МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Н.С. Кравченко, Е.В. Лисичко,
С.И. Твердохлебов**

ФИЗИКА 2

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2012

УДК
ББК
К

Кравченко Н.С.
К Физика 2. Электричество и магнетизм / Н.С. Кравченко, Е.В. Лисичко, С.И. Твердохлебов; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во. Томского политехнического университета, 2012. – 209 с.

В авторской редакции

В учебном пособии рассмотрено содержание фундаментальных законов электростатики и магнетизма. Даны разъяснения основных законов, явлений, понятий электростатики и магнетизма.

Пособие подготовлено на кафедре теоретической и экспериментальной физики и предназначено для студентов ИДО, обучающихся по направлениям 140400 «Электроэнергетика и электротехника», 150700 «Машиностроение», 220400 «Управление в технических системах», 220700 «Автоматизация технологических процессов и производств», 230700 «Прикладная информатика», 280700 «Техносферная безопасность».

УДК
ББК

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ
Ю.П. Кунашенко

Кандидат педагогических наук,
старший преподаватель ТГУ
О.Г. Ревинская

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2012
© Кравченко Н.С., Лисичко Е.В., Твердохлебов С.И., 2012
© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2012

ПРЕДИСЛОВИЕ

Электрические явления играют важную роль в науке и технике и определяют развитие энергетики, транспортной промышленности, вычислительных технологий и т.д.

Ещё с древней Греции до нас дошли сведения о том, древние народы открыли способность натертого янтаря притягивать лёгкие тела. Становление электростатики происходило в XVI – XVII вв. в Европе, благодаря таким учёным, как Ш.Кулон, М.Ломоносов, Б.Франклин и т.д. Уже тогда учёные поняли, что наряду с силой тяготения, между телами проявляется действие и других фундаментальных сил. Важнейшее место среди них занимает электрическое взаимодействие. С электрическим взаимодействием тесно связано магнитное взаимодействие.

Данное пособие состоит из трех частей. Первая часть посвящена законам электростатики – науки, изучающей электрические взаимодействия неподвижных зарядов и связанных с ними электрических полей. заряженные объекты являются причиной не только электростатического поля, но ещё и электрического тока. Для возникновения элекростатического поля требуются неподвижные, каким-то образом зафиксированные в пространстве заряды, а для возникновения электрического тока, напротив, требуется наличие свободных, не закрепленных заряженных частиц. Вторая часть пособия как раз и направлена на изучение постоянного электрического тока. А третья часть пособия посвящена изучению магнитного поля, которое возникает в пространстве, окружающем токи и постоянные магниты.

Пособие предназначено для студентов заочной формы обучения. Целью пособия является изучение основных физических теорий, физических методов и законов на русском языке. Пособие содержит необходимый перечень новых слов и терминологии по каждой теме, способствующих усвоению материала.

Данное пособие подготовлено на кафедре теоретической и экспериментальной физики ТПУ и соответствует программе курса физики высших технических учебных заведений. Небольшой объем учебного пособия достигнут путем тщательного отбора и лаконичного изложения материала. Ввиду краткости курса устранены излишние разъяснения, повторения и промежуточные выкладки. Пособие составлено доцентами кафедры теоретической и экспериментальной физики ТПУ Кравченко Н.С., Лисичко Е.В., Твердохлебовым С.И.

Часть I
ЭЛЕКТРОСТАТИКА
Тема 1
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

1.1. Заряды. Свойства зарядов

Электрические явления были известны в глубокой древности. Порядка 500 лет до нашей эры Фалес Милетский обнаружил, что потертый шерстью янтарь притягивает легкие пушинки. Его дочь пыталась почистить шерстью янтарное веретено и обнаружила этот эффект. От слова «электрон», означающий по-гречески «янтарь» и произошел термин «электричество». Термин ввел английский врач Гильберт в XVI веке. Он обнаружил, что еще ряд веществ электризуется. При раскопках древнего Вавилона (4000 лет назад) обнаружены сосуды из глины, содержащие железный и медный стержни. На дне битум – изолирующий материал. Стержни разъедены лимонной или уксусной кислотой, то есть находка напоминает гальванический элемент. Золотое покрытие вавилонских украшений можно объяснить только гальваническим способом их нанесения.

Все тела в природе способны электризоваться, т.е., приобретать электрический заряд. Наличие электрического заряда проявляется в том, что заряженные тела взаимодействуют с другими заряженными телами. Электрический заряд – источник электромагнитного поля, связанный с материальным носителем. Электрический заряд является фундаментальным свойством некоторых элементарных частиц. Заряд элементарных частиц (если он не равен нулю, как например, у нейтрона) одинаков по абсолютной величине. Это *элементарный заряд.* К числу элементарных частиц принадлежат электроны, протоны, нейтроны. Из этих частиц построены атомы и молекулы любого вещества. Поэтому электрические заряды входят в состав всех тел.

1. Фундаментальным свойством электрического заряда является его существование в двух видах, которые названы положительными (например, у протона, позитрона) и отрицательными зарядами (например, у электрона). Заряды одного знака отталкиваются, разных знаков – притягиваются друг к другу. Впервые это установлено в 1733 – 34 г.г. французским физиком Ш.Ф. Дюфе (1698–1739), им сконструирован первый электростатический прибор – прототип электроскопа.

2. Закон квантования заряда. Электрические заряды не существуют сами по себе, а являются внутренними свойствами элементарных частиц

– электронов, протонов и др. Опытным путем в 1914 г. американский физик Р. Милликен показал, что *электрический заряд дискретен*. Заряд любого тела составляет целое кратное от *элементарного электрического заряда* $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

$$q = \pm ne, \quad (1)$$

где n – целое число. *Электрон* и *протон* являются соответственно носителями элементарных отрицательного и положительного зарядов.

Если физическая величина может принимать только определенные дискретные значения, то говорят, что эта величина квантуется. Формула (1) выражает то, что электрический заряд квантуется.

3. *Инвариантность заряда.* Значение заряда, измеряемое в различных инерциальных системах отсчета, оказывается одинаковым. Следовательно, электрический заряд является релятивистски-инвариантным. Отсюда вытекает, что значение заряда не зависит от того, движется этот заряд или покоится.

