Сегодня: среда, 18 сентября 2013 г.

Лекция 4

ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

Содержание лекции:

1. Сопротивление в цепи переменного тока
2. Емкость в цепи переменного тока
3. Индуктивность в цепи переменного тока
4. Закон Ома для переменных токов
5. Резонанс напряжений
6. Работа и мощность переменного тока
7. Правила Кирхгофа для переменных токов

Квазистационарные токи:

время τ, в течение которого электрические величины принимают установившиеся значения, <u>мало по сравнению с периодом колебаний</u> T (мгновенное значение I <u>одно и то же в любом месте контура</u>).

Будем рассматривать токи, изменяющиеся по закону

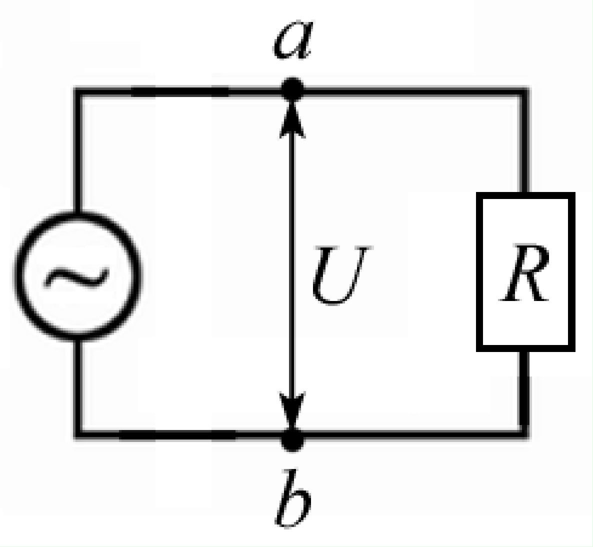
$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

I_0 – амплитуда колебаний;

ω - частота колебаний;

φ - начальная фаза.

1. Сопротивление в цепи переменного тока



Переменный ток в цепи

(*C*, *L* пренебрежимо малы):

$$I = I_0 \sin \omega t$$

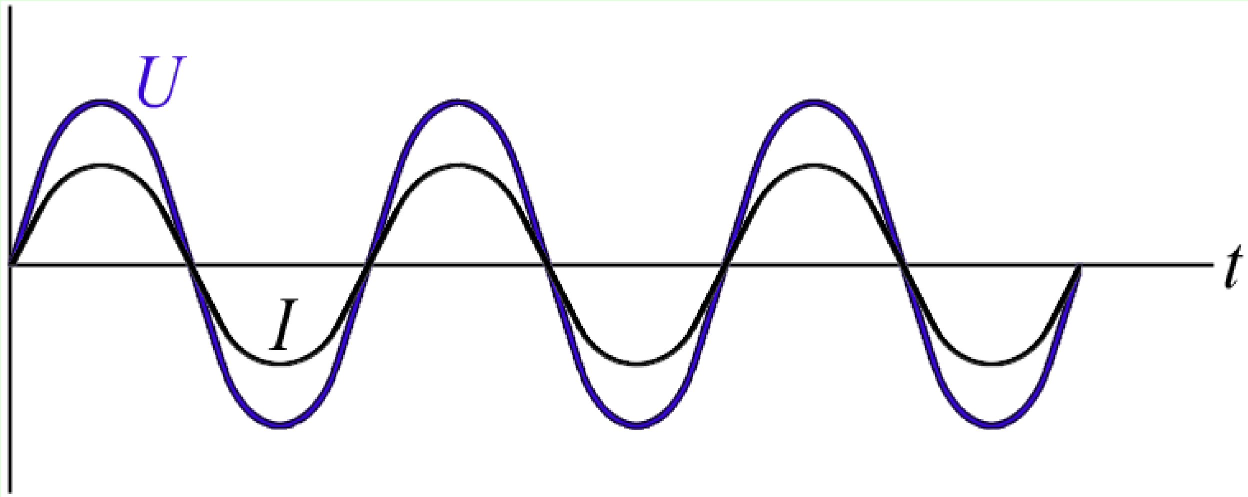
Найдем напряжение на концах участка *ab*:

согласно закону Ома,

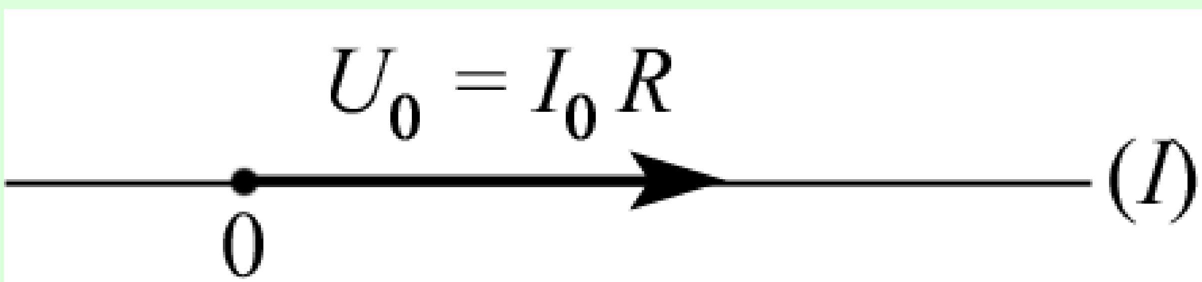
$U = IR = I_0 R \sin \omega t$ – **синфазно с током**

