Лекция 7

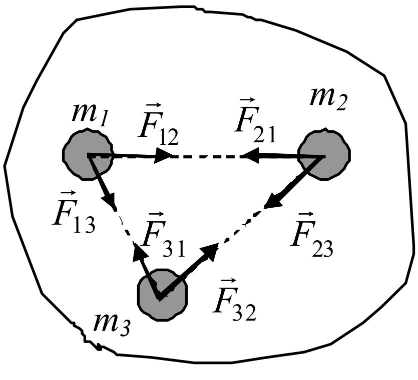
ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Термины и понятия

Абсолютно неупругий удар
Абсолютно упругий удар
Беспорядочное (хаотическое) движение
Восстановить (восстанавливать)
Гантели
Детали процесса
Деформироваться
Догонять
Забить (гвоздь)
Закон сохранения механической энергии
Закон сохранения момента импульса
Ковка металла
Кратковременный
Кусок
Молот
Наковальня
Общефизический закон сохранения энергии
Приращение энергии
Скамья Жуковского
Соударение
Удар
Центральный удар шаров
Штамповка металла

7.1. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК (ТЕЛ)

При рассмотрении закона сохранения энергии материальной точки предполагалось, что материальная точка движется в стационарном силовом поле. Силовое поле, в котором движется материальная частица, возникает благодаря наличию других тел. Чтобы силовое поле было стационарным – не зависящем от времени, тела, создающие это поле должны быть неподвижны. Таким образом, рассмотренный закон сохранения полной механической энергии относится к случаю: одна материальная точка (тело) движется, а остальные – покоятся.



Сформулируем закон сохранения полной механической энергии в общем случае, когда имеется несколько движущихся материальных точек (тел) – система тел (материальных точек).

Рассмотрим **замкнутую систему** из

n тел, между которыми действуют только консервативные силы.

Под действием этих сил тела внутри системы перемещаются, меняется их скорость и положение, то есть меняются кинетическая и потенциальная энергии каждого тела и системы в целом.

Запишем второй закон Ньютона для каждого тела:

$$m_1 \frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + ... + \vec{F}_{1n},$$

$$m_2 \frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + ... + \vec{F}_{2n},$$

$$-----------------------$$

$$m_n \frac{d\vec{\upsilon}_n}{dt} = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + ... + \vec{F}_{n,n-1}.$$

Под действием сил тела системы совершают перемещения $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2 ...... d\vec{r}_n$. Умножим каждое уравнение на соответствующее перемещение. Учитывая, что $d\vec{r}_i = \vec{\upsilon}_i dt$, получим:

$$m_1(\vec{\upsilon}_1\ d\vec{\upsilon}_1) = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + ... + \vec{F}_{1n})d\vec{r}_1,$$

$$m_2\ (\vec{\upsilon}_2\ d\vec{\upsilon}_2) = \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + ... + \vec{F}_{2n}\right)d\vec{r}_2,$$

$$-----------------------------$$

$$m_n\ (\vec{\upsilon}_n\ d\vec{\upsilon}_n) = \left(\vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + ... + \vec{F}_{n,n-1}\right)d\vec{r}_n.$$

Сложив эти уравнения, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{\upsilon}_i d\vec{\upsilon}_i) - \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + ... + \vec{F}_{in}\right)d\vec{r}_i = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{m_i \upsilon_i^2}{2}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + ... + \vec{F}_{in}\right)d\vec{r}_i = 0.$$

Первый член левой части равенства

$$\sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{m_i \upsilon_i^2}{2}\right) = dE_k,$$

где dE_k – приращение кинетической энергии системы. Второй член $\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + ... + \vec{F}_{in}\right)d\vec{r}_i$ – элементарная работа, совершенная телами системы. Так как для каждой материальной точки системы $dA_i = -dE_{\Pi i}$, то $\sum_{i=1}^{n} dA_i = -\sum_{i=1}^{n} dE_{\Pi i} = -dE_{\Pi}$, где dE_{Π} – приращение потенциальной энергии системы материальных точек, то:

$$d\left(E_k + E_{\Pi}\right) = 0,$$

откуда
$$E_k + E_{\Pi} = const. \qquad (42)$$

Выражение (42) представляет собой закон сохранения механической энергии: **полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, сохраняется, то есть не изменяется со временем.** Может происходить лишь превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причем приращение одной из них в точности равно убыли другой.

