Системы линейных алгебраических уравнений

Линейная алгебра

Основные понятия

- Системой ***m*** линейных алгебраических уравнений с ***n*** неизвестными называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Основные понятия

- ***A*** – матрица числовых коэффициентов или основная матрица
- ***B*** – матрица свободных членов
- ***X*** – матрица неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Основные понятия

- Квадратная матрица ***A*** называется ***вырожденной***, если её определитель равен нулю.

$$\boxed{\Delta_A = 0}$$

Основные понятия

- Решением СЛАУ является совокупность чисел $\{c_1, c_2, \ldots c_n\}$, которая при подстановке в каждое уравнение обращает его в верное равенство

Основные понятия

- СЛАУ называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение.
- СЛАУ называется ***несовместной***, если она не имеет решений.

Основные понятия

- СЛАУ называется ***определенной***, если она имеет единственное решение.
- СЛАУ называется ***неопределенной***, если она имеет множество решений.

Основные понятия

- Если матрица свободных членов равна нулю, система уравнений является ***однородной***.
- Если матрица свободных членов не равна нулю, система уравнений является ***неоднородной***.

Теорема Кронекера-Капелли

- СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.
- Если ранг основной матрицы равен числу неизвестных

Rang A=n, то система имеет единственное решение.

- Если ранг основной матрицы меньше числа неизвестных

Rang A<n, то система имеет множество решений.

Метод Крамера

- Система ***n*** линейных уравнений с ***n*** неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы не равен нулю. При этом неизвестные находятся по формулам Крамера:

$$\boxed{x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}}$$

Δ – главный определитель системы

Δ_k – определитель, получаемый из главного путем замены k–столбца столбцом свободных членов

Метод Гаусса

- Записывается расширенная матрица коэффициентов.
- Первая строка матрица оставляется без изменений; на 1-ое место можно поставить любую строку, но в последствии её не менять.
- Путем элементарных преобразований матрица приводится к треугольному виду.
- Последовательно вычисляются неизвестные – обратный ход Гаусса.

Однородная система линейных уравнений

- ОСЛУ всегда имеет тривиальное (нулевое) решение.
- Если ОСЛУ определенная, то существует только тривиальное решение.
- Если ОСЛУ неопределенная, то кроме тривиального существует и нетривиальное решение.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однородная система линейных уравнений

- Если Rang A = n ОСЛУ определенная, то существует только тривиальное решение.
- Если Rang A < n ОСЛУ неопределенная, то кроме тривиального существует и нетривиальное решение, при этом detA = 0

Фундаментальная система решений

ФСР – совокупность решений, обладающая свойствами:

1. ФСР состоит из (n-R) линейно независимых решений, т.е. число независимых переменных равно (n-R).
2. Любое решение можно представить в виде линейной комбинации ФСР.