Амплитуда напряжения:

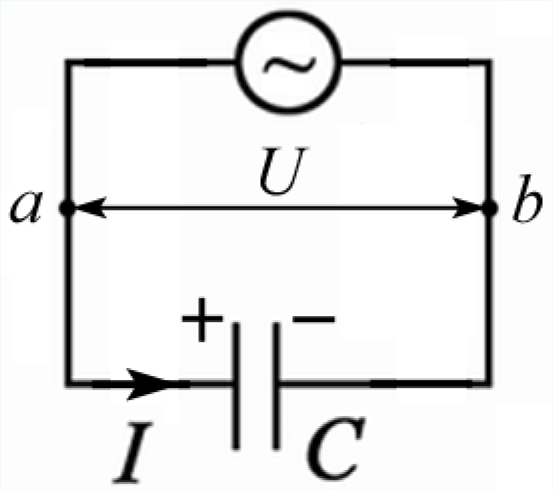
$$U_0 = I_0 R$$



Векторная диаграмма напряжения на сопротивлении:



2. Емкость в цепи переменного тока



Рассмотрим цепь с $R \to 0,\ L \to 0$

Ток в цепи: $I = I_0 \sin \omega t,$

По определению $I = \dfrac{dq}{dt}$

Определим заряд конденсатора:

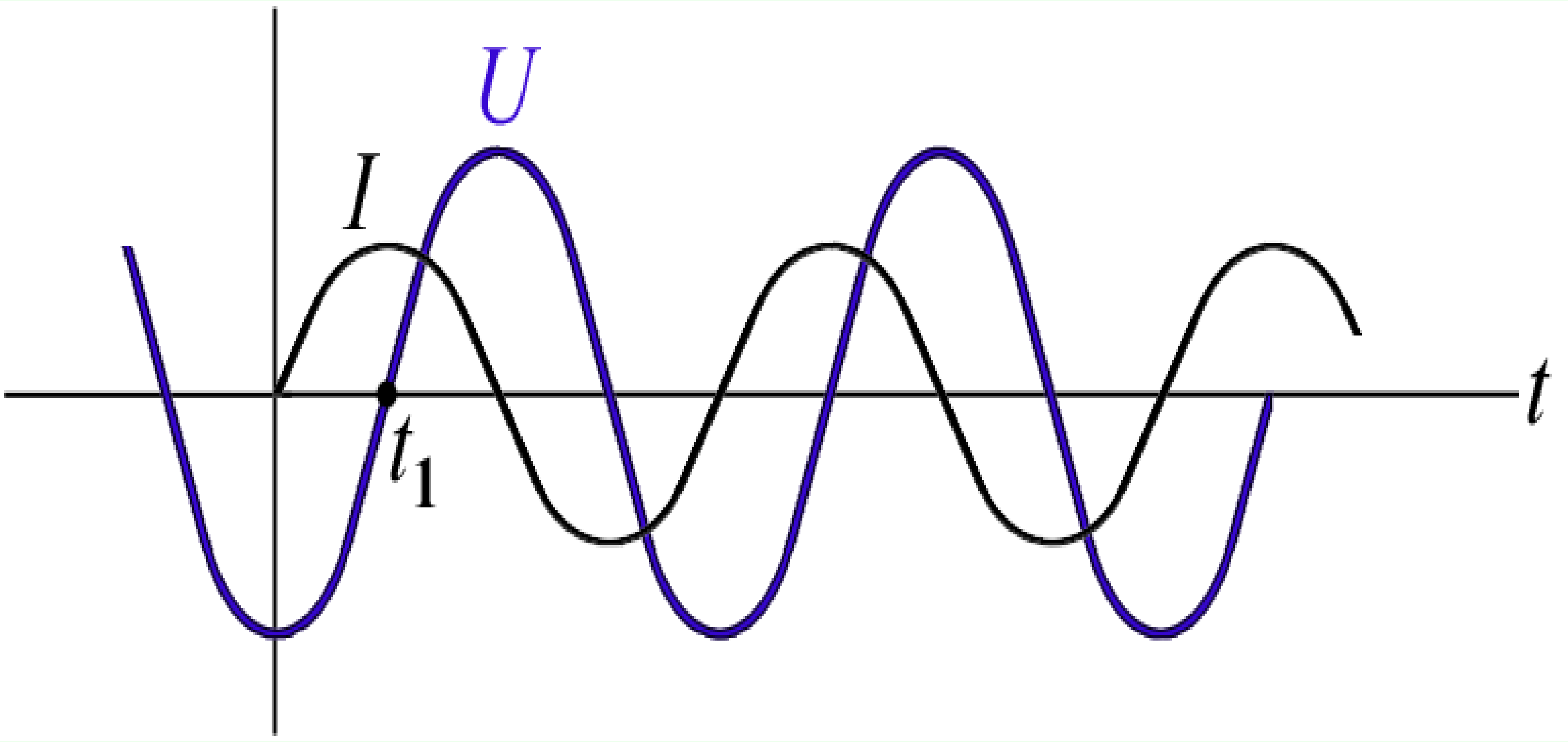
$$q = \int I dt = \int I_0 \sin \omega t dt = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t + q_0$$

где q_0 – произвольный постоянный заряд конденсатора, не связанный с колебаниями тока (положим $q_0 = 0$).