Сформулируем **закон изменения полной механической энергии системы.** Пусть система материальных точек (тел) не является замкнутой. На материальные точки кроме внутренних консервативных сил, действуют любые другие силы, которые будем называть сторонними. Отнесем к сторонним силам все внешние силы (силы со стороны тел не входящих в систему), а также все диссипативные силы (силы трения, силы сопротивления), как внутренние, так и внешние. Таким образом, сторонними силами будем называть все силы, кроме внутренних консервативных сил.

Если система материальных точек перешла из произвольного начального положения 1 в произвольное конечное положение 2, то согласно теореме о кинетической энергии, работа всех приложенных к материальным точкам сил равна приращению их кинетических энергий. И следовательно, работа всех сил действующих на систему и внутри системы равна приращению кинетической энергии системы материальных точек: $A_{1-2} = E_{K2} - E_{K1}$, где E_{K2} и E_{K1} – кинетическая энергия системы материальных точек в конечном и начальном состоянии соответственно.

Представим работу A_{1-2} как сумму работы $A_{1-2конс}$ консервативных внутренних сил и работы $A_{1-2стор}$ всех сторонних сил: $A_{1-2} = A_{1-2конс} + A_{1-2стор}$. Учтем свойство потенциальной энергии системы, согласно которому работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии: $A_{1-2конс} = E_{\Pi 1} - E_{\Pi 2}$.

Так как $A_{1-2} = E_{K2} - E_{K1}$, с другой стороны $A_{1-2} = A_{1-2конс} + A_{1-2стор}$, то $A_{1-2} = E_{\Pi 1} - E_{\Pi 2} + A_{1-2стор}$. Приравняв выражения, получим: $A_{1-2стор} = (E_{K2} + E_{\Pi 2}) - (E_{K1} + E_{\Pi 1}) = E_2 - E_1$, где E_2 и E_1 – полная механическая энергия системы материальных точек в положениях 2 и 1 соответственно.

Таким образом, **работа сторонних сил** $A_{1-2стор}$ **при переходе системы материальных точек (тел) из произвольного начального положения в произвольное конечное положение равна приращению полной механической энергии системы:** $A_{1-2стор} = E_2 - E_1$.

Если в замкнутой системе кроме консервативных сил действуют еще диссипативные силы, например, сила трения, то полная механическая энергия не сохраняется (часть механической энергии превращается в тепло). В этом случае выполняется общефизический закон сохранения энергии: **энергия никогда не создается и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую.**

С помощью законов сохранения импульса и энергии исследуем движение сталкивающихся тел.

7.2. УДАР

Ударом называется любое кратковременное взаимодействие тел, результатом которого является значительное изменение скорости их движения.

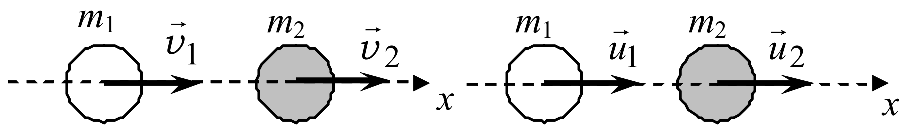
С ударом мы встречаемся не только в макромире (т.е. мире больших тел), но и в мире атомных, ядерных и элементарных частиц.

Движение сталкивающихся тел (как и всякая другая задача о движении тел) может быть исследовано с помощью законов Ньютона. Однако для этого нужно было бы знать, какие силы возникают при соприкосновении тел и как они изменяются в процессе соударения. Но если нас интересуют не детали процесса соударения, а лишь конечный результат его, то такое полное исследование с помощью законов Ньютона становится ненужным. Так как два сталкивающихся тела, на которые не действуют силы со стороны других тел, представляют собой замкнутую систему, то к ним применим закон сохранения импульса, а во многих случаях – и закон сохранения энергии. Зная движение тел до столкновения, и применяя законы сохранения, можно определить движение тел после столкновения. Моделью для подобных задач может служить задача о соударении шаров. Будем рассматривать центральный удар шаров – это удар, при котором центры масс шаров лежат на одной прямой. При этом шары могут двигаться навстречу друг другу или первый шар может догонять второй.

Различают абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары.

7.3. АБСОЛЮТНО УПРУГИЙ УДАР

Абсолютно упругий удар – это удар, при котором механическая энергия системы соударяющихся тел не превращается в другие виды энергии.



до удара **после удара**

Пусть оба шара движутся вдоль оси x. Скорости шаров с массами m_1 и m_2 до удара $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, после удара $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$.