4.Закон сохранения заряда. Опыт показывает, что возникновение заряда на любом теле всегда сопровождается появлением другого заряда, равного ему по величине, но противоположного по знаку (например, электризация трением). Одновременное появление разноименных зарядов одинаковой величины при всяком процессе заряжения привело к заключению, что во всех телах всегда содержатся положительные и отрицательные заряды. При этом в обычных условиях количество положительного заряда в каждой единице объема тела равно количеству отрицательного заряда и поэтому тело представляется незаряженным. Всякий процесс заряжения есть процесс разделения электрических зарядов, при котором на одном из тел (или части тела) появляется положительный заряд, а на другом (или другой части тела) – отрицательный заряд.

Таким образом, *суммарный заряд электрически изолированной системы* (в которой через ограничивающую ее поверхность не могут проникать заряженные частицы) *не может изменяться.* Это утверждение носит название *закона сохранения электрического заряда.*

$$q = \sum_{i}^{N} q_i = Const \qquad (1.1)$$

1.2. Взаимодействие электрических зарядов в вакууме. Закон Кулона

Закон, которому подчиняется сила взаимодействия точечных зарядов был установлен в 1785 г. французским физиком Ш.О. Кулоном (1736 – 1806).

Точечным зарядом называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями от этого тела до других тел, несущих электрический заряд.

С помощью крутильных весов, подобных тем, которые были использованы английским физиком и химиком Генри Кавендишем (1731 – 1810) для измерения гравитационной постоянной Кулон измерял силу взаимодействия двух заряженных шариков в зависимости от значения зарядов и от расстояния между ними. При этом Кулон исходил из того, что при касании заряженного металлического шарика к точно такому же незаряженному шарику, заряд распределяется между ними поровну. В результате опытов Кулон установил, что *сила взаимодействия двух точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.*

Направление силы совпадает с прямой, проходящей через центры этих зарядов:

$$f = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad (1.2)$$

где q_1, q_2 – точечные заряды,
r – расстояние между зарядами,
k – коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц.

В векторной форме закон Кулона имеет вид:

$$\vec{f} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r \qquad (1.3)$$

где $\vec{e}_{12}$ – единичный вектор, направленный от заряда q_1 к заряду q_2.

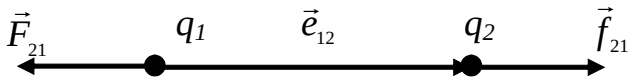


Рис. 1.1

В системе «СИ» (в рационализированной форме записи) закон Кулона имеет вид:

$$\vec{f}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_{12}, \qquad (1.4)$$

где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9 \ \frac{Н\cdot м^2}{Кл^2}$, ε_0 – электрическая постоянная, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{Ф}{м}$; заряд q – выражается в кулонах. Элементарный заряд в СИ: $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл. Отсюда следует, что $1\,Кл = 6{,}25\cdot 10^{18}\,e$.

1 кулон – заряд, переносимый через поперечное сечение проводника за время, равное 1 с при силе тока 1 А.

Принципиальным отличием кулоновских сил от гравитационных сил, является то, что гравитационные силы всегда являются силами притяжения.

Взаимодействие зарядов подчиняется *третьему закону Ньютона*: *силы взаимодействия между зарядами равны по величине и направлены противоположно друг другу вдоль прямой, связывающей эти заряды* (рис. 1.2).

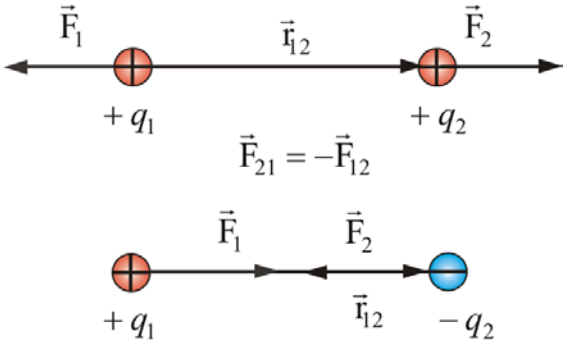


Рис. 1.2

Если заряды не точечные, то в такой форме закон Кулона не годится – нужно интегрировать по объему.

Вся совокупность фактов говорит, что закон Кулона выполняется, если расстояние между зарядами 10^{-15} м $< r < 10^{7}$ м.

1.3. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля

Для понимания происхождения и передачи сил, действующих между покоящимися зарядами, необходимо допустить наличие между зарядами какого-либо физического агента, осуществляющего это взаимодействие. Этим агентом является *электрическое поле*. Когда появляется электрический заряд, вокруг этого заряда возникает электрическое поле. *Основное свойство электрического поля заключается в том, что на всякий другой заряд, помещенный в это поле, действует сила.* Отсюда следует, что *электрическое поле – особая форма материи, посредством которой осуществляется взаимодействие между электрическими зарядами.* Для того чтобы выяснить имеется ли в данном месте электрическое поле, нужно поместить туда заряженное тело. По величине силы, действующей на данный заряд, можно, очевидно, судить об «интенсивности» поля.

Электрическое поле (как и другие поля, например, гравитационное, магнитное) *является объективной реальностью, видом материи.*

Оно обладает энергией, структурой, т.е. поле имеет материальную основу. Электрическое поле – особая форма материи, существующая наравне с частицами.

Электрическое поле проявляется в том, что электрический заряд, помещенный в какую либо точку поля, испытывает действие силы. Для того, чтобы сила, действующая на пробный заряд, характеризовала поле в данной точке, пробный заряд должен быть точечным. Отношение этой силы к значению пробного заряда не зависит от пробного заряда, и будет определяться только зарядом q, создающим поле (точечным), и радиусом – вектором $\vec{r}$.

Из $\vec{f} = q_{пр}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r\right)$, получаем:

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q_{пр}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r, \qquad (1.5)$$

где $q_{пр}$ –пробный заряд,

q – заряд создающий электрическое поле,

$\vec{E}$ – напряженность электрического поля.

