Сегодня: среда, 18 сентября 2013 г.

Лекция 2

Колебания

Содержание лекции:

Затухающие колебания

- механические
- электрические

1.1. Затухающие механические колебания

Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний уменьшается.

Сила трения (или *сопротивления*)

$$\boxed{\vec{\mathrm{F}}_{\text{тр}} = -r\vec{\upsilon}}$$

где r – коэффициент сопротивления,

$\vec{\upsilon}$ – скорость движения

Второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси x

$$\boxed{ma_x = -kx - r\upsilon_x}$$

где kx – возвращающая сила, $r\upsilon_x$ – сила трения.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Введем обозначения $\frac{r}{2m} = \beta;$ $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

Решение уравнения имеет вид (при $\beta \le \omega_0$)

Решение уравнения имеет вид

$$\boxed{x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)}$$

Найдем ***частоту колебаний*** ω. $(\omega \neq \omega_0)$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \qquad \beta \le \omega_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ; \qquad \beta = \frac{r}{2m}\ ; \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

ω_0 – ***собственная частота системы***: та частота, с которой система совершала бы свободные колебания в отсутствие сопротивления среды (r = 0).

$$\boxed{\beta = \frac{r}{2m}}$$

- ***коэффициент затухания***, определяющий **скорость затухания** колебаний:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\beta}}$$

где τ – **<u>время затухания</u>** – *время, по истечении которого амплитуда колебаний убывает в **е** раз.*

<u>Период затухающих колебаний</u>

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2 / \omega_0^2}} > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

- при слабом затухании близок к периоду незатухающих колебаний; **с ростом β увеличивается период**.

Число полных колебаний, совершаемых за время затухания:

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}$$

Отношение амплитуд в моменты последовательных прохождений через максимумы или минимумы:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \mathrm{e}^{\beta T}$$

- декремент затухания.

Натуральный логарифм этого отношения:

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \mathrm{e}^{\beta T} = \beta T$$

- логарифмический декремент затухания.

Связь с числом колебаний N_e:

$$\boxed{N_e = \frac{1}{\delta}}$$

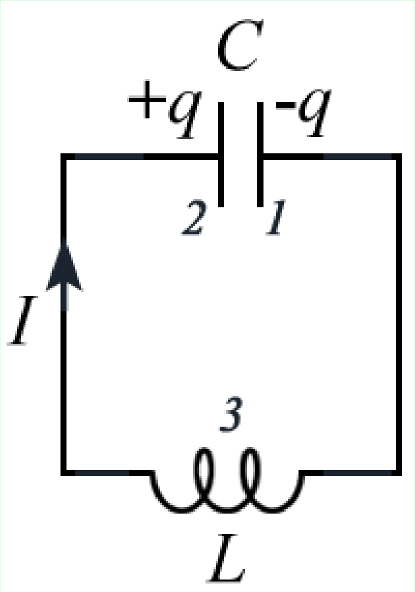
Добротность колебательного контура:

$$\boxed{Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta}}$$

- *умноженное на* π *число полных колебаний, по истечении которых амплитуда уменьшается в е раз.*

Чем меньше затухание, тем выше добротность.

Электрический колебательный контур



Закон Ома для цепи *123*:

$$IR = \underbrace{\varphi_1 - \varphi_2}_{-\frac{q}{C}} + \varepsilon = 0 \quad (\text{т.к. } R = 0)$$

Поскольку

$$\varepsilon_C = -L\frac{dI}{dt} \quad \text{и} \quad I = \frac{dq}{dt}$$

получаем уравнение колебаний в контуре: $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}q = 0$

$\boxed{\dfrac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0}$, где $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ - ***собственная частота контура***

Его решение:

$$\boxed{q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$ *- гармонические колебания*

<u>Начальные условия (t = 0)</u>: $q = q_0$, $I = 0$.

Тогда

$$\boxed{q = q_0 \cos \omega_0 t}$$

Период колебаний

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}}$$ ***- формула Томсона***

Напряжение на конденсаторе:

$$\boxed{U=\frac{q}{C}=\frac{q_0}{C}\cos\omega_0 t=U_0\cos\omega_0 t}$$

Ток в цепи:

$$\boxed{I=\frac{dq}{dt}=-q_0\omega_0\sin\omega_0 t=I_0\cos\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

- опережение по фазе *q*, *U* на $\frac{\pi}{2}$.

