Сегодня: среда, 18 сентября 2013 г.

Лекция 5

ВОЛНЫ

Содержание лекции:

1. Виды волн
2. Волновое уравнение
3. Упругие волны
4. Стоячие волны

1. Понятие волны. Виды волн

- ***Волна*** *– процесс распространения колебаний в пространстве* (при этом частицы среды движутся не поступательно, а совершают колебания около своего положения равновесия).

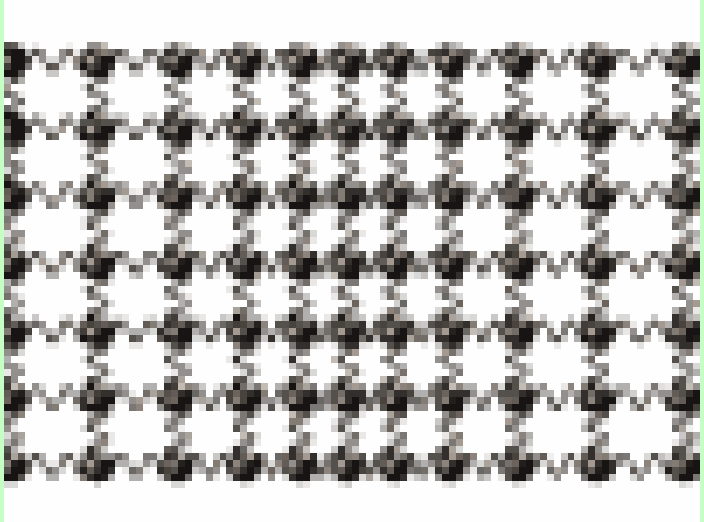
В зависимости от направления колебания частиц к направлению распространения волны различают:

- **Продольные волны:** частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны
- **Поперечные волны:** частицы среды колеблются перпендикулярно направлению распространения волны

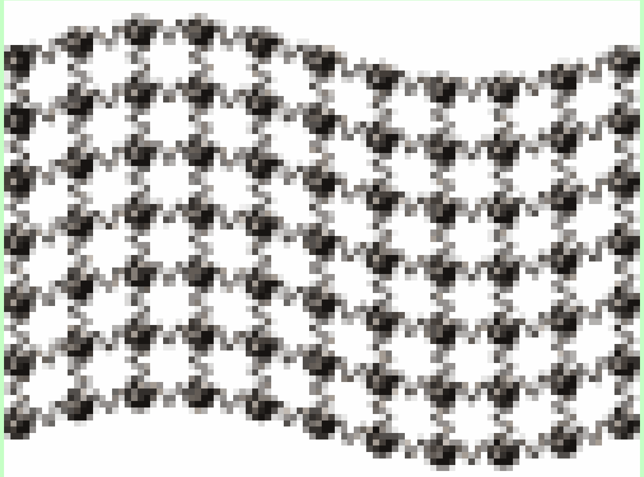
Если взаимосвязь между частицами среды осуществляется силами упругости, возникающими вследствие деформации среды при передаче колебаний от одних частиц к другим, то волны называются ***упругими*** (звуковые, ультразвуковые, сейсмические и др. волны).

Упругие поперечные волны возникают в среде, обладающей сопротивлением сдвигу, вследствие этого