Напряжение на концах участка:

$$\boxed{U = \frac{q}{C} = -\frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_0}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

- отставание по фазе от тока на $\pi/2$



U
I
t
t_1

Амплитуда напряжения:

$$\boxed{U_0 = \frac{I_0}{\omega C}}$$

Сопоставляя с законом Ома

$$U = IR,$$

получаем

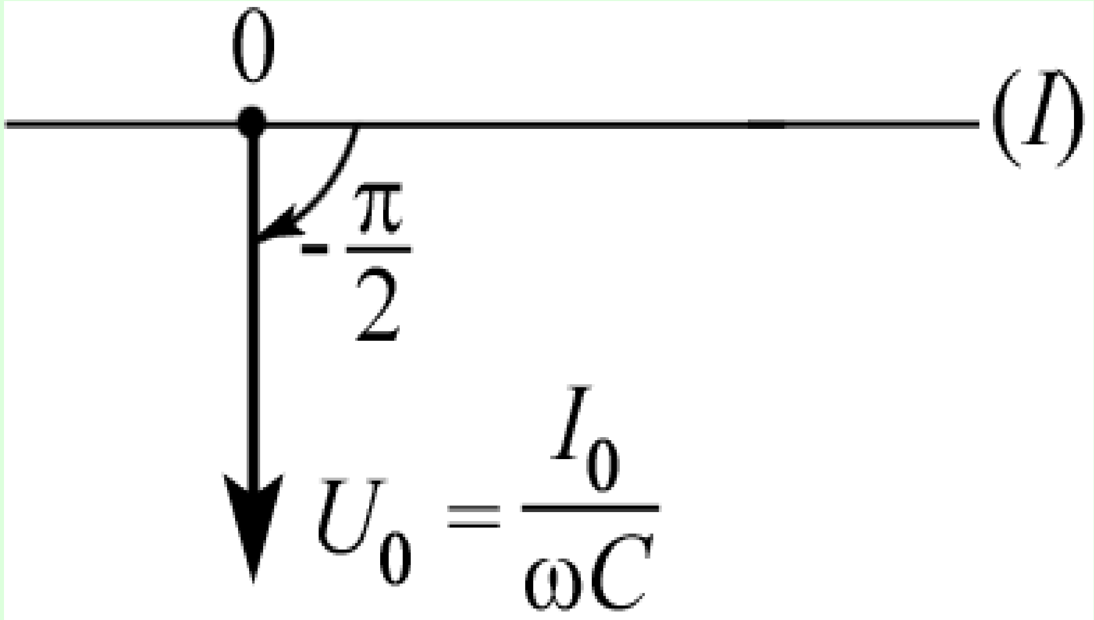
$$\boxed{R_C = \frac{1}{\omega C}}$$

- **кажущееся сопротивление емкости**

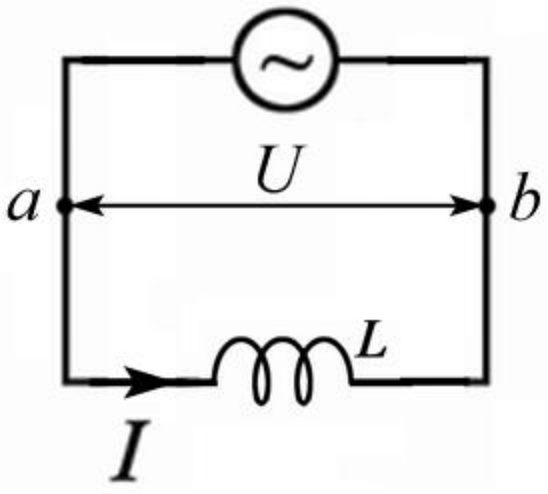
емкостное сопротивление

Оно определяет амплитуду силы тока: чем меньше электроемкость и частота, тем меньше амплитудное значение силы тока. Для постоянного тока емкость является бесконечно большим сопротивлением и тока в цепи не будет

Векторная диаграмма:



3. Индуктивность в цепи переменного тока



Рассмотрим цепь с $R \to 0$:

при наличии переменного тока в катушке возникает ЭДС самоиндукции.

