Лекция 6

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Термины и понятия

Внешние силы системы
Внутренние силы системы
Высший порядок малости
Замкнутая система тел
Изотропность
Механическая система
Непрерывное отделение
Непрерывное присоединение
Однородность времени
Однородность пространства
Постоянная интегрирования
Продукты сгорания
Равнодействующая
Реактивная сила
Свободное падение
Уравнение Мещерского (уравнение движения тела с переменной массой)
Формула Циолковского
Центр масс (центр инерции)

6.1. ИЗОПРОПНОСТЬ И ОДНОРОДНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ

Совокупность материальных точек (или тел) называется механической системой. Состояние системы характеризуется одновременным заданием координат и скоростей всех ее частиц. При движении системы ее состояние изменяется со временем. Существуют, однако, такие величины, которые обладают замечательным свойством сохраняться во времени. Среди этих сохраняющихся величин наиболее важную роль играют энергия, импульс и момент импульса. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса имеют глубокие корни. Они связаны с фундаментальными свойствами пространства и времени – однородностью и изотропностью.

Так, закон сохранения импульса связан с однородностью пространства. Однородность пространства означает, что свойства пространства одинаковы во всех точках: если замкнутую систему тел перенести из одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в ней в те же условия, то это не отразится на ходе физических процессов.

Закон сохранения момента импульса является следствием изотропности пространства. Изотропность пространства означает, что свойства пространства в каждой точке одинаковы во всех направлениях: физические процессы не изменяются при повороте замкнутой системы в пространстве на любой угол.

Закон сохранения энергии связан с однородностью времени. Однородность времени означает, что протекание физических явлений (в одних и тех же условиях) в разное время их наблюдения одинаково. Например, при свободном падении тела в поле сил тяжести его скорость и пройденный путь зависят от начальной скорости и продолжительности свободного падения и не зависят от того, когда тело станет падать.

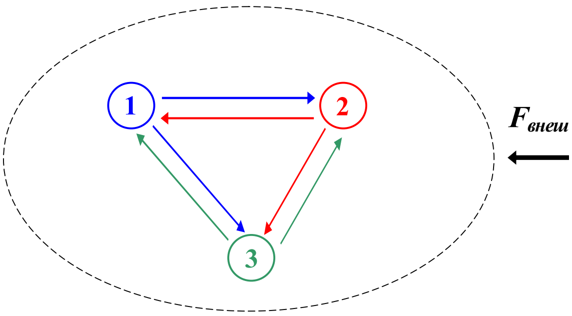
Законы сохранения далеко выходят за рамки механики и представляют собой универсальные законы природы. До сих пор не обнаружено ни одного явления, где бы эти законы нарушались. Они безошибочно «действуют» и в области элементарных частиц и в области космических объектов. Законы сохранения являются эффективным инструментом исследования, которым повседневно пользуются физики.

Изучение законов сохранения начнем с закона сохранения импульса.

6.2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК (ТЕЛ)

Закон сохранения импульса является следствием второго и третьего законов Ньютона. Тела, входящие в систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими системе.
Механическая система – совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое.

Внутренние силы – силы взаимодействия между материальными точками, входящими в механическую систему.



$$F_{внутр} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} F_{ik} = 0.$$

Для 3-х тел:

1: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$

2: $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}$

3: $\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = 0$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0.$$

Внешние силы – силы, которые действуют на систему со стороны тел, не входящих в систему.

Замкнутая (изолированная) система – система, на которую не действуют внешние силы.

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек (или тел).

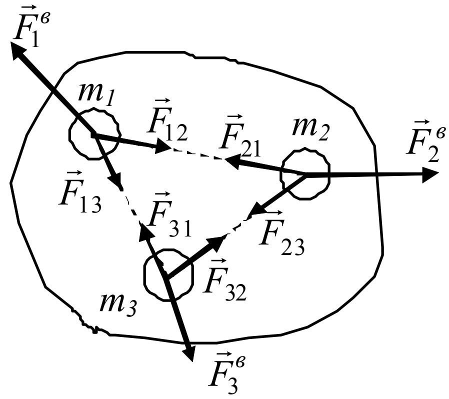
Пусть на каждое тело массой m_i действуют внутренние силы $\vec{F}_{ik}$ и внешние силы $\vec{F}_i^{в}$; тело приобретает скорость $\vec{\upsilon}_i$. Запишем второй закон Ньютона для каждого тела:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{\upsilon}_1\right)=\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}+......+\vec{F}_1^{в},$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_2\vec{\upsilon}_2\right)=\vec{F}_{21}+\vec{F}_{23}+......+\vec{F}_2^{в},$$