Взаимосвязь амплитуд:

$$\boxed{U_0=\sqrt{\frac{L}{C}}I_0}$$

<u>Энергия колебаний:</u>

Электрическая энергия:

$$W_q = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C}\cos^2\omega_0 t = \frac{q_0^2}{2C}\frac{1+\cos 2\omega_0 t}{2}$$

Магнитная энергия:

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\omega_0^2 q_0^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{L\omega_0^2 q_0^2}{2}\frac{1+\cos\left(2\omega_0 t + \pi\right)}{2}.$$

Изменения W_q и W_m происходит с <u>удвоенной частотой</u> по сравнению с частотой изменения тока, заряда, разности потенциалов, причем величины W_q и W_m <u>**колеблются в противофазе.**</u>

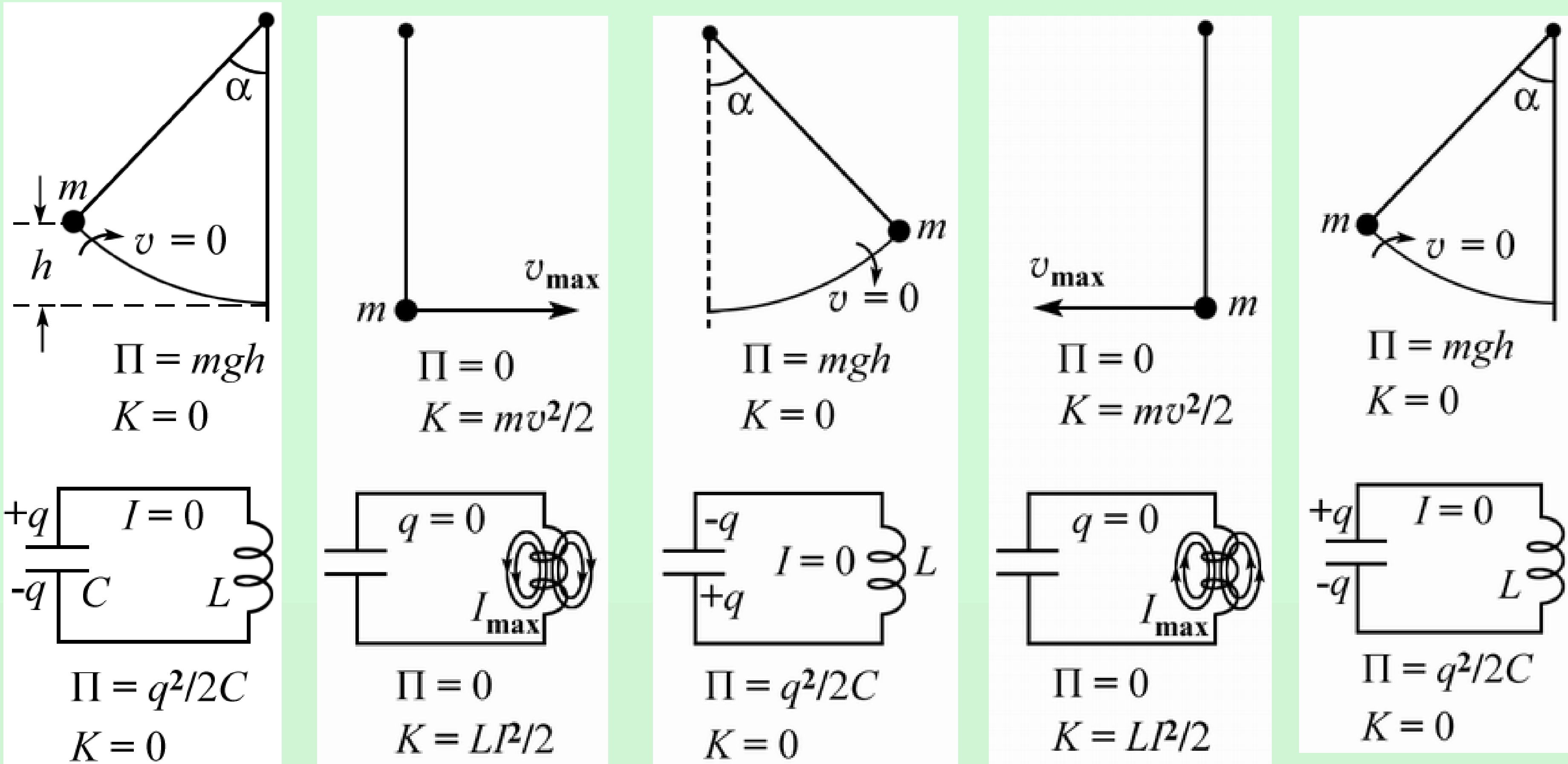
Сумма этих энергий постоянна:

$$\boxed{W_q + W_m = \frac{q_0^2}{2C}}$$

Все вычисления справедливы лишь при условии, если длина проводов в системе *l* такова, что нет заметного запаздывания в распространении электрического поля от одной до другой пластин конденсатора за период колебания (***квазистационарные токи***) , т.е.

$$l << cT$$

где $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}$ - скорость света

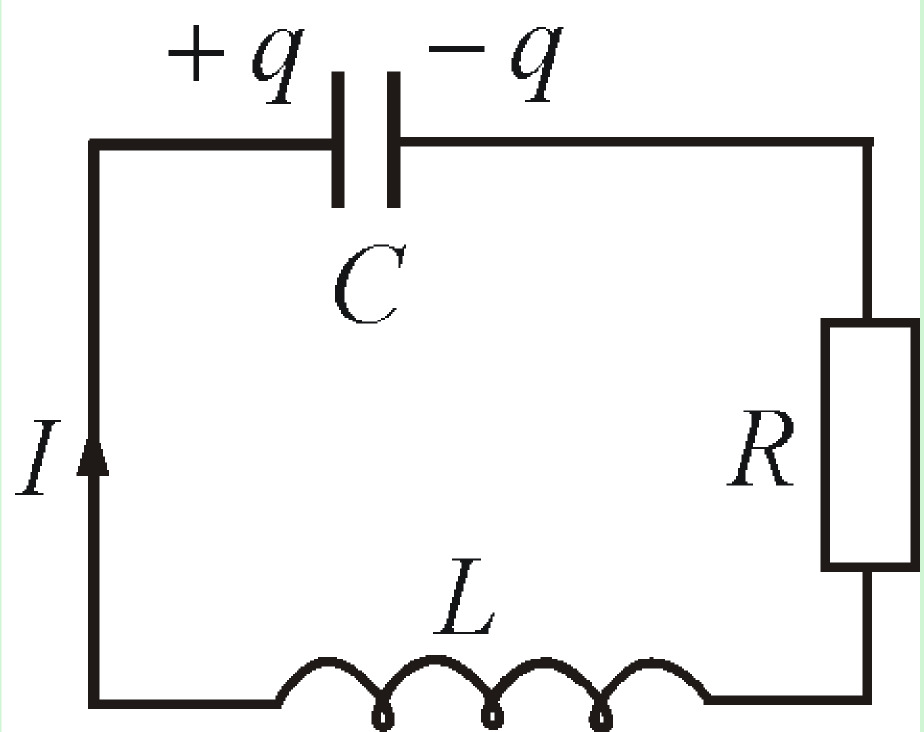


$t = 0$ $t = T/4$ $t = T/2$ $t = 3T/4$ $t = T$

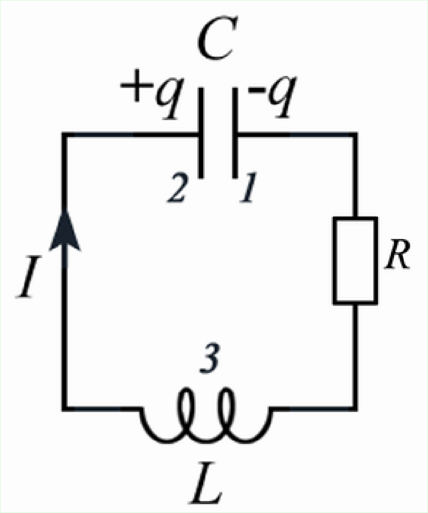
Аналогия между периодическими колебательными процессами в *LC*-контуре и движением математического маятника

1.2. Электрические затухающие колебания

Всякий реальный контур обладает ***активным сопротивлением R***. Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего колебания затухают.



При наличии сопротивления в электрической цепи:



Закон Ома для цепи *123*: $$IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I + \frac{1}{LC}q = 0$$

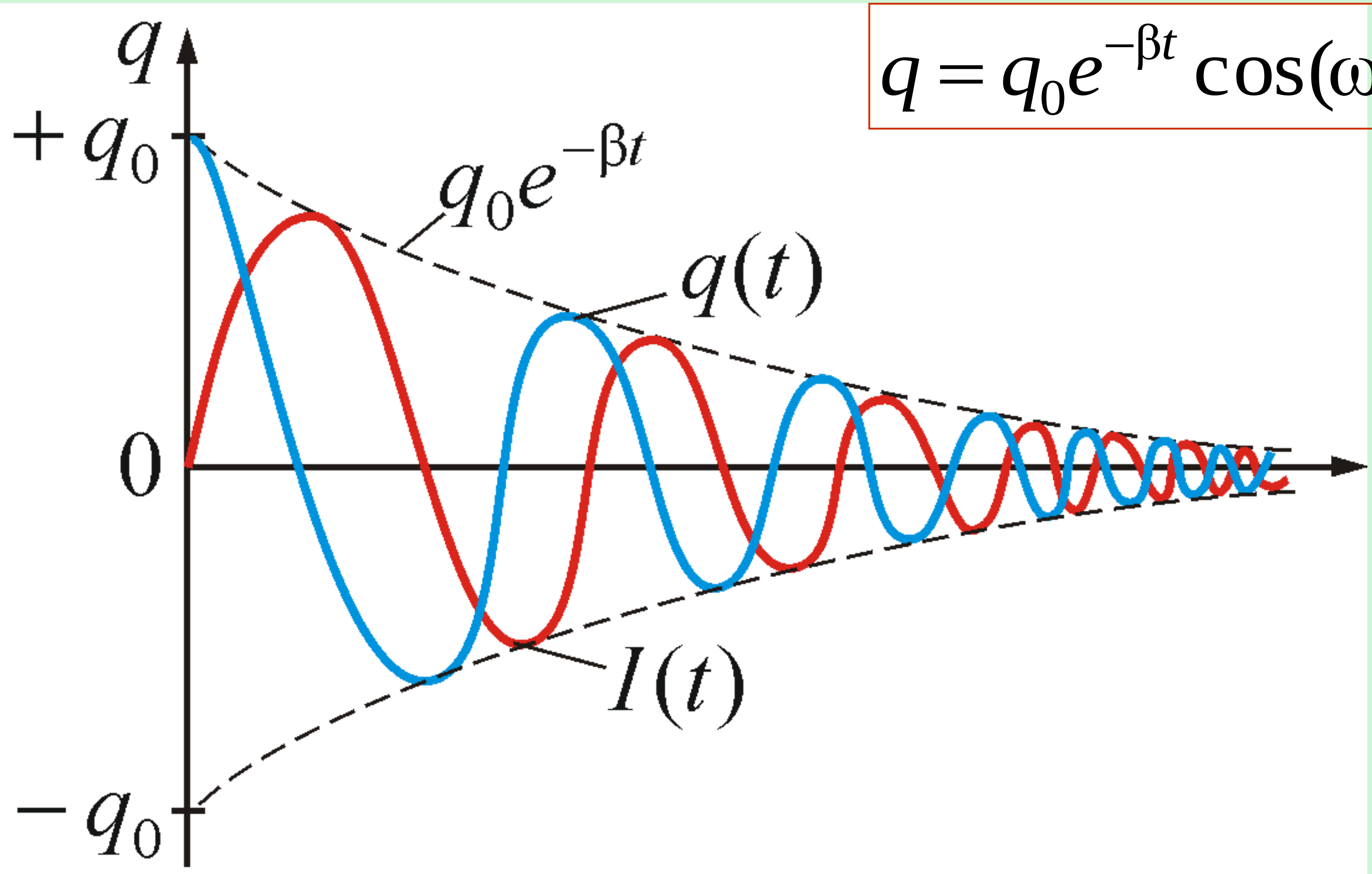
$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Введя обозначение $\boxed{\beta \equiv \frac{R}{2L}}$ - ***коэффициент затухания***, получим

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0}$$

- уравнение колебаний в контуре

Вид затухающих колебаний заряда *q* и тока *I*:



$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

- Колебаниям ***q соответствует x*** – смещение маятника из положения равновесия,

- силе тока ***I – скорость v***.

Его решение:

1) $\beta^2 < \omega_0^2$ – в случае слабого затухания:

величина заряда на обкладках конденсатора:

$$\boxed{q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)}$$

амплитуда затухающих колебаний

$$\boxed{A(t) = q_0 e^{-\beta t}}$$

частота затухающих колебаний

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

напряжение на конденсаторе:

$$\boxed{U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)}$$

Изменение тока со временем:

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 e^{-\beta t}\left[-\beta\cos(\omega t + \varphi) - \omega\sin(\omega t + \varphi)\right] =$$

$$= \omega_0 q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi + \psi)$$

где

$$\boxed{\cos\psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0},}\qquad \boxed{\sin\psi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0}.}$$

Следовательно,

$$\boxed{I(t) = I_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi + \psi)}\qquad \boxed{I_0 = \omega_0 q_0}$$

Так как $\begin{cases}\cos\psi < 0\\ \sin\psi > 0\end{cases}$, то $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$ - ток опережает напряжение по фазе на угол $\psi > \frac{\pi}{2}$

2) $\beta^2 \geq \omega_0^2$ $(T \to \infty)$:

величина заряда на обкладках конденсатора:

$$\boxed{q \xrightarrow[t \to \infty]{} 0}$$

- апериодический процесс

Колебаний в контуре не будет.