По закону Ома для участка цепи с ЭДС:

$$U = IR - \varepsilon_C = -\varepsilon_C$$

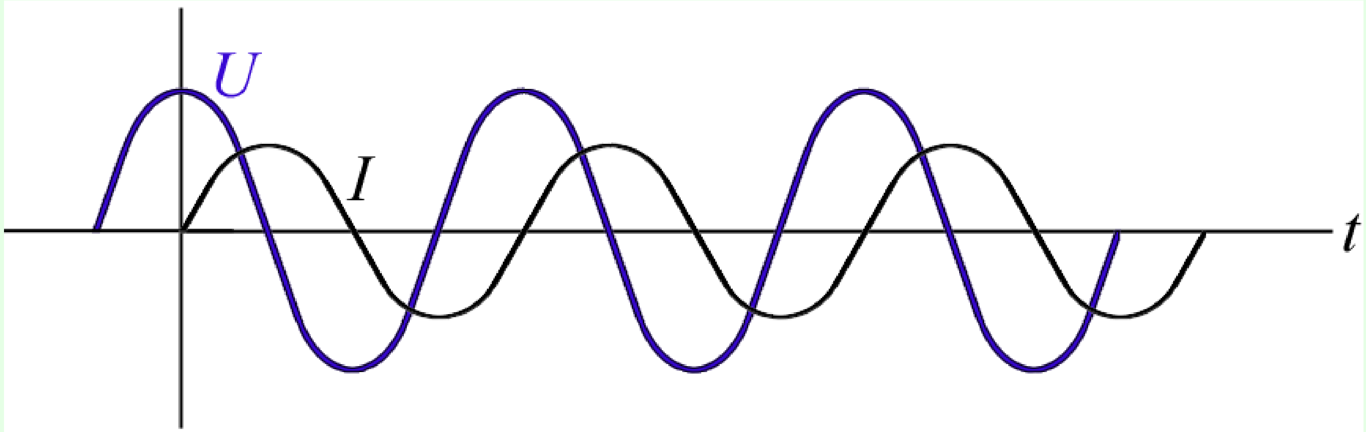
ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_C = -L\frac{dI}{dt}$$

Тогда напряжение:

$$\boxed{U = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d\left(I_0 \sin\omega t\right)}{dt} = \\ = LI_0\omega\cos\omega t = LI_0\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

- опережает по фазе ток на $\pi/2$



Амплитуда напряжения:

$$\boxed{U_0 = I_0 \omega L}$$

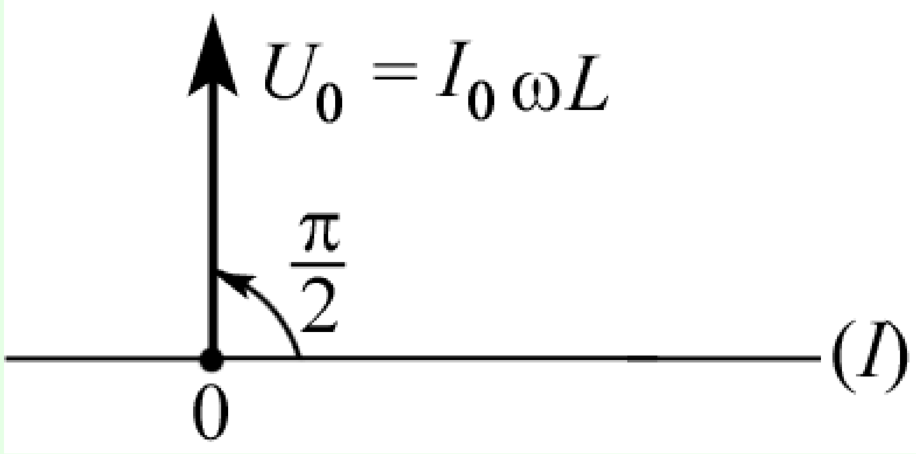
Кажущееся сопротивление индуктивности,

$$\boxed{R_L = \omega L}$$

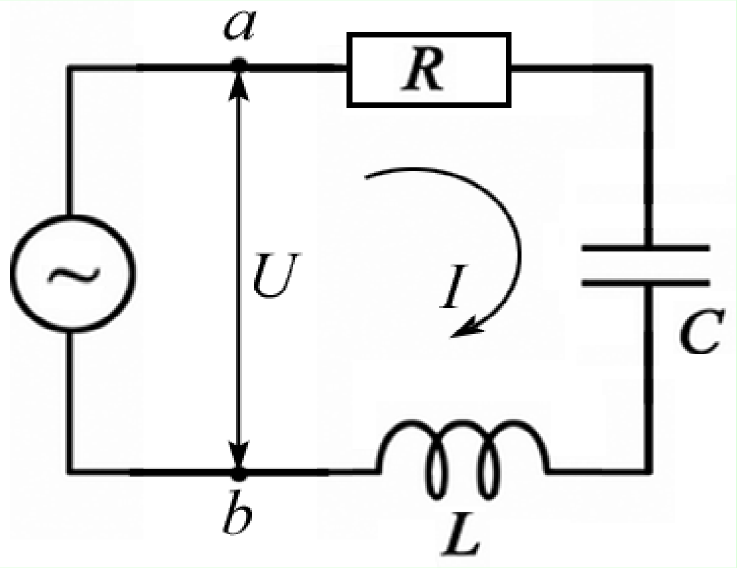
индуктивное сопротивление

(основа работы дросселей)