– –

$$\frac{d}{dt}\left(m_n\vec{\upsilon}_n\right)=\vec{F}_{n1}+\vec{F}_{n2}+......+\vec{F}_n^{в}.$$



Складываем эти уравнения. Так как по третьему закону Ньютона $\vec{F}_{ik}=-\vec{F}_{ki}$, то сумма всех внутренних сил равна 0.

Имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{в}.$$

Здесь $\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i=\vec{P}$ – импульс системы тел, $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{в}=\vec{F}^{в}$ – равнодействующая всех внешних сил.

Таким образом, **производная по времени от импульса механической системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему:**

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}^{в}.$$

Полученное выражение представляет собой закон изменения импульса $\vec{P}$ системы материальных точек и показывает, что скорость изменения импульса системы определяется только внешними силами.

Из этого уравнения следует, что приращение импульса системы равно импульсу внешних сил: $d\vec{P} = \vec{F}^{в} dt$ или $\Delta\vec{P} = \vec{P}_K - \vec{P}_H = \int_0^t \vec{F}^{в} dt$, где $\vec{P}_К$ и $\vec{P}_Н$ – импульс системы в конечном и начальном состоянии соответственно.

Рассмотрим замкнутую систему (внешние силы отсутствуют). Тогда

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0, \text{ т.е. } \vec{P} = const.$$

Последнее выражение является законом сохранения импульса: **импульс замкнутой системы сохраняется, то есть не изменяется с течением времени.**

Отметим, что закон сохранения импульса выполняется и для незамкнутой системы, если геометрическая сумма всех внешних сил равна 0.

Импульс системы материальных точек приблизительно сохраняется (не изменяется), если ограниченная по модулю внешняя сила действует в течение очень малого промежутка времени Δt. Действительно, согласно уравнению $\Delta\vec{P} = \vec{P}_K - \vec{P}_H = \int_0^t \vec{F}^{в} dt$ приращение импульса за промежуток времени Δt равно: $\Delta\vec{P} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}^{в} dt = \vec{F}^{в}_{ср} \Delta t$, где $\vec{F}^{в}_{ср}$ – средняя внешняя сила за промежуток времени Δt.

Если время Δt мало, то $\Delta\vec{P} \approx 0$ или $\vec{P} = const$, то есть импульс приблизительно остается постоянным.

Пример: во время взрыва в воздухе снаряда на него действует внешняя сила – сила тяжести. Время взрыва мало, поэтому импульсом силы тяжести можно пренебречь (не учитывать). Следовательно, импульс снаряда непосредственно перед взрывом равен суммарному импульсу образовавшихся осколков сразу после взрыва.

Для неограниченной по модулю внешней силы это утверждение несправедливо.

Закон сохранения импульса является фундаментальным законом природы. Он обладает большей общностью, чем законы классической механики (законы Ньютона).

6.3. ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС

В любой системе частиц имеется одна замечательная точка *C*, называемая центром масс (или центром инерции), которая обладает рядом интересных свойств. Ее положение относительно начала *O* данной системы отсчета характеризуется радиусом – вектором $\vec{r}_c$, определяемым как

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i ,$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – масса и радиус-вектор i-й частицы, m – масса всей системы, n – число частиц в системе.

Следует заметить, что центр масс системы совпадает с ее центром тяжести, впрочем, это утверждение справедливо лишь в том случае, когда поле сил тяжести в пределах данной системы можно считать однородным.

