Матрицы и определители

Линейная алгебра

Определение матрицы

- Числовой матрицей размера ***mxn*** называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы, содержащей ***m*** строк и ***n*** столбцов

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)$$

Основные понятия

- Если $m=n$ число строк равно числу столбцов, матрица называется ***квадратной***.
- Если $m=1$– это *матрица-строка* или ***вектор-строка***
- Если $n=1$– это *матрица-столбец* или ***вектор-столбец***

Основные понятия

- Если все элементы матрицы кроме диагональных равны нулю, то матрица называется ***диагональная***.

- Если диагональные элементы диагональной матрицы равны единице, то матрица называется ***единичной***.

Основные понятия

- Матрицы ***A*** и ***B*** называются равными, если они имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы равны

$$\boxed{\begin{array}{l} A = B \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \\ i = 1,\ldots m \\ j = 1,\ldots n \end{array}}$$

Сложение матриц

- **Алгебраической суммой**

2-х равных матриц *A* и *B* называется третья матрица *C*, элементы которой являются суммой соответствующих элементов *A* и *B*.

$$\boxed{\begin{aligned} &C = A \pm B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \\ &i = 1,\ldots m \\ &j = 1,\ldots n \end{aligned}}$$

Умножение матрицы на число

- **При умножение матрицы *A* на число**

получается другая матрица *C*, элементы которой являются произведением элементов *A* и заданного числа.

$$C = \lambda A \Rightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

$$\lambda \neq 0$$

$$i = 1,\dots m$$

$$j = 1,\dots n$$

Линейная комбинация матриц

- **Линейной комбинацией матриц** называется другая матрица *C*, элементы которой определяются следующим образом:

$$C = \lambda A \pm \gamma B \Rightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij} \pm \gamma b_{ij}$$

$$\lambda, \gamma \neq 0$$

$$i = 1, \dots m$$

$$j = 1, \dots n$$

Произведение матриц

- **Произведением матриц**

называется другая матрица *С*, элементы которой определяются следующим образом:

«строка на столбец».

Число столбцов 1-ой перемножаемой матрицы должно равняться числу строк 2-ой перемножаемой матрицы

$$C = A \cdot B \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$i = 1,\dots m$$

$$j = 1,\dots n$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Определитель матрицы

- **Определителем или детерминантом** матрицы порядка *n* называется число, вычисляемое из элементов матрицы по определенному правилу

$$\Delta_A = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы 1-го порядка

- **Определителем** матрицы 1-го порядка называется число, равное элементу матрицы

$$\boxed{\Delta_A = \det A = |a_{11}| = a_{11}}$$

Определитель матрицы 2-го порядка

- **Определителем** матрицы 2-го порядка называется число, вычисляемое из элементов матрицы по следующему правилу

$$\Delta_A = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определитель матрицы 3-го порядка – правило треугольников

(+) (--)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} -$$

$$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

Определение минора матрицы

- Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A порядка n называется определитель порядка **(n-1),** полученный из элементов матрицы путем вычеркивания

  i–строки и j–столбца, на пересечении которых стоит этот элемент

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определение алгебраического дополнения матрицы

- Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка $\boldsymbol{n}$ называется минор этого элемента M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

Вычисление определителя

- Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов к-л. строки или столбца на соответствующие им алгебраические дополнения

$$\boxed{\Delta_A = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

Транспонирование матрицы

- *Транспонирование* матрицы – это изменение мест строк и столбцов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Свойства определителей 1

Определитель матрицы не меняется при её транспонировании.

$$\boldsymbol{det\ A = det\ A^T}$$

Свойства определителей 2

При перестановке
2-х рядов определитель матрицы меняет знак на противоположный

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Свойства определителей 3

Определитель матрицы

не изменится если

общий множитель

элементов к-л.

ряда вынести за

знак определителя

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Свойства определителей 4

Определитель матрицы

равен нулю, если

все элементы к-л.

ряда равны нулю.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Свойства определителей 5

Определитель матрицы равен нулю, если элементы 2-х рядов равны.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Свойства определителей 6

Определитель матрицы

равен нулю, если

элементы 2-х рядов

пропорциональны.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Свойства определителей 7, 8

Определитель матрицы равен нулю, если элементы к-л. ряда являются линейной комбинацией элементов других рядов.

Определитель матрицы не изменится, если все элементы к-л.ряда умножить на число и прибавить к соответствующим элементам другого ряда.

Свойства определителей 9

Если все элементы к-л.ряда представить в виде суммы 2-х слагаемых, то определитель можно записать в виде суммы 2-х определителей.