Проекции векторов скорости на ось x равны модулям скоростей. В момент удара шары деформируются (сжимаются). В обоих шарах возникают упругие силы, которые стремятся восстановить форму шара. Эти силы замедляют движение первого шара и ускоряют движение второго. Так как удар абсолютно упругий, шары полностью восстанавливают свою форму, затем расходятся и движутся уже со скоростями, отличными от скоростей до удара. При соударении в телах возникают столь значительные силы, что внешними силами, действующими на них, можно пренебречь и считать, что шары образуют замкнутую систему. Применим к шарам закон сохранения энергии и закон сохранения импульса.

По закону сохранения кинетической энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \qquad (43)$$

Закон сохранения импульса (в проекциях на ось x):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \qquad (44)$$

Переносим в обоих равенствах члены с m_1 влево, с m_2 – вправо:

$$m_1 v_1^2 - m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 - m_2 v_2^2,$$

$$m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_2, \qquad (45)$$

откуда

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2. \qquad (46)$$

Решая совместно (45) и (46), находим скорости шаров после удара:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \qquad (47)$$

$$u_2 = \frac{\left(m_2 - m_1\right)\ \upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}. \qquad (48)$$

Проанализируем результат. Рассмотрим частные случаи.

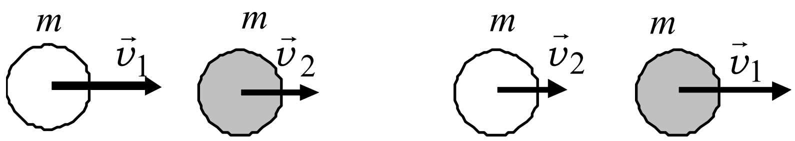
1. Соударения одинаковых шаров:

$$m_1 = m_2.$$

Выражения (47) и (48) имеют вид:

$$u_1 = \upsilon_2, \quad u_2 = \upsilon_1,$$

то есть шары равной массы обмениваются скоростями.



до удара **после удара**

2. Один шар до удара покоится:

$$\upsilon_2 = 0$$

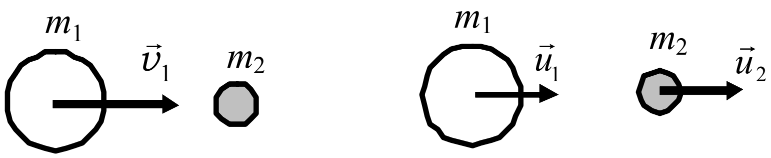
Выражения (47) и (48) имеют вид:

$$u_1 = \frac{\left(m_1 - m_2\right)\upsilon_1}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}. \qquad (49)$$

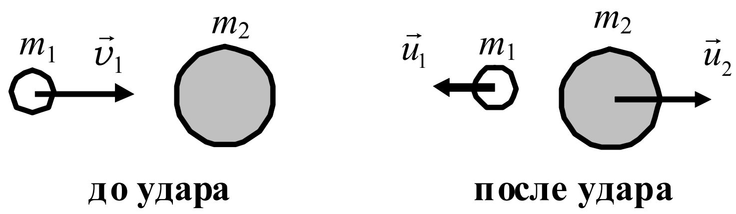
Поведение шаров зависит от соотношения масс:

а) $m_1 > m_2$. Первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью ($u_1 < \upsilon_1$). Второй шар начинает двигаться в том же направлении.



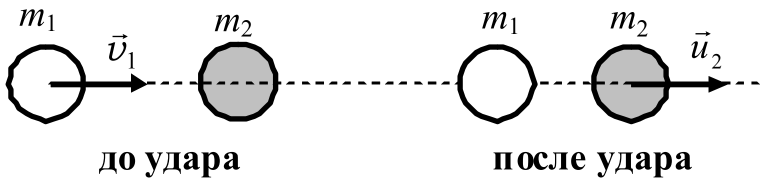
до удара **после удара**

б) $m_1 < m_2$. После удара направление движения первого шара изменится – шар отскакивает обратно. Второй шар движется в ту сторону, в которую двигался первый шар до удара.



Чем больше разница в массах, тем меньшую энергию передает малый шар большому. При $m_1 << m_2$ $u_2 = 0$. Например, при абсолютно упругом ударе электрона с атомом электрон полностью сохраняет кинетическую энергию.

