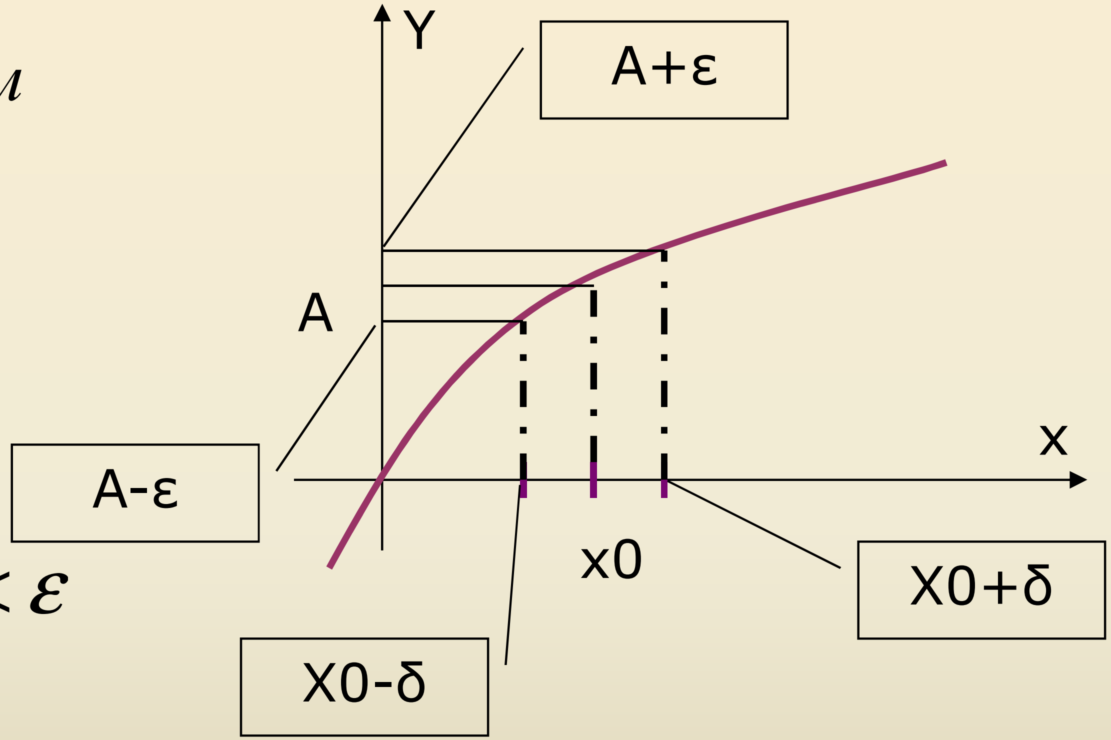
Предел функции

Число A называется пределом функции f(x) при $x \to x_0$ если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$$

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$



Предел функции

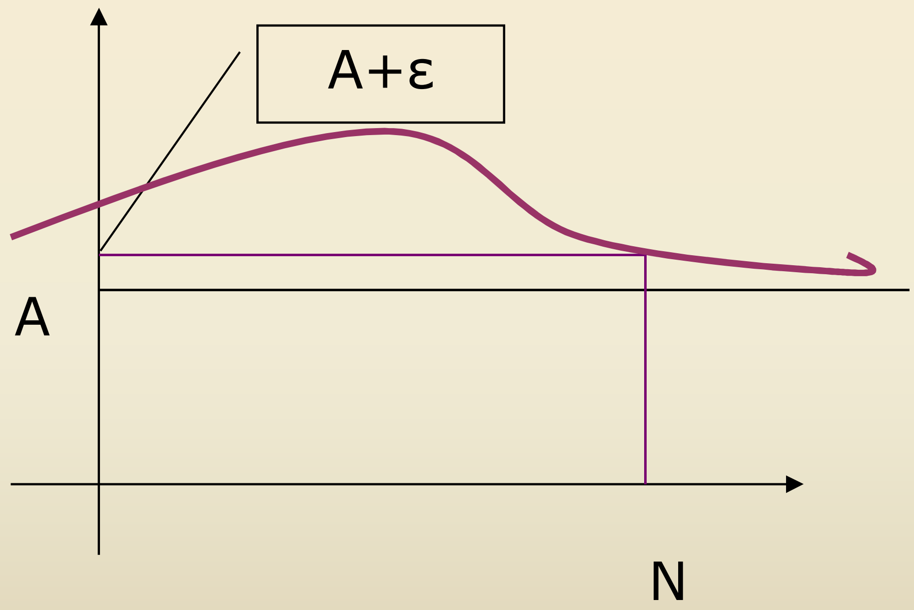
Число A называется пределом функции f(x)

при $x \to \infty$ если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0$$

$$|x| > N(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$



Теорема 1 – основная теорема о пределах

Если функция $f(x)$ *при* $x \longrightarrow x_0$ *имеет пределом число* A, *то в окрестности этой точки её можно представить в виде:*

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

$\alpha(x)$ – *бесконечно малая величина*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x) = A + \alpha(x)$$

Теорема 1 – обратная теорема

Если функцию $f(x)$ *можно представить в виде:*

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

$\alpha(x)$ – *бесконечно малая величина,*

то число A *является пределом* $f(x)$ *при* $x \to x_0$

$$f(x) = A + \alpha(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Теорема 2 – о единственности предела