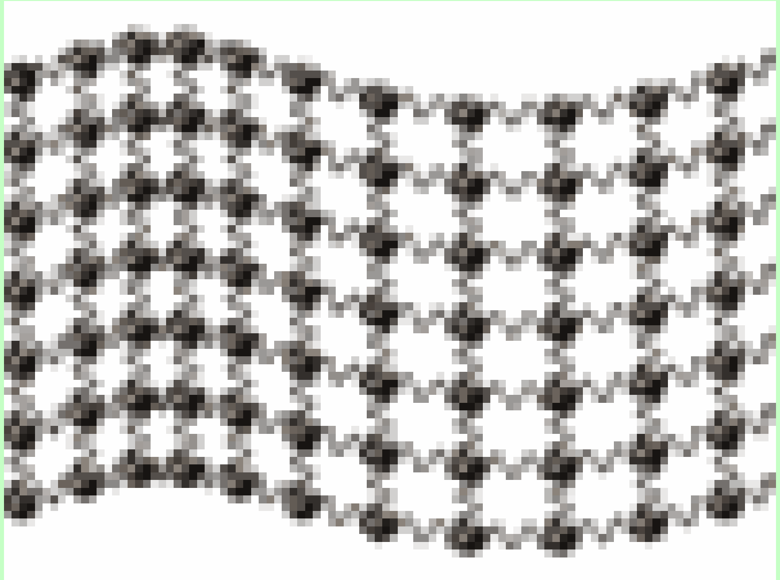
- в **жидкой и газообразной** средах возможно возникновение только **продольных** волн;
- в **твердой** среде возможно возникновение как продольных, так и **поперечных** волн.



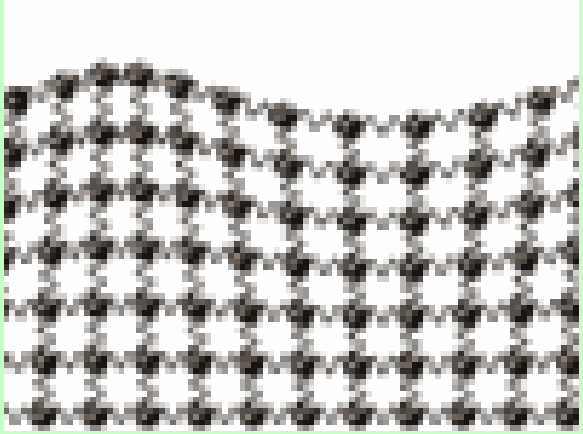
Процесс распространения продольной упругой волны



В поперечной волне колебания происходят в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны



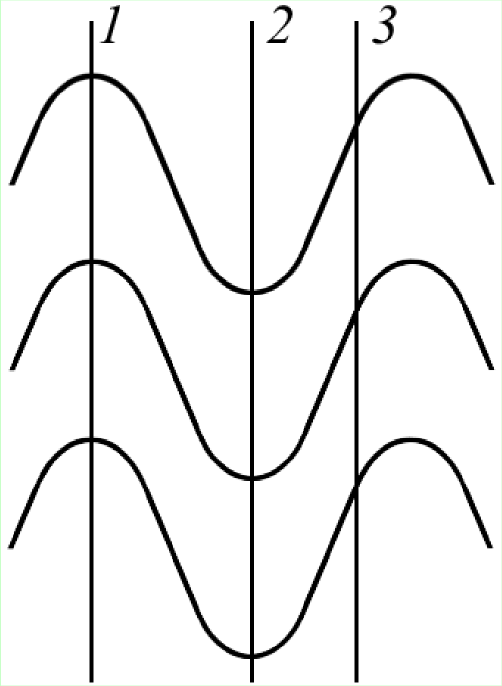
Наложение продольной и поперечной волн равной амплитуды, сдвинутых по фазе на $\pi/2$. В результате каждая масса совершает круговые движения.



Движение молекул в волне на поверхности жидкости

У **поверхностных волн** взаимосвязь между соседними молекулами при передаче колебаний осуществляется **не силами упругости, а силами поверхностного натяжения и тяжести**. В случае малой амплитуды волны каждая молекула движется по окружности, радиус которой **убывает с расстоянием от поверхности**. Нижние молекулы находятся в покое

Фронт волны – геометрическое место точек, до которых доходит возмущение в момент времени *t*: это та поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебаний еще не возникли.