Векторная диаграмма:



4. Закон Ома для переменного тока

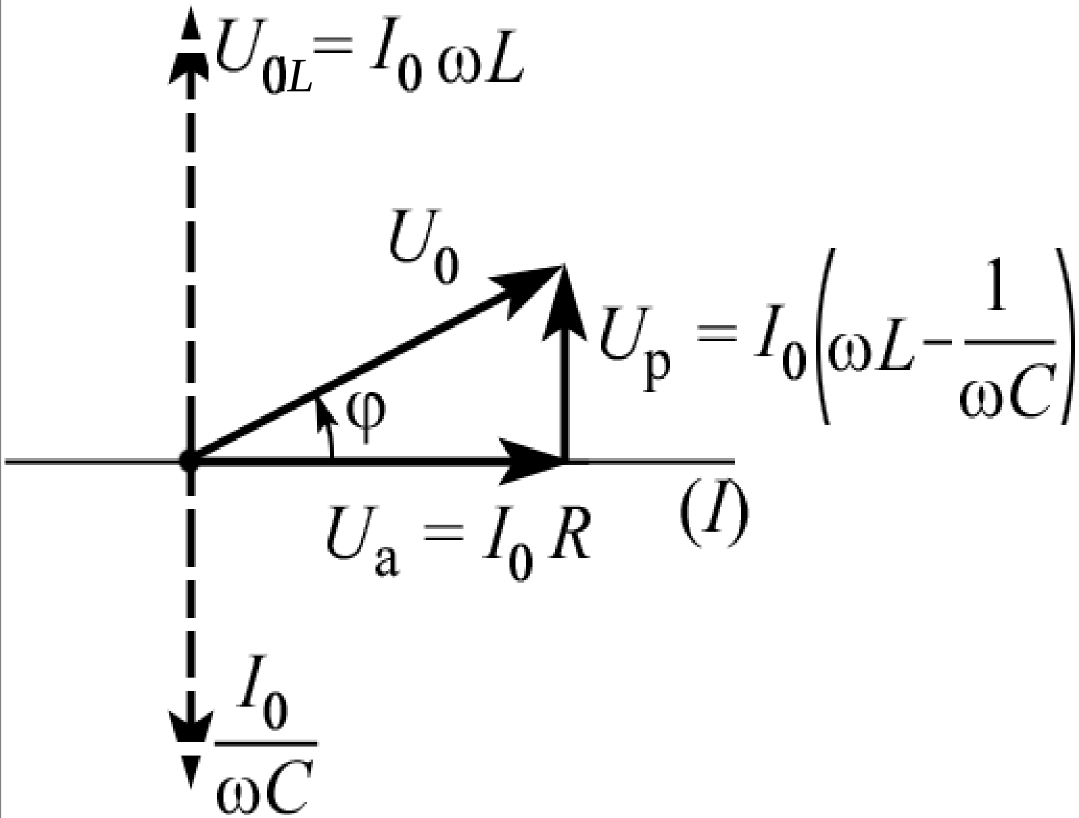


<u>Напряжение при последовательном соединении</u>:

$$U = \sum U = U_R + U_C + U_L$$

Сумма $$\boxed{U_{0C} + U_{0L} = U_p = I_0\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$ ***- реактивная составляющая напряжения***

$$\boxed{U_{0R} \equiv U_a = I_0 R}$$ ***- активная составляющая напряжения***



<u>Результирующее колебание</u>:

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

<u>Фаза</u>:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_p}{U_a} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}}$$

<u>Амплитуда напряжения</u>:

$$\boxed{U_0 = I_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

закон Ома для переменного тока

Полное сопротивление цепи (импеданс):

$$\boxed{R_{полн} = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Омическое сопротивление *R* –

активное сопротивление

$$\boxed{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

- реактивное сопротивление

5. Резонанс напряжений

Пусть в цепи действует переменная ЭДС:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \sin \omega t$$

Ток в цепи:

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi),$$

где

$$\boxed{I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R_{полн}}}$$

$$\boxed{R_{полн} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$

Изменение *I* при изменении ω:

При ω = 0: $1/\omega C \to \infty, \quad R_{\text{полн}} \to \infty$

-конденсатор не проводит постоянный ток

При возрастании ω: $R_{\text{полн}}$ убывает, I_0 возрастает

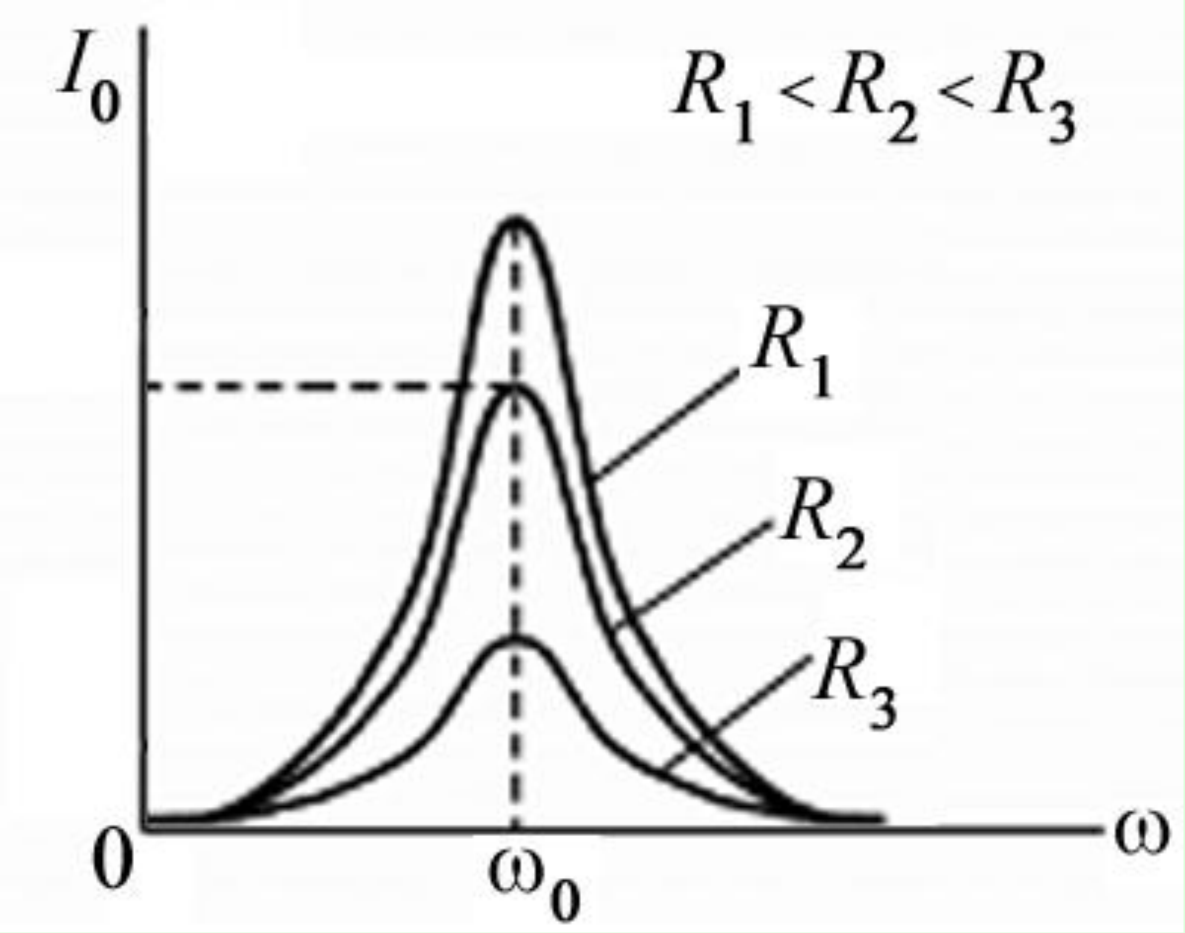
При ω = ω_0:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0, \quad R_{\text{полн}} = R.$$

- сопротивление минимально, амплитуда силы тока максимальна – контур ведет себя как чисто активное сопротивление – **резонанс напряжений**.

При ω > ω_0: $R_{\text{полн}}$ возрастает, $I \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0$



Резонансные кривые

Изменение сдвига фазы колебаний

при изменении ω:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

При очень малых ω: $\omega L << \dfrac{1}{\omega C}$ $\operatorname{tg}\varphi \to -\infty$, $\varphi \to -\dfrac{\pi}{2}$

(ток опережает напряжение, имея емкостный характер)

При $\omega = \omega_0$: $\operatorname{tg}\varphi = 0$, $\varphi = 0$ – **резонанс напряжений**

При возрастании ω:

$\operatorname{tg}\varphi \to +\infty$, $\varphi \to +\dfrac{\pi}{2}$

(ток отстает от напряжения, имея индуктивный характер)

Амплитуда напряжения на емкости и индуктивности при резонансе:

$$U_{0C} = I_0 R_C = \frac{\varepsilon_0}{R\omega_0 C} = \varepsilon_0 Q$$

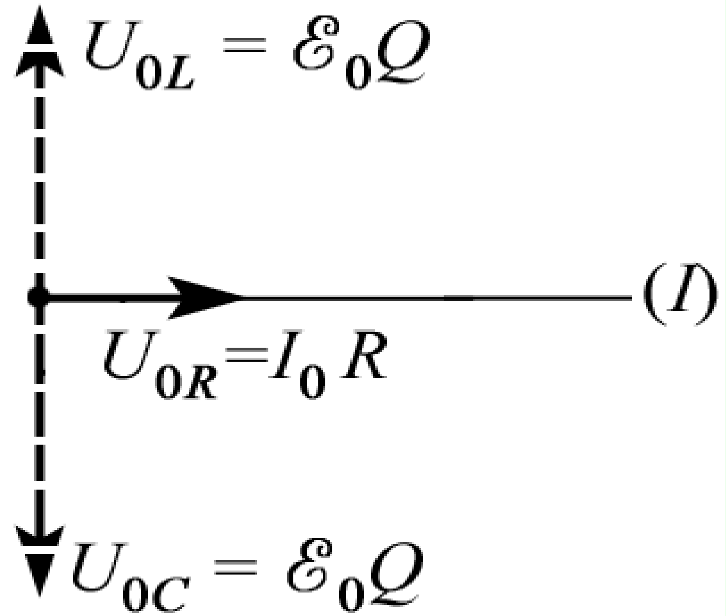
$$U_{0L} = I_0 R_L = \frac{\varepsilon_0}{R}\omega_0 L = \varepsilon_0 Q$$

$$Q = \frac{1}{R\omega_0 C}$$

- добротность контура.

Векторная диаграмма при резонансе:

амплитуды напряжений U_{0C}, U_{0L} одинаковы, но между напряжениями разность фаз π



6. Работа и мощность переменного тока

При наличии только активного сопротивления:

(вся работа переходит в тепло):

Напряжение на концах участка цепи:

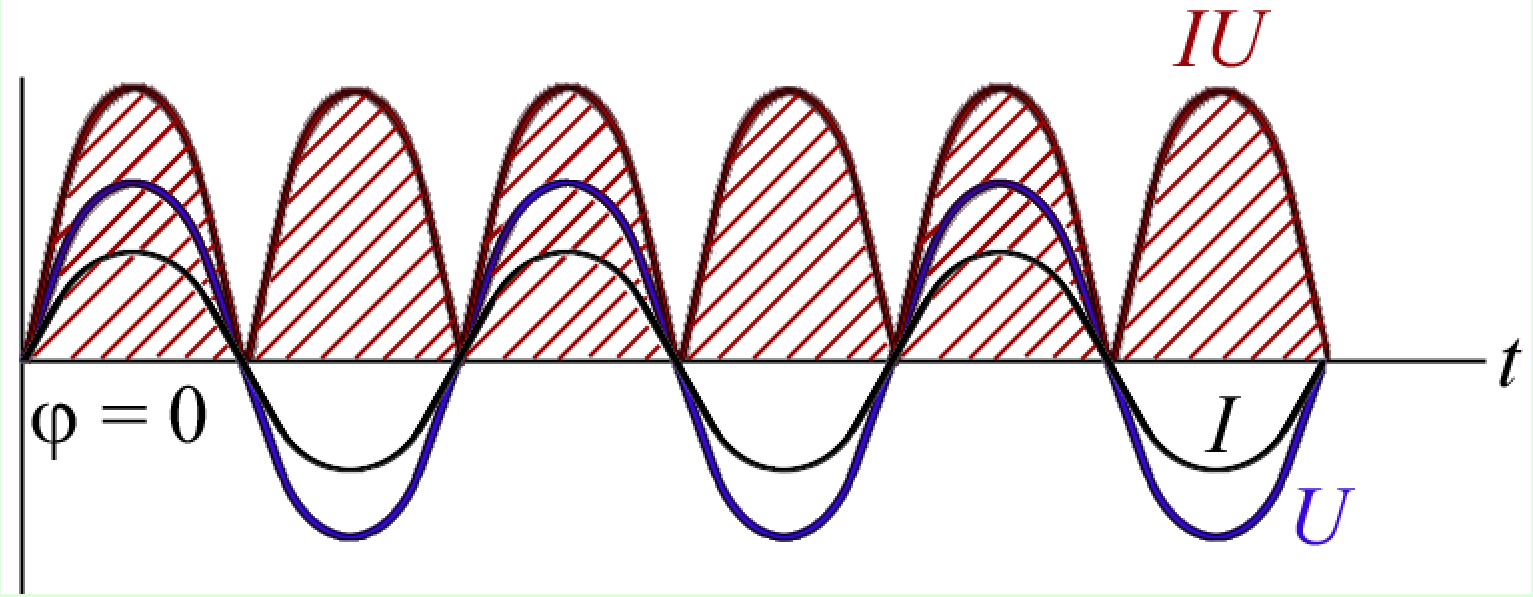
$$U = U_0 \sin \omega t$$

Переменный ток в цепи:

$$I = I_0 \sin \omega t$$

Мгновенное значение мощности (I = const):

$$P_t = IU = I_0 U_0 \sin^2 \omega t$$



Работа переменного тока за dt:

$$A = P_t\, dt = I_0 U_0 \sin^2 \omega t\, dt$$

Работа переменного тока за период:

$$A_T = I_0 U_0 \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} I_0 U_0 \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} I_0 U_0 \left(t - \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{T} t \right) \Bigg|_0^T = \frac{1}{2} I_0 U_0 T$$

<u>Средняя мощность</u>:

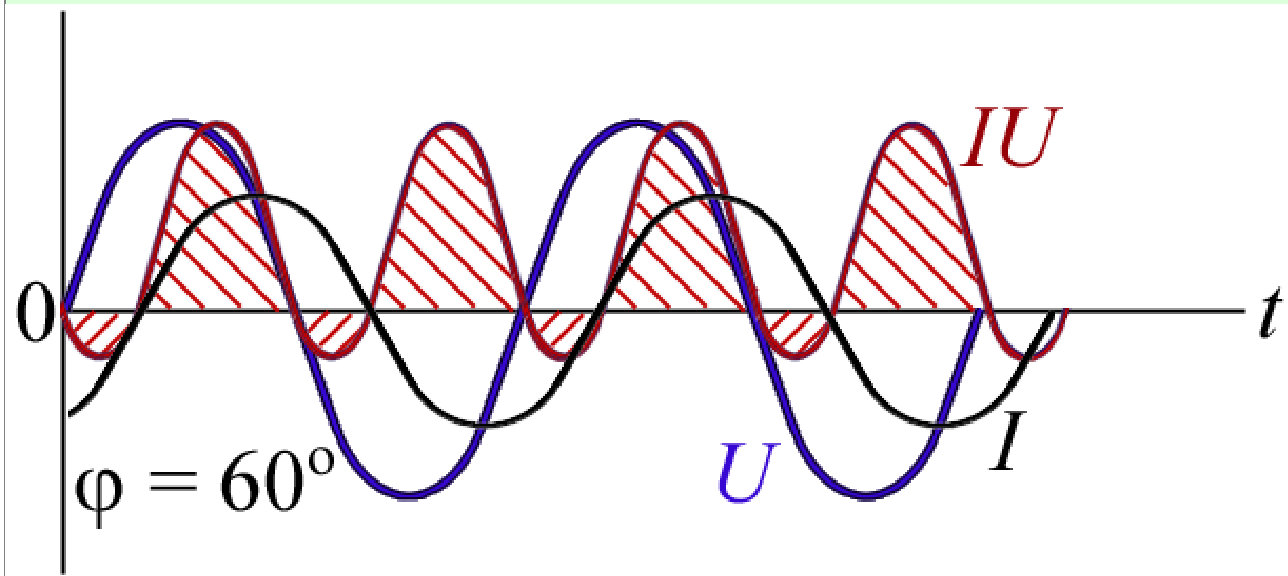
$$\boxed{P = \frac{A}{T} = \frac{I_0 U_0}{2}}$$

Эффективные значения силы тока, напряжения:

$$\boxed{I_{эфф} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}} \qquad \boxed{U_{эфф} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}}$$

- *равны силе тока, напряжения постоянного тока, которые выделяют в сопротивлении R то же количество теплоты, что и данный переменный ток.*

При наличии реактивного сопротивления



- колебания мгновенной мощности с переменой знака (средняя мощность уменьшается)

Работа переменного тока за dt:

$$A = P_t\,dt = I\,U\,dt, \quad \text{где} \quad U = \begin{cases} U_a = U_0 \cos\varphi \sin\omega t \\ U_p = U_0 \sin\varphi \sin\left(\omega t \pm \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Работа переменного тока за период:

$$\int_0^T U_p dt = 0$$

$$A_T = I_0 U_0 \cos\varphi \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} I_0 U_0 T \cos\varphi$$

Средняя мощность:

$$\boxed{P = \frac{A_T}{T} = \frac{I_0 U_0}{2} \cos\varphi}$$

Cos φ - ***коэффициент мощности***.

При cos φ = 0   *P* = 0

Площади заштрихованных фигур численно равны энергии, которая поступает от источника в цепи (если площади положительные, т.е. расположены выше оси времени) или от цепи в источник (если площади отрицательны, т.е. расположены ниже оси времени).

Электроэнергия используется наиболее полно в том случае, когда она не возвращается источнику. Поэтому на промышленных предприятиях с большим потреблением энергии при наличии в сети индуктивностей (трансформаторы, электромоторы и т.д.) увеличение Cos φ является важной задачей.

7. Правила Кирхгофа для переменных токов

1) К переменным токами без всяких изменений применимо ***первое правило Кирхгофа:*** *в любой момент времени сумма сил токов, подходящих к разветвлениям, должна равняться сумме сил токов, отходящих от нее.*

2) Второе правило Кирхгофа также применимо к переменным токам, если омические сопротивления заменить на соответствующие комплексные сопротивления:

Введем понятие **комплексного сопротивления (импеданса):**

$$\boxed{Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Тогда ***второе правило Кирхгофа***:

$$\boxed{\sum_k Z_k I_k = \sum_k \varepsilon_k}$$

Импедансы элементов цепи:

- Катушка индуктивности: $\boxed{Z_L = i\omega L}$

- Емкость: $\boxed{Z_C = -\dfrac{i}{\omega C}}$

- Омическое сопротивление: $\boxed{Z_R = R}$

Закон Ома в комплексной форме: $$\boxed{I = \frac{\varepsilon}{Z} = \frac{\varepsilon}{R + i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}}$$

Импеданс соединений:

$\boxed{Z = \sum_k Z_k}$ - последовательного

$\boxed{\dfrac{1}{Z} = \sum_k \dfrac{1}{Z_k}}$ - параллельного