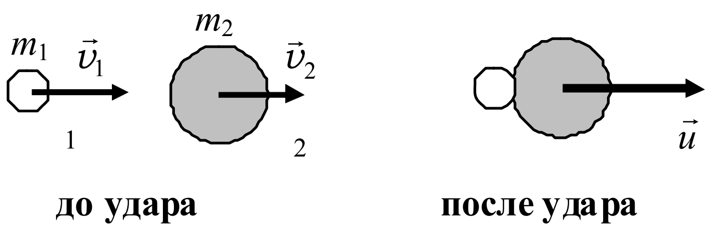
в) $m_1 = m_2$. После удара остановится первый шар, а второй будет двигаться с той же скоростью и в том же направлении, в котором двигался первый шар до удара.



Таким образом, при абсолютно упругом ударе общая кинетическая энергия тел сохраняется, но распределяется между ними в зависимости от их масс и скоростей.

7.4. АБСОЛЮТНО НЕУПРУГИЙ УДАР

Абсолютно неупругий удар – это удар, при котором часть механической энергии системы соударяющихся тел превращается в другие виды энергии.



Имеем шары массами m_1 и m_2, их скорости соответственно равны $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. В момент удара шары деформируются, но эта деформация не исчезает и шары после удара двигаются с одинаковой скоростью.

Найдем скорость шаров после удара. Закон сохранения импульса можно записать в проекции на направление движения:

$$m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2 = (m_1 + m_2) u,$$

где u – скорость шаров после удара. Тогда

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}. \tag{50}$$

Закон сохранения кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе не выполняется. Часть кинетической энергии расходуется на работу деформации. Эту «потерю» можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара.

$$\Delta E_k = \left(\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}.$$

Используя (50), получим:

$$\Delta E_k = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2. \tag{51}$$

Эта часть кинетической энергии превращается в тепловую энергию, т.е. в энергию беспорядочного хаотического движения молекул. На практике часто приходится иметь дело со случаем, когда одно из тел (ударяемое тело) неподвижно, то есть $\upsilon = 0$. В таком случае формула (51) имеет вид:

$$\Delta E_k = E_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

где $E_1 = \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2}$ – кинетическая энергия ударяющегося тела.

Если целью удара является деформация тела (ковка, штамповка металла), необходимо, чтобы бóльшая часть энергии ударяющегося тела расходовалась на работу деформации, то есть ΔE_k была по возможности больше. Для этого надо брать $m_1 << m_2$ (при ковке масса наковальни с куском металла много больше, чем масса молота). Если в результате удара надо получить перемещение неподвижного тела (забивание гвоздя), надо, чтобы потеря энергии на деформацию была наименьшей. Поэтому масса молотка должна быть, гораздо больше массы гвоздя.

7.5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Как указывалось ранее, при описании динамики вращательного движения момент импульса играет ту же роль, что и импульс при поступательном движении. Момент импульса твердого тела определяется моментом инерции тела относительно оси вращения и угловой скоростью вращения твердого тела: $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Продифференцируем уравнение это по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon} = \vec{M}\ , \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\ . \qquad (52)$$

Это уравнение называется уравнением моментов. Из уравнения следует, что причиной изменения момента импульса является момент силы, действующий на твердое тело. Динамика вращательного движения описывается именно этим уравнением. Обратите внимание на аналогичность динамического содержания и структуры уравнения моментов $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ и второго закона Ньютона $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$.

В уравнении моментов речь идет о приращении моментов импульса, во втором законе Ньютона – о приращении импульса. Причиной приращения момента импульса является момент силы, а причиной приращения импульса является сила.

Из уравнения моментов следует, что под действием момента силы $\vec{M}$ твердое тело за элементарный промежуток времени dt получает элементарное приращение момента импульса: $d\vec{L} = \vec{M}\cdot dt$. За конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ момент импульса твердого тела получает конечное приращение, которое можно определить: $\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\cdot dt$. Уравнения $d\vec{L} = \vec{M}\cdot dt$ и $\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\cdot dt$ называются теоремами об изменении момента импульса в дифференциальной и интегральной форме соответственно.

Из теоремы об изменении момента импульса следует закон сохранения момента импульса твердого тела: **если момент внешних сил относительно некоторой оси равен нулю, то относительно этой оси момент импульса со временем не изменяется (сохраняется).**

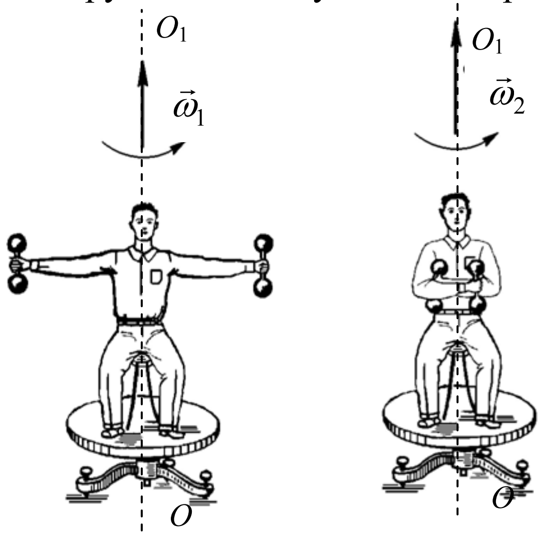
Докажем это утверждение. Действительно, если момент внешних сил, действующих на твердое тело относительно некоторой оси равен нулю $\vec{M} = 0$, то изменение момента импульса относительно этой же оси равно нулю $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$,

откуда

$$\vec{L} = const\ . \qquad (53)$$

Выражение (53) представляет собой закон сохранения момента импульса: **момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени**.

Пример 1: рассмотрим случай вращательного движения человека, находящегося на скамье Жуковского. Скамья Жуковского представляет собой горизонтальную платформу (диск), которая может свободно вращаться без трения вокруг вертикальной оси OO_1. Человек сидит на скамье и держит в вытянутых руках гимнастические гантели и вращается вместе со скамьей вокруг оси OO_1 с угловой скоростью ω_1.



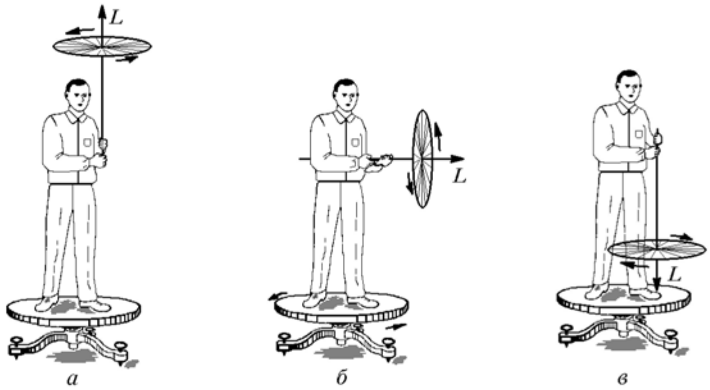
Если человек прижмет гантели к себе, то момент инерции системы уменьшится. Поскольку момент внешних сил (сил тяжести и реакции подшипников) относительно оси OO_1 равен нулю, то момент импульса системы относительно оси OO_1 сохраняется: $(I_0 + 2mr_1^2)\omega_1 = (I_0 + 2mr_2^2)\omega_2$,

где I_0 – момент инерции человека и скамьи относительно оси OO_1, $2mr_1^2$ и $2mr_2^2$ – моменты инерции гантелей в первом и втором положениях относительно оси OO_1, m – масса одной гантели, r_1 и r_2 – расстояния от гантелей до оси вращения, ω_1 и ω_2 – угловые скорости вращения системы. Очевидно, что если $r_2 < r_1$, то ω_2 возрастает.

Пример 2: человек стоит на неподвижной скамье Жуковского и держит в руках ось массивного колеса так, что она является продолжением оси OO_1 вращения скамьи.

Вначале колесо не вращается, а затем человек раскручивает его до угловой скорости $\vec{\omega}_1$. При этом он сам вместе со скамьей приходит во вращение в обратном направлении с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, которая, как показывает опыт, находится в полном согласии с законом сохранения момента импульса системы относительно неподвижной оси OO_1: $\vec{L} = const$. Вначале скамья не вращается, поэтому суммарный момент импульса системы равен нулю $\vec{L} = 0$, после того как колесо раскрутили суммарный момент импульса системы равен сумме моментов импульса колеса и скамьи: $\vec{L} = \vec{L}_K + \vec{L}_{CK} = I_K \vec{\omega}_1 + I_{CK} \vec{\omega}_2 = 0$. Из этого уравнения следует, что $\vec{\omega}_2 = -\dfrac{I_K}{I_{CK}} \vec{\omega}_1$. Скамья вращается в противоположном направлении вращению колеса.

Пример 3. Рассмотрите внимательно рисунок и объясните явление.



а *б* *в*

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем заключается закон сохранения механической энергии?
2. С каким фундаментальным свойством времени связан закон сохранения энергии? В чем состоит это свойство?
3. Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого удара?
4. Запишите законы сохранения для абсолютно упругого и абсолютно неупругого ударов.
5. Сформулируйте закон сохранения момента импульса. Приведите пример.
6. С каким фундаментальным свойством пространства связан закон сохранения момента импульса? В чем состоит это свойство?