Волновая поверхность – геометрическое место точек, колеблющихся **<u>в одинаковой фазе.</u>**

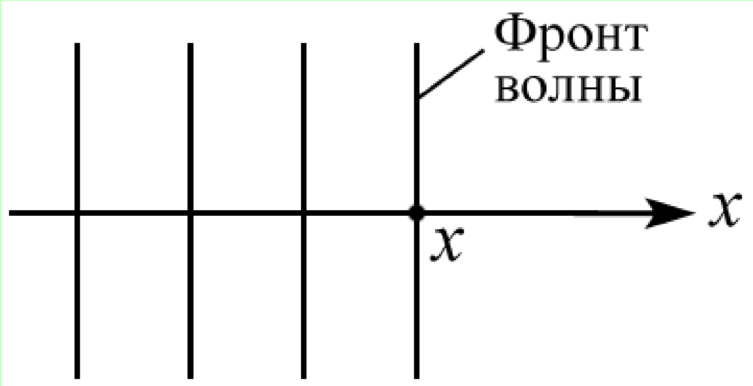
Число волновых поверхностей – <u>бесконечно</u>,
Фронт волны – <u>один</u>.

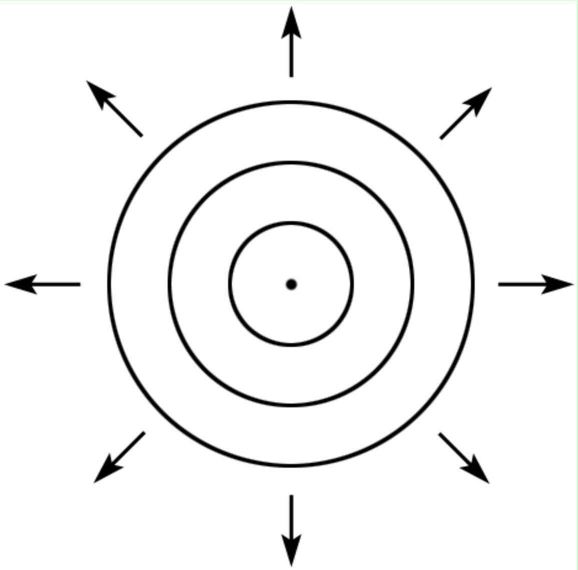
Волновые поверхности <u>неподвижны</u>,
Фронт волны <u>все время перемещается</u>.

В зависимости от формы волновой поверхности различают

• **плоские волны**: волновые поверхности – параллельные плоскости.

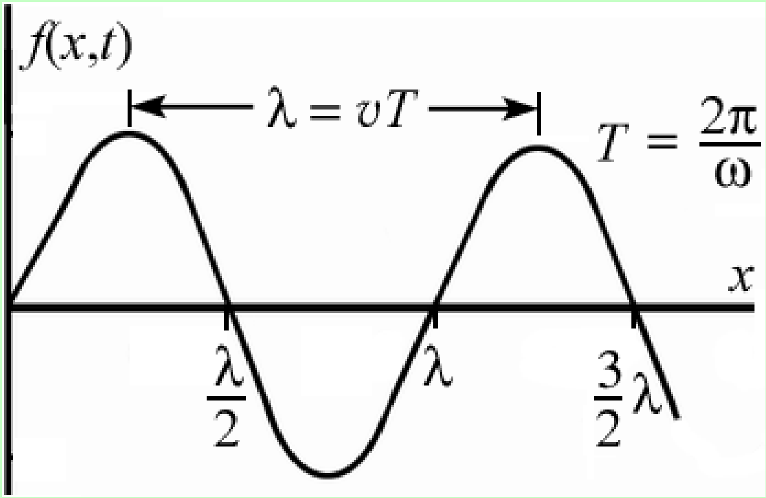
• **сферические волны**: волновые поверхности – концентрические сферы.





Для волнового движения, помимо амплитуды, периода, частоты, фазы вводится пространственная характеристика процесса – ***длина волны*** – *расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды*:

$$\boxed{\lambda = v T}$$



v – скорость волны,

T – период колебаний.

Связь длины волны с частотой ν:

$$\boxed{\lambda \nu = v}$$

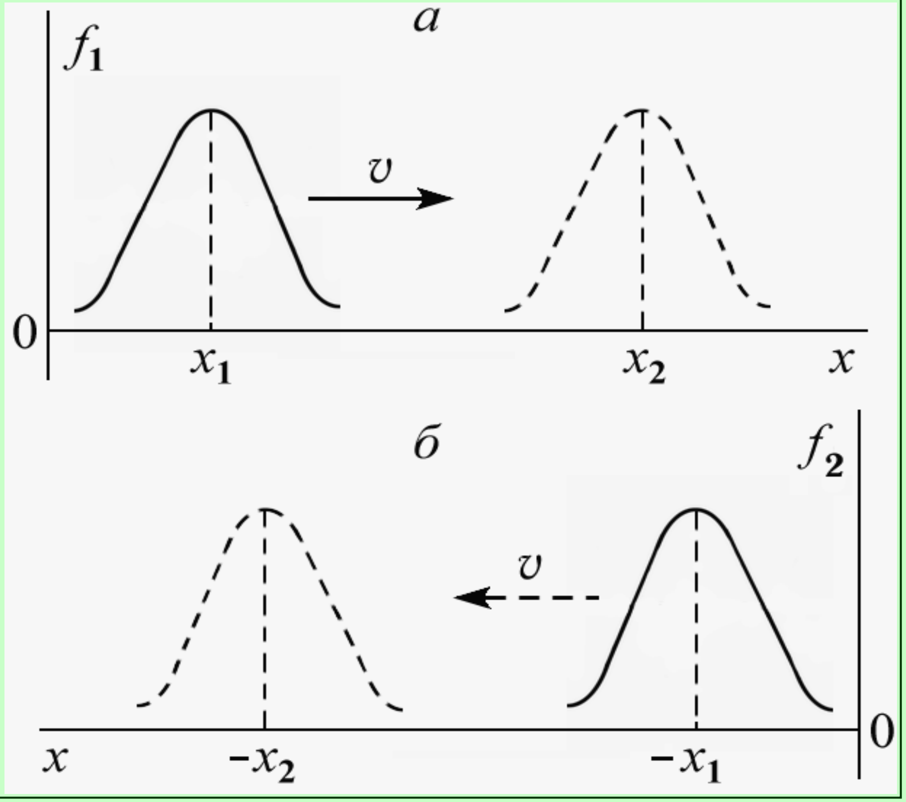
В среде **без дисперсии** скорость распространения синусоидальной волны **без изменения ее формы** есть ***скорость распространения поверхности постоянной фазы***, или ***фазовая скорость***.

2. Волновое уравнение

<u>Уравнение волнового процесса (волны)</u> – это выражение, дающее смещение колеблющейся частицы как функцию ее координат и времени:

<u>1) Для плоской волны</u> (в положительном направлении оси x):

$$s = f\left(x,t\right) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right]$$



В отрицательном направлении оси x:

$$s = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \varphi\right]$$

A – амплитуда волны;

φ – начальная фаза

Его можно записать в симметричной относительно x, t форме, введя величину:

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}}$$ - ***волновое число***

Тогда

$$\boxed{s = f\left(x,t\right) = A\cos\left(\omega t - kx + \varphi\right)} \quad (*)$$

При <u>поглощении средой энергии волны</u>

$$\boxed{s = A_0 e^{-\beta x}\cos\left(\omega t - kx + \varphi\right)}$$

- наблюдается **затухание волны** (уменьшение интенсивности волны по мере удаления от источника колебаний);

A_0 – амплитуда в точках плоскости $x = 0$;

β – коэффициент затухания.

2) Для сферической волны (от точечного источника, распространяющейся в однородной, изотропной среде):

$$\boxed{s = \frac{A}{r}\cos\left(\omega t - kr + \varphi\right)}$$

- амплитуда колебаний не остается постоянной, убывая с расстоянием от источника;

A – амплитуда на расстоянии от источника, равном единице;

r – расстояние от источника.

При поглощении средой энергии волны

$$\boxed{s = \frac{A}{r}e^{-\beta r}\cos\left(\omega t - kr + \varphi\right)}$$

β – коэффициент затухания.

3) Для плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении:

$$\boxed{s(\vec{r},t) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi\right)}$$

где $\vec{k}$ - ***волновой вектор****, направленный по нормали* $\vec{n}$ *к волновой поверхности; его длина равна волновому числу*:

$$\boxed{\vec{k} = k\vec{n}}$$

При поглощении средой энергии волны

$$\boxed{s(\vec{r},t) = Ae^{-\beta\vec{n}\vec{r}}\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi\right)}$$

β – коэффициент затухания.

Продифференцируем уравнение (*) дважды **по координате *x***:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} f''$$

Продифференцируем уравнение (*) дважды **по времени *t***:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = f''$$

Сопоставив выражения, получаем

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}}$$

- волновое уравнение

Для волны, распространяющейся в произвольном направлении:

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right)}$$

3. Упругие волны

Рассмотрим продольную плоскую волну в твердой среде:

Деформация среды в плоскости x:

(взят символ частной производной,

т.к. $s = s(x,t)$)

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\partial s}{\partial x}}$$

Нормальное напряжение

пропорционально деформации

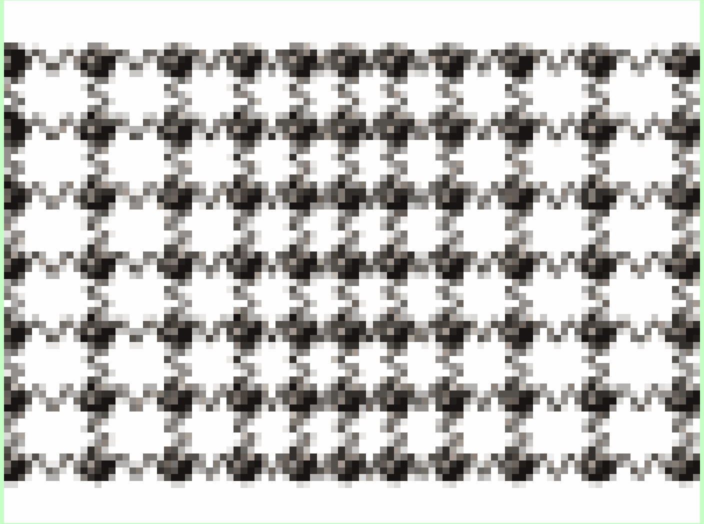
(для малых деформаций):

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon = E\,\frac{\partial s}{\partial x}}$$

где E – **модуль Юнга** среды.

• В положениях максимального отклонения частиц от положения равновесия ($\partial s/\partial x = 0$) **$\varepsilon = 0$, $\sigma = 0$**

• В местах прохождения частиц через положения равновесия **ε, σ максимальны** (с чередованием $\pm\varepsilon$, т.е. растяжений и сжатий)



Процесс распространения продольной упругой волны

Скорость продольной волны связана с характеристиками среды следующим образом:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$, где ρ – плотность среды.

Для поперечной волны $$\boxed{v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}}$$, *G* – модуль сдвига.

Энергия упругой волны:

$$\boxed{w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi)}$$

- плотность энергии упругой волны (как поперечной, так и продольной) в каждый момент времени в разных точках пространства различна.

При усреднении по времени:

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2}$$

– справедливо для незатухающих, затухающих плоских волн; сферических волн и т.д...

Поток энергии через некоторую поверхность – количество энергии, переносимое волной через эту поверхность в единицу времени:

$$\boxed{\Phi = \frac{dW}{dt}}$$

W - энергия волны.

Размерность потока энергии:

[Ф] = Дж/с = Вт

Для характеристики течения энергии в разных точках пространства вводится величина, называемая **плотностью потока энергии:**

• численно равная потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке пространства перпендикулярно направлению, в котором переносится энергия;

• направление совпадает с направлением переноса энергии.

$$\boxed{\vec{j} = w\vec{v}}$$

– ***вектор плотности потока энергии (вектор Умова)***...

$\vec{v}$ - вектор, численно равный фазовой скорости, направленный вдоль направления распространения волны (и переноса энергии).

Среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой волной, - ***интенсивность волны***

$$\boxed{\langle \vec{j} \rangle = \langle w \rangle \vec{v} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \vec{v}}$$

<u>Связь вектора Умова с потоком энергии:</u>

По определению,

$$dW = \vec{j} \cdot d\vec{S} \cdot dt \ , \qquad d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$$

Следовательно, <u>поток энергии через площадку *dS*</u>

$$d\Phi = \frac{dW}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Полный поток энергии *равен потоку вектора* $\vec{j}$ *через поверхность S.*

$$\boxed{\Phi = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}}$$

4. Стоячие волны

Принцип суперпозиции волн: *при одновременном распространении в среде нескольких волн наблюдается их суперпозиция (наложение) без взаимного возмущения.*

Когерентные волны *– волны, разность фаз между которыми постоянна.*

Интерференция *– явление сложения когерентных волн, при котором колебания в одних точках усиливают, а в других ослабляют друг друга.*

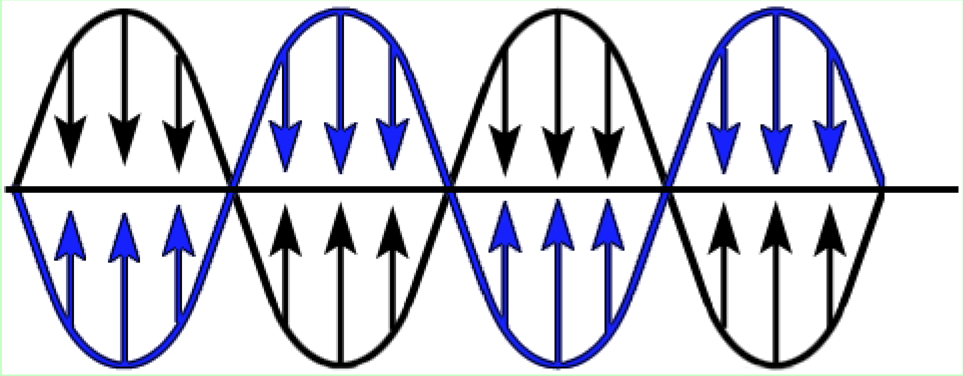
Рассмотрим наложение двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой:

Падающая на преграду волна: $s_1 = A\cos(\omega t - kx)$

Отраженная волна: $s_2 = A\cos(\omega t + kx)$

Результирующее возмущение - ***стоячая волна***:

$$\boxed{s = s_1 + s_2 = 2A\ \cos kx\ \cos\omega t}$$



Амплитуда

$$\boxed{A = 2a \cos kx}$$

Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна, называются ***пучностями***;

их координаты определяются условием $kx = \pm \pi n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

Следовательно,

$$\boxed{x_{пучн} = \pm \frac{\pi n}{k} = \pm n \frac{\lambda}{2}}$$

Точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю, называются ***узлами***;

их координаты определяются условием $kx = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

Следовательно,

$$\boxed{x_{узл} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}}$$

Определим **расстояние между соседними узлами (пучностями):**

$$k\Delta x \equiv \pi$$

Тогда

$$\boxed{\Delta x \equiv \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}}$$

- расстояние между соседними пучностями, как и соседними узлами, одинаково и составляет **половину длины волны.**

Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на **четверть длины волны**.