Если функция имеет предел, то он один

Теорема 3 – о пределе константы

Если $f(x)=const=C$, то

$$\lim_{x\to x_0} C = C$$

Теорема 4 – о пределе суммы(разности) двух функций

Пусть

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = B$$

тогда

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = A \pm B$$

Теорема 5 – о пределе произведения двух функций

Пусть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

тогда

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$$

$$\lim_{x \to x_0} (Cf(x)) = C \lim_{x \to x_0} f(x) = C \cdot A$$

Теорема 6 – о пределе частного двух функций

Пусть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$$

Теорема 7 – о предельном переходе под знаком предела

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ в окрестности точки x_0 удовлетворяют неравенству

$$f(x) < g(x)$$

То можно перейти к пределу в этом неравенстве

$$\lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Теорема 8 – о пределе сжатой переменной (о двух милиционерах)

Если три функции $f(x)$, $g(x)$ и $\phi(x)$ в окрестности точки x_0 удовлетворяют неравенству

$$f(x) < \phi(x) < g(x)$$

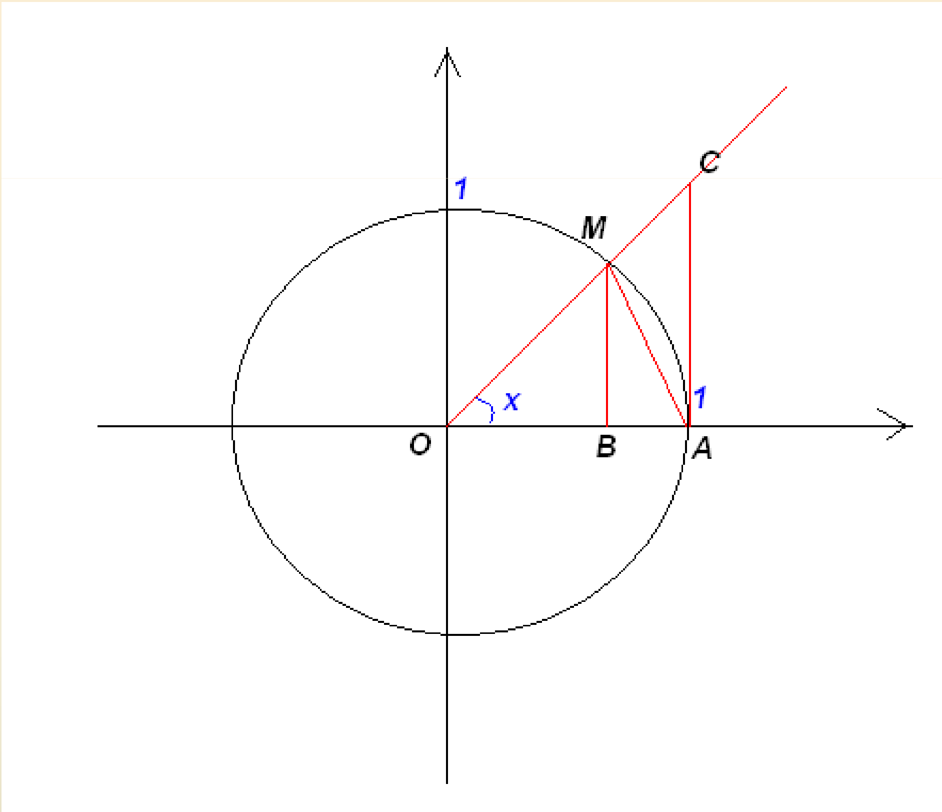
и при этом

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = A$$

то

$$\lim_{x \to x_0} \phi(x) = A$$

Первый замечательный предел и его следствия



$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$$

$$\lim_{x\to}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Второй замечательный предел и его следствия

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

Сравнение бесконечно малых величин

- Пусть дано:

$$\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\beta(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$$

Возможны варианты:

1. $A=1$ $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – эквивалентные Б.М.В.
2. $A\neq 0$ $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – одного порядка малости;
3. $A\to 0$ $\alpha(x)$ – более высокого порядка малости
4. $A\to\infty$ $\beta(x)$ – более высокого порядка малости

Теоремы о бесконечно малых величинах

- Теорема 1:

Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – эквивалентные Б.М.В., то

$\alpha(x)$ - $\beta(x)$ — более высокого порядка малости

- Теорема 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha^{*}(x)}{\beta^{*}(x)}$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых величин

$$\sin(\alpha(x)) \approx \alpha(x)$$

$$\arcsin(\alpha(x)) \approx \alpha(x)$$

$$tg(\alpha(x)) \approx \alpha(x)$$

$$arctg(\alpha(x)) \approx \alpha(x)$$

$$1-\cos(\alpha(x)) \approx \frac{\alpha^2(x)}{2}$$

$$\ln(1+\alpha(x)) \approx \alpha(x)$$

$$\log_a(1+\alpha(x)) \approx \frac{\alpha(x)}{\ln a}$$

$$e^{\alpha(x)}-1 \approx \alpha(x)$$

$$a^{\alpha(x)}-1 \approx \alpha(x)\cdot\ln a$$

$$\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \approx \frac{\alpha(x)}{n}$$