Таким образом, напряженность электрического поля численно равна силе, с которой поле действует на единичный заряд в данной точке поля. Вектор $\vec{E}$ направлен вдоль прямой, проходящей через центр заряда и данную точку от заряда, если он положителен и к заряду, если он отрицателен (рис.1.3):

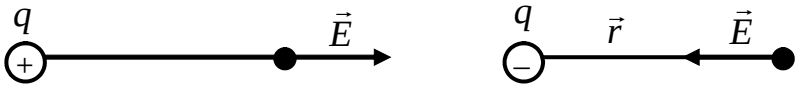


Рис. 1.3

За единицу напряженности электрического поля принимается напряженность в такой точке, в которой на заряд, равный 1 кулону, действует сила равная 1 Н. Эта единица имеет название «вольт на метр» ($^{В}/_{м}$). На всякий точечный заряд q в точке поля с напряженностью $\vec{E}$ действует сила:

$$\vec{f} = q\vec{E}. \qquad (1.6)$$

1.4. Сложение электростатических полей. Принцип суперпозиции

Одной из основных задач электростатики является оценка параметров поля при заданном, стационарном, распределении зарядов в

пространстве. Один из способов решения подобных задач основан на *принципе суперпозиции*. Суть его в следующем.

Если поле создается несколькими точечными зарядами, то на пробный заряд q действует со стороны заряда q_k такая сила, как если бы других зарядов не было. Результирующая сила определится выражением:

$$\vec{F} = \sum_k \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_k}{r_k^2} \frac{\vec{r}_k}{r_k} = \sum_k \vec{F}_k \qquad (1.7)$$

– это принцип суперпозиции или независимости действия сил.

Т.к. $\vec{F} = q\vec{E}$, то $\vec{E}$ – результирующая напряженность поля в точке, где расположен пробный заряд, так же *подчиняется принципу суперпозиции*:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... \sum_k \vec{E}_k. \qquad (1.8)$$

Это соотношение выражает принцип наложения или *суперпозиции электрических полей* и представляет важное свойство электрического поля.

Напряженность результирующего поля, системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, созданных в данной точке каждым из них в отдельности.

1.5. Применение принципа суперпозиции к расчету полей

Рассмотрим примеры расчета полей, созданных различными зарядами.

1. Пусть поле создано системой из двух точечных зарядов, расположенных на расстоянии d друг от друга. Рассмотрим электрическое поле двух точечных зарядов q_1 и q_2 в некоторой точке А (рис.1.4). Пусть $\vec{E}_1$ – напряженность поля, создаваемая зарядом q_1, когда заряд q_2 отсутствует, $\vec{E}_2$ – напряженность поля, создаваемая зарядом q_2, когда заряд q_1 отсутствует. Напряженность результирующего поля $\vec{E}$ есть векторная сумма напряженностей полей, создаваемых отдельными зарядами: т.е., $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Модуль вектора E есть

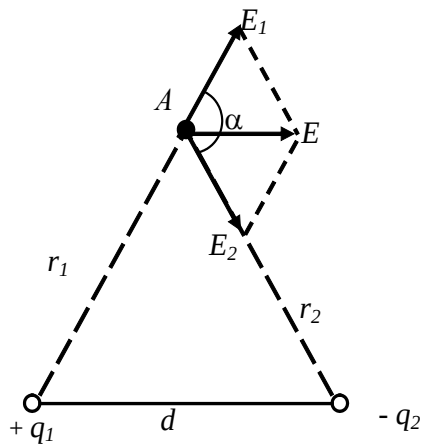


Рис.1.4

$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos\alpha}$, где $\cos\alpha = \dfrac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}$. Правило векторного сложения электрических полей справедливо не только для двух, но и для какого угодно количества зарядов. Если $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3 ... \vec{E}_n$ – напряженности полей, создаваемых отдельными зарядами в какой-либо точке, то напряженность результирующего поля $\vec{E}$ в той же точке равна векторной сумме полей, т.е.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i. \qquad (1.9)$$

2. Поле диполя.

Электрическим диполем называется система двух одинаковых по величине, но разноименных точечных зарядов, расстояние между которыми l значительно меньше расстояния до тех точек, в которых определяется поле системы ($r >> l$).

Здесь $\vec{l}$ называют *плечо диполя – вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между зарядами.*

Пример 1. Найдем $E_\perp$ в точке *A* на прямой, проходящей через центр диполя и перпендикулярной к оси (рис. 1.5)

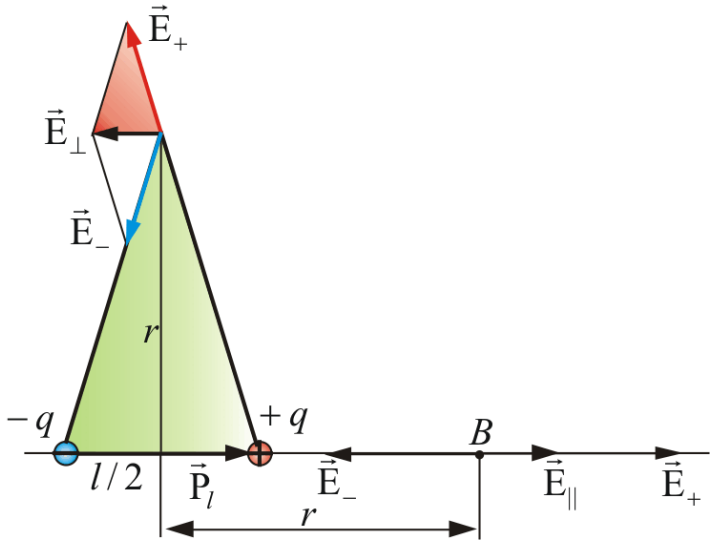


Рис.1.5

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ (т.к. } l << r\text{)}. \qquad (1.10)$$

Из подобия заштрихованных треугольников можно записать:

$$\frac{E_\perp}{E_+} = \frac{l}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{l}{r} \qquad \textit{отсюда} \qquad E_\perp = E_+ \frac{l}{r} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \qquad (1.11)$$

Обозначим вектор: $\vec{P} = q\vec{l}$ – *электрический момент диполя (или дипольный момент) – произведение положительного заряда диполя на плечо* $\vec{l}$. Направление $\vec{P}$ совпадает с направлением $\vec{l}$, т.е. от отрицательного заряда к положительному. Тогда, учитывая, что $ql = P$ получим:

$$E_\perp = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \text{ или } \vec{E}_\perp = \frac{-\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \qquad (1.12)$$

Пример 2. На оси диполя, в точке *B* (рисунок 1.3):

$$\vec{E}_\parallel = \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \text{ или } \vec{E}_\parallel = \frac{2\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \qquad (1.13)$$

Пример 3. В произвольной точке *C* (рис.1.6).