Найдем скорость $\vec{\upsilon}_c$ центра масс системы

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i .$$

Учитывая, что $\vec{P}_i = m_i \vec{\upsilon}_i$, а $\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i$ – есть импульс $\vec{P}$ системы, можно написать

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon}_c , \qquad (39)$$

то есть импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс. Продифференцируем выражение (39) по времени:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} .$$

По второму закону Ньютона $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$, отсюда получаем:

$$\vec{F} = m\vec{a}_c , \qquad (40)$$

где $\vec{a}_c$ – ускорение центра масс системы, $\vec{F}$ – геометрическая сумма внешних сил, приложенных к системе.

Это и есть уравнение движения центра масс системы: **центр масс системы частиц движется так, как двигалась бы материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы под действием всех приложенных к системе внешних сил.**

Пример. Человек прыгает с вышки в воду. Движение прыгуна в общем случае имеет весьма сложный характер. Однако если сопротивление воздуха пренебрежимо мало, то можно сразу утверждать, что центр масс прыгуна движется по параболе, как материальная точка, на которую действует постоянная сила $m\vec{g}$, где m – масса человека.

Из уравнения (40) следует, что если внешние силы $\vec{F} = 0$, то $\vec{a}_c = 0$, то есть центр масс системы, либо движется равномерно и прямолинейно, либо остается неподвижным.

Уравнение (40) по форме совпадает с основным уравнением динамики материальной точки и является его обобщением на систему частиц.

6.4. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Имеется много случаев, когда масса тела изменяется в процессе движения за счет непрерывного отделения или присоединения вещества (ракета, реактивный самолет, автомобиль для поливки улицы).

Наша задача: найти уравнение движения такого тела. Решение этого вопроса покажем на примере ракеты. Принцип действия ракеты состоит в следующем. Ракета с большой скоростью выбрасывает вещество (продукты сгорания), воздействуя на него с большой силой. Выбрасываемое вещество с такой же, но противоположно направленной силой в свою очередь действует на ракету и сообщает ей ускорение в противоположном направлении.

Пусть в момент времени t масса ракеты m, а ее скорость $\vec{\upsilon}$. Спустя время dt ее масса уменьшилась на dm и стала равной $m - dm$, а скорость стала равной $\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}$. Изменение импульса системы за время dt равно:

$$d\vec{P} = \left[(m - dm)(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}) + dm(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon} + \vec{u})\right] - m\vec{\upsilon},$$

где $\vec{u}$ – скорость истечения газов относительно ракеты. Раскроем скобки в этом уравнении, получим:

$$d\vec{P} = md\vec{\upsilon} + \vec{u}dm.$$

Так как на ракету действуют внешние силы $\vec{F}$ (сила тяжести, сила сопротивления воздуха), то согласно (18)

$$\vec{F}dt = md\vec{\upsilon} + \vec{u}dm \quad \text{или} \qquad m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} - \vec{u}\frac{dm}{dt}.$$

Величина $-\vec{u}\dfrac{dm}{dt} = \vec{F}_P$ называется реактивной силой. Это сила, с которой действуют на ракету вылетающие газы.

Тогда $$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_P \tag{41}$$
– уравнение движения тела с переменной массой (уравнение Мещерского).

Полученной формулой можно воспользоваться для расчета зависимости скорости ракеты от массы сгоревшего топлива. Будем считать, что внешние силы равны 0, то есть движение происходит только под действием реактивной силы:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\vec{u}\frac{dm}{dt}.$$

Если ракета движется прямолинейно, то $\upsilon = -u\int\frac{dm}{m} = -u\ln m + C$.

Значение постоянной интегрирования C определим из начальных условий. Пусть в начальный момент времени скорость ракеты равна 0, а масса равна m_0. Отсюда $C = u\ ln\ m_0$. Следовательно,

$$\upsilon = u\ln\left(m_0/m\right).$$

Это выражение называется формулой Циолковского. Она показывает, что при данной скорости истечения газов скорость ракеты определяется только отношением начальной массы m_0 ракеты к оставшейся массе m.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. С каким фундаментальным свойством пространства связан закон сохранения импульса? В чем состоит это свойство?
2. Что называется механической системой?
3. Какая система называется замкнутой?
4. В чем заключается закон сохранения импульса?
5. Что называется центром масс системы частиц?
6. Как движется центр масс замкнутой системы?
7. Напишите и объясните уравнение движения тела переменной массы.