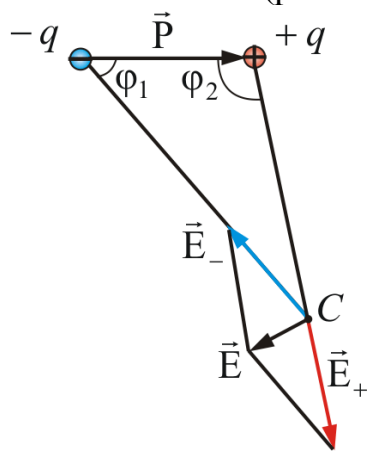


Рис. 1.6

$$E = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\varphi + 1}, \qquad (1.14)$$

где $\varphi \approx \varphi_1 \approx \varphi_2$.

При $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\quad E_1 = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$;

при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\quad E_2 = \frac{2P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$.

3. Если поле создается не точечными зарядами, *то используют обычный в таких случаях прием. Тело разбивают на бесконечно малые эле-*

менты и определяют напряженность поля создаваемого каждым элементом, затем интегрируют по всему телу:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}, \qquad (1.15)$$

где $d\vec{E}$ – напряженность поля, обусловленная заряженным элементом. Интеграл может быть линейным, по площади или по объему в зависимости от формы тела. Для решения подобных задач пользуются соответствующими значениями плотности заряда:

$\lambda = dq / dl$ – линейная плотность заряда, измеряется в Кл/м;

$\sigma = dq / dS$ – поверхностная плотность заряда, измеряется в Кл/м^2;

$\rho = dq / dV$ – объемная плотность заряда, измеряется в Кл/м^3.

Если же поле создано сложными по форме заряженными телами и неравномерно заряженными, то используя принцип суперпозиции, трудно найти результирующее поле.

В формуле (1.15) мы видим, что $d\vec{E}$ – векторная величина:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (1.16)$$

так что интегрирование может оказаться непростым. Поэтому для вычисления $\vec{E}$ часто пользуются другими методами, которые мы обсудим в следующих темах. Однако в некоторых, относительно простых случаях эти формулы позволяют аналитически рассчитать $\vec{E}$.

В качестве примеров можно рассмотреть поле, созданное бесконечно длинным проводником, заряд на котором распределен по длине равномерно (*линейное распределение зарядов)*.

Определим напряженность электрического поля в точке *A* (рис. 1.7) на расстоянии *x* от бесконечно длинного, линейного, равномерно распределенного заряда. Пусть λ – заряд, приходящийся на единицу длины.

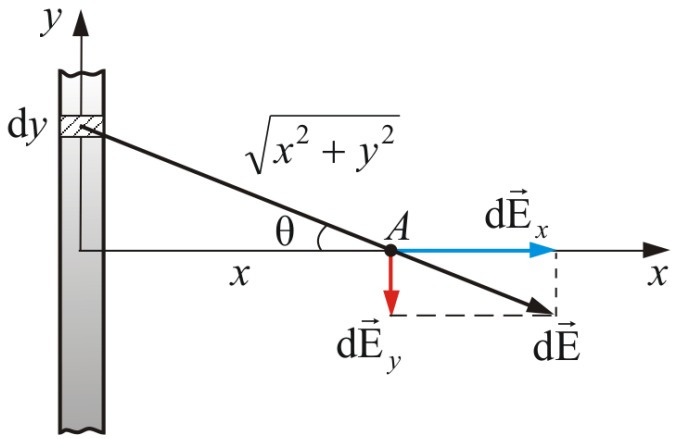


Рис. 1.7

Считаем, что x – мало по сравнению с длиной проводника. Выберем систему координат так, чтобы ось y совпадала с проводником. Элемент длины dy, несет заряд $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}y$. Создаваемая этим элементом напряженность электрического поля в точке A:

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}y}{(x^2+y^2)}. \qquad (1.17)$$

Вектор $\mathrm{d}\vec{E}$ имеет проекции $\mathrm{d}E_x$ и $\mathrm{d}E_y$, причем $\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\theta$; $\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\sin\theta$. Т.к. проводник бесконечно длинный, а задача симметричная, то y – компонента вектора $\mathrm{d}\vec{E}$ обратится в ноль (компенсируется), т.е. $E_y = \int \mathrm{d}E\sin\theta = 0$.

Тогда $E = E_x = \int \mathrm{d}E\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\cos\theta \mathrm{d}y}{x^2+y^2}$. Теперь выразим y через θ. Т.к. $y = x\mathrm{tg}\theta$, то $\mathrm{d}y = x\mathrm{d}\theta/\cos^2\theta$ и $(x^2+y^2) = x^2/\cos^2\theta$, тогда

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}. \qquad (1.18)$$

Таким образом, напряженность электрического поля линейно распределенных зарядов изменяется обратно пропорционально расстоянию до заряда.

Этот результат, полученный для бесконечно длинного линейного заряда, с хорошей точностью справедлив и для линейного заряда конечной длины при условии, что x – мало по сравнению с расстоянием от точки A до концов проводника.

Из приведенных примеров видно, что напряженность электрического поля системы зарядов равна геометрической сумме напряженностей полей каждого из зарядов в отдельности *(принцип суперпозиции)*.

1.6. Силовые линии напряженности электростатического поля

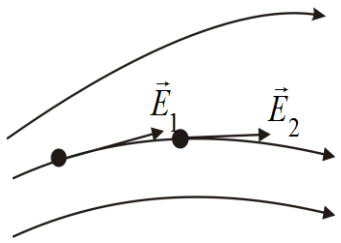


Рис.1

Электростатическое поле можно задать, указав для каждой точки величину и направление вектора $\vec{E}$. Совокупность этих векторов образует поле вектора напряженности электростатического поля. Графиче-

ское изображение электростатического поля с помощью вектора напряженности $\vec{E}$ в различных точках поля очень неудобно. Векторы напряженности при этом накладываются друг на друга, и получается весьма запутанная картина. Более наглядным является метод, предложенный М. Фарадеем изображения электростатических полей с помощью силовых линий напряженности. *Силовые линии напряженности – это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора* $\vec{E}$. Линии напряженности направлены так же как вектор $\vec{E}$ поля в рассматриваемой точке. Например, на рис.2 линии напряженности направлены слева направо. Линии напряженности не пересекаются, т.к. в каждой точке поля вектор $\vec{E}$ имеет только одно определенное направление. Линии напряженности начинаются на положительном заряде и заканчиваются на отрицательном. *Густота линий выбирается так, чтобы количество линий, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной к линиям напряженности, было равно численному модулю вектора* $\vec{E}$. Тогда по картине линий напряженности можно судить о направлении и значении вектора $\vec{E}$ в разных точках пространства (рис. 1.8).

Однородным называется электростатическое поле, во всех точках которого напряженность одинакова по величине и направлению, т.е. $\vec{E} = \text{const}$. Однородное электростатическое поле изображается параллельными силовыми линиями на равном расстоянии друг от друга (такое поле существует, например, между пластинами конденсатора) (рисунок).

В случае точечного заряда, линии напряженности исходят из положительного заряда и уходят в бесконечность; и из бесконечности входят в отрицательный заряд. Т.к. $E \sim 1/r^2$, то и густота силовых линий обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда. Однако площадь поверхности сферы, через которую проходят эти линии сама возрастает пропорционально квадрату расстояния, поэтому общее число линий остается постоянным на любом расстоянии от заряда.

Для системы зарядов, как видим, силовые линии направлены от положительного заряда к отрицательному (рис.1.9).

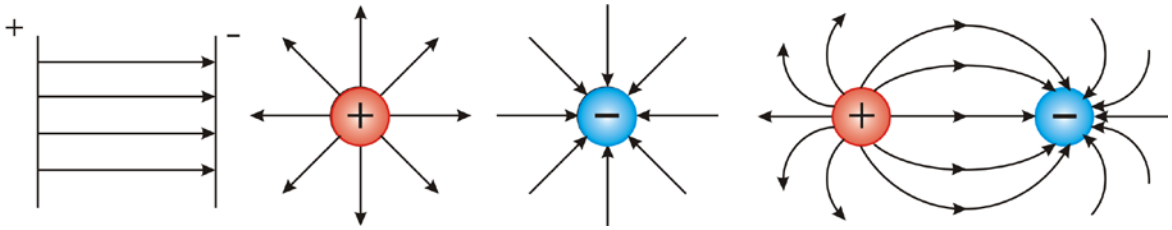


Рис.1.9

Из рисунка 1.9 видно, так же, что густота силовых линий может служить показателем величины $\vec{E}$.

Густота силовых линий должна быть такой, чтобы единичную площадку, нормальную к вектору напряженности пересекало такое их число, которое равно модулю вектора напряженности $|\vec{E}|$, т.е.

$$|\vec{E}| = \frac{\text{число линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}. \qquad (1.19)$$

Пример 1: если на рисунке 1.10 выделить площадку, $S = 2\,\text{м}^2$, то напряженность изображенного поля будет равна

$$|\vec{E}| = \frac{\Phi}{S} = \frac{4}{2} = 2\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

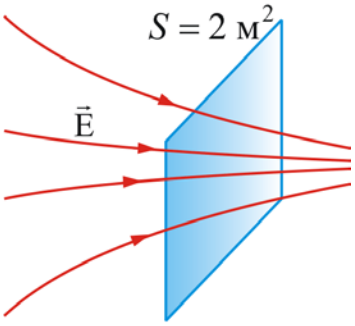


Рис.1.10

Пример 2: площадка $S = 3\text{м}^2$ находится в однородном поле 100 Н/Кл. Сколько линий пересекает эту площадку, если угол составляет 30º (рисунок 2.4).

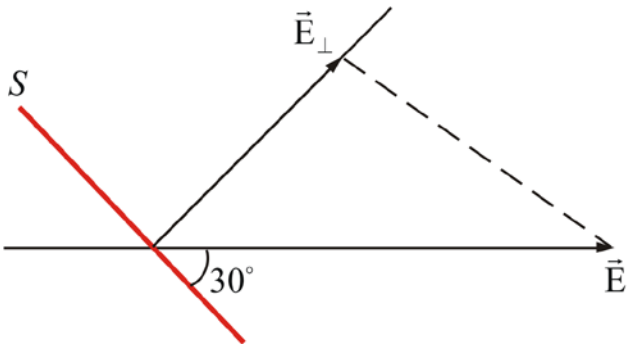


Рис.1.11

$E_\perp = E\sin 30^\circ = 50$ Н/Кл

$\Phi = E_\perp S = 50 \cdot 3 = 150$ линий.

1.7. Поток вектора напряженности

Итак, на примерах мы показали, что, если силовые линии однородного электрического поля напряженностью $\vec{E}$ пронизывают некоторую площадку S, то *поток вектора напряженности* (число силовых линий через площадку) будет определяться формулой

$\Phi_E = ES_\perp = ES\cos\alpha = E_n S$,

где E_n – произведение вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к данной площадке (рис.1.12).

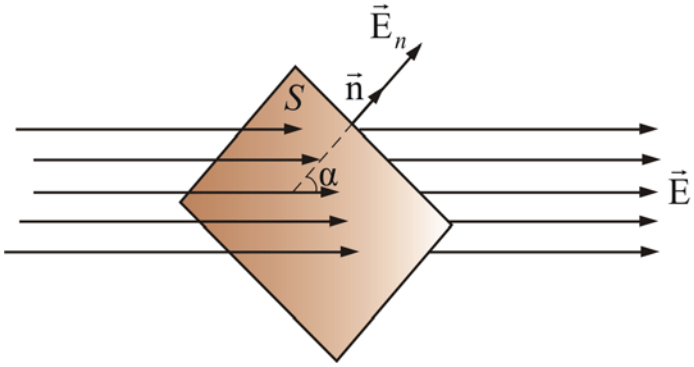


Рис.1.12

Полное число силовых линий, проходящих через поверхность S, называется ***потоком вектора напряженности*** *Φ_E через эту поверхность.*

Элементарный поток вектора напряженности через площадку dS (рис.1.12) определится соотношением:

$$d\Phi_E = EdS\cos\alpha = EdS_0,$$

где $dS_0 = dS\cos\alpha$ – проекция dS на направление нормали $\vec{n}$.

В векторной форме можно записать $d\Phi_E = (\vec{E}\,d\vec{S})$ – скалярное произведение двух векторов, где вектор $d\vec{S} = \vec{n}dS$.

Таким образом, поток вектора $\vec{E}$ есть скаляр, который в зависимости от величины угла α может быть как положительным, так и отрицательным.

Полный поток вектора напряженности через любую площадку S можно определить тогда

$$\Phi_E = \int_S (\vec{E}d\vec{S}), \qquad (1.20)$$

а поток через замкнутую поверхность, окружающую заряд или заряженное тело равен

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) . \qquad (1.21)$$

Так как напряженность поля, созданного в любой точке пространства, зависит от величины заряда, создающего это поле, то поток вектора напряженности электростатического поля через любую площадку, находящуюся в этом поле также зависит от величины заряда.

Рассмотрим примеры, изображенные на рисунках 1.13 и 1.14.

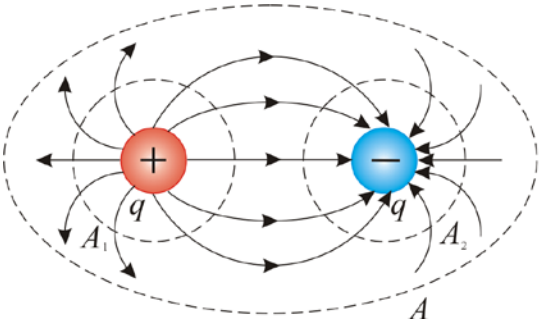


Рис.1.13

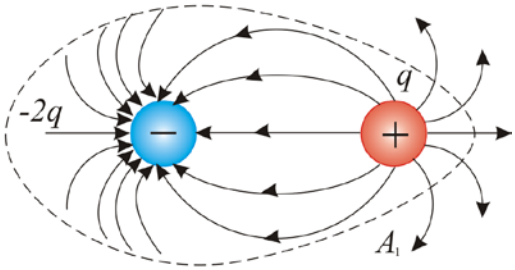


Рис.1.14

Для рисунка 1.13– поверхность A_1 окружает положительный заряд и поток здесь направлен наружу, т.е. $\Phi_E > 0$. Поверхность A_2 – окружает отрицательный заряд, здесь $\Phi_E < 0$ и направлен внутрь. Общий поток через поверхность A равен нулю.

Для рисунка 1.14 – поток будет не равен нулю, если суммарный заряд внутри поверхности не равен нулю. Для этой конфигурации поток через поверхность A отрицательный.

Таким образом, поток вектора напряженности зависит от заряда.

1.8. Теорема Остроградского – Гаусса (теорема Гаусса)

К.Ф. Гаусс (1777–1855) выдающийся немецкий математик, астроном и физик в 1839г. предложил теорему, которая устанавливает связь потока вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность со значением заряда q, находящегося внутри этой поверхности. *Эта теорема выведена математически для векторного поля любой природы русским математиком М.В. Остроградским (1801-1862), а затем независимо от него применительно к электростатическому полю – К.Гауссом.*

Теорема Остроградского – Гаусса (теорема Гаусса): *поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в*

вакууме равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0*:*

$$\Phi_E = \oint_s (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \ . \qquad (1.22)$$

Докажем эту теорему. Пусть поле создается точечным зарядом q. Окружим заряд замкнутой поверхностью S произвольной формы. Разобьем замкнутую поверхность на элементарные площадки dS , к каждой из которых проведем вектор нормали $\vec{n}$.

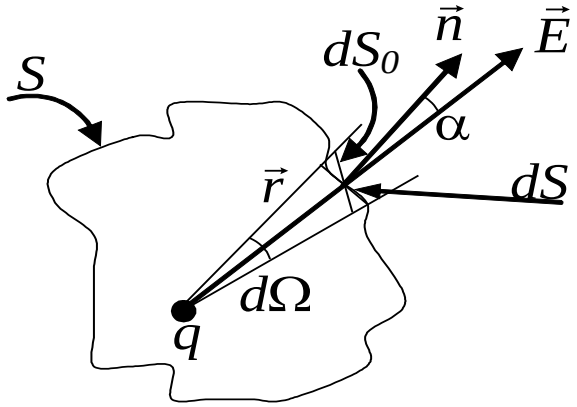


Рис.1.15

Элементарный поток вектора напряженности через площадку dS (рис. 1.15) определится соотношением:

$$d\Phi_E = EdS\cos\alpha = EdS_0,$$

где $dS_0 = dS\cos\alpha -$ проекция dS на направление нормали $\vec{n}$. Тогда

$$d\Phi_E = EdS_0 = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} dS_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

, где $\frac{dS_0}{r^2} = d\Omega$ - элементарный телесный угол, под которым элемент dS виден из места положения заряда. Вычислим поток вектора напряженности через замкнутую поверхность S от точечного заряда q, находящегося внутри этой поверхности.

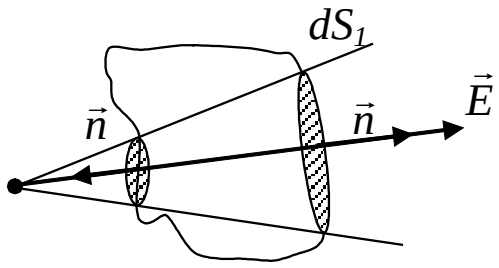


Рис.1.16

$$\Phi_E = \oint_S d\Phi_E = \oint_{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega,$$

так как $\oint d\Omega = 4\pi$, то

$$\Phi_E = \oint_{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (1.23)$$

Как видно, поток вектора напряженности выходящий из поверхности не зависит от формы поверхности, охватывающей заряд и пропорционален величине заряда. Если заряд находится вне замкнутой поверхности, то суммарный поток через любые элементарные площадки dS_1 и dS_2, находящиеся внутри телесного угла $d\Omega$ (рис. 1.16) равен сумме по-

токов напряженности выходящего из этой поверхности (положительный поток) и входящего в нее (отрицательный поток).

Тогда $d\Phi_E = d\Phi_{dS_1} - d\Phi_{dS_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = 0$, следовательно, поток напряженности электрического поля через любую поверхность *S*, не охватывающую заряды равен нулю, т.е. Φ_E=0.

Пусть внутри замкнутой поверхности имеется зарядов, тогда алгебраическим суммированием (согласно принципу суперпозиции) находим, что общий поток вектора напряженности через замкнутую поверхность равен

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \quad . \tag{1.24}$$

Теорема доказана.

Таким образом, теорему Гаусса можно сформулировать следующим образом: *поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на* ε_0*:*

$$\Phi_E = \oint_s E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \tag{1.25}$$

Если заряд распределен внутри замкнутой поверхности непрерывно с объемной плотностью ρ, то теорема Гаусса имеет вид:

$$\oint_s E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho dV \tag{1.26}$$

где интеграл справа берется по объему V, охватываемому поверхностью *S*.

Необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство: в то время как само поле $\vec{E}$ зависит от конфигурации всех зарядов, поток Φ_E сквозь произвольную замкнутую поверхность определяется только алгебраической суммой зарядов внутри поверхности *S*. Это значит, что *если передвинуть заряды внутри замкнутой поверхности*, то $\vec{E}$ *изменится всюду*, и на поверхности *S*, а *поток вектора* $\vec{E}$ *через эту поверхность останется прежним*.

Таким образом, чтобы рассчитать поле, созданное какой-то конфигурацией зарядов в данной точке, нужно через эту точку провести замкнутую поверхность произвольной формы и рассчитать поток вектора напряженности через эту поверхность. Так как по теореме Гаусса поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме заключен-

ных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0*, то, зная величину заряда, находящегося внутри замкнутой поверхности можно найти напряженность поля в интересующей нас точке пространства.*

Рассмотрим примеры применения теоремы Гаусса.

1.9. Применение теоремы Гаусса к расчету электрических полей

Использование теоремы Гаусса для расчета полей эффективно в тех случаях, когда поле обладает специальной симметрией (чаще всего плоской, цилиндрической или сферической). Симметрия и конфигурация поля должны быть такими, чтобы, во-первых, заряженное тело можно было бы окружить достаточно простой замкнутой поверхностью и, во-вторых, вычисление потока вектора напряженности свести к простому умножению E (или E_n) на площадь поверхности S или часть ее. Если этого сделать нельзя, то задачу необходимо решать другими методами.

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

Будем считать заряд положительным. Плоскость заряжена с постоянной поверхностной плотностью $\sigma = \dfrac{dq}{dS}$. Из симметрии вытекает, что напряженность в любой точке поля имеет направление, перпендикулярное к плоскости (рис. 1.17). Очевидно, что в симметричных относительно плоскости точках напряженность поля одинакова по величине и противоположна по направлению.

Выделим на заряженной плоскости площадку ΔS. Окружим эту площадку замкнутой поверхностью. В качестве замкнутой поверхности представим цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными к плоскости и основаниями величины ΔS, расположенными относительно плоскости симметрично. Применим к этой поверхности теорему Гаусса $\oint\limits_s E_n dS = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum\limits_i q_i$. Поток через боковую часть поверхности будет отсутствовать, так как E_n в каждой ее точке равна нулю. Для оснований E_n совпадает с E. Следовательно, суммарный поток через поверхность будет равен $2E\Delta S$. Внутри поверхности заключен заряд $\sigma\Delta S$. Согласно теореме Гаусса, должно выполняться условие: $2E\Delta S = \dfrac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$, откуда

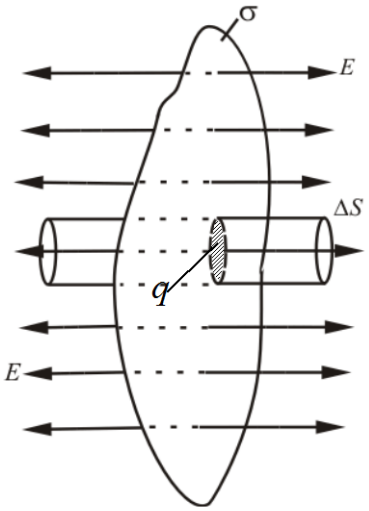


Рис.1.17

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (1.27)$$

Полученный результат не зависит от длины цилиндра, т.е. на любых расстояниях от плоскости напряженность поля одинакова по величине. Картина линий напряженности выглядит, как показано на рис. 1.18. Для отрицательно заряженной плоскости направления векторов изменятся на обратные. Если плоскость конечных размеров, то полученный результат будет справедлив лишь для точек, расстояние которых от края пластины значительно превышает расстояние от самой пластинки (рис. 1.19).

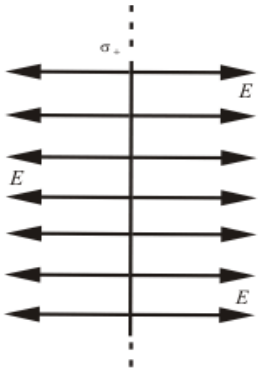


Рис.1.18

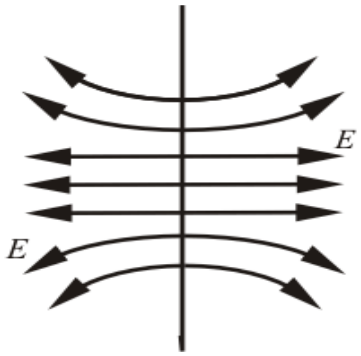


Рис.1.19

2. Поле, образованное двумя разноименными заряженными плоскостями (бесконечно большими)

Поле двух параллельных бесконечно больших плоскостей, заряженных разноименно с одинаковой по величине постоянной поверхностной плотностью σ можно рассматривать как суперпозицию полей, создаваемых каждой из плоскостей в отдельности. В области между плоскостями (рис.1.20) складываемые поля имеют одинаковое направление, так что результирующая напряженность равна

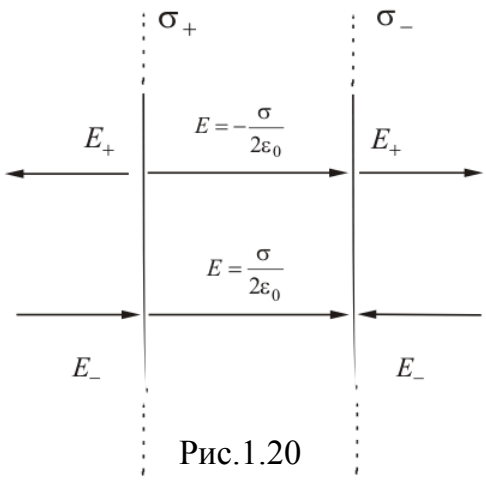


Рис.1.20

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (1.28)$$

Вне объема, ограниченного плоскостями, складываемые поля имеют противоположные направления, так что результирующая напряженность равна нулю *E=0*. Таким образом, поле сосредоточено между плоскостями. Напряженность поля во всех точках этой области одинакова по величине и по направлению. Поле, обладающее такими свойствами, называется *однородным*. Линии напряженности однородного поля представляют собой совокупность параллельных равноотстоящих прямых.

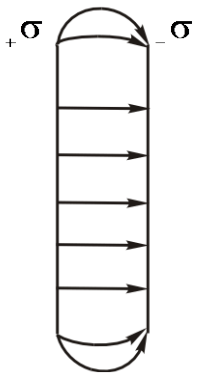


Рис.1.21

Полученный результат приблизительно справедлив и в случае плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями значительно меньше их линейных размеров (плоский конденсатор). В этом случае заметные отклонения поля от однородности напряженности наблюдаются только вблизи краев пластин (рис. 1.21).

Пусть две бесконечные плоскости заряжены разноименными зарядами с одинаковой по величине плотностью σ.

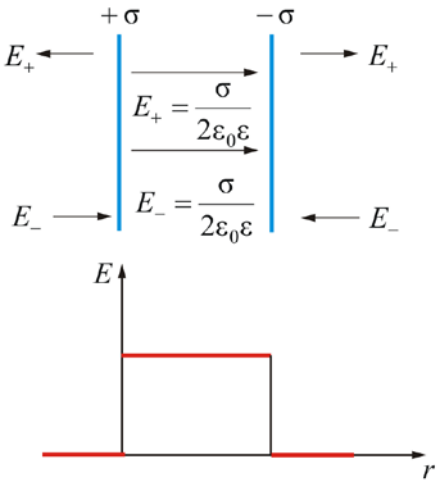


Рис.1.22

Результирующее поле, как было сказано выше, находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой из плоскостей. Тогда *внутри плоскостей*

$$E = E_+ + E_- \text{ отсюда } E = \sigma / \varepsilon_0$$

Вне плоскостей напряженность поля $E = 0$.

Распределение напряженности электростатического поля между пластинами конденсатора показано на рисунке 1.22.

Между пластинами конденсатора действует сила взаимного притяжения (на единицу площади пластин):

$$F_{\text{ед}} = \frac{F}{S} = \frac{S\sigma E}{S}, \quad \text{т.е.} \quad F_{\text{ед}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Механические силы, действующие между заряженными телами, называют *пондермоторными.*

Тогда сила притяжения между пластинами конденсатора:

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0},$$

где S – площадь обкладок конденсатора. Т.к. $\sigma = \frac{q}{S} = E\varepsilon_0$, то

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{\varepsilon_0 E^2 S}{2}. \qquad (1.29)$$

Это формула для расчета пондермоторной силы.

3. Поле, образованное бесконечно длинным заряженным цилиндром

Рассчитаем напряженность поля, создаваемого бесконечно длинным цилиндром радиуса R, заряженным с поверхностной плотностью σ в точке A, отстоящей на расстояния r от оси цилиндра. Из соображений симметрии следует, что напряженность в любой точке направлена вдоль радиальной прямой, перпендикулярной к оси цилиндра, а значение напряженности зависит лишь от расстояния r от цилиндра.

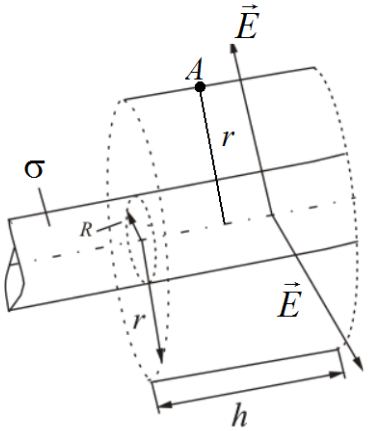


Рис.1.23

Вырежем из бесконечно длинного цилиндра элемент длиной h. Окружим этот эле-

мент цилиндрической поверхностью (коаксиальной с заряженной) радиуса r, так, чтобы эта поверхность проходила через точку A (рис. 1.23). Для оснований внешнего цилиндра $E_n = 0$, для боковой поверхности (заряд считаем положительным) $E_n = E(r)$. Силовые линии поля пересекают только боковую поверхность цилиндра радиуса r. Следовательно, поток вектора $\vec{E}$ через эту замкнутую поверхность будет равен $E(r)2\pi rh$. Если $r > R$ внутрь поверхности попадает заряд $q = \sigma 2\pi Rh$, где σ–поверхностная плотность заряда. Применяя теорему Гаусса, получаем:

$$\oint_s E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i, \quad E2\pi rh = \frac{\sigma 2\pi Rh}{\varepsilon_0}, \text{ откуда } E = \frac{\sigma R}{r\varepsilon_0}. \qquad (1.30)$$

Если $r < R$, рассматриваемая замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, вследствие чего $E = 0$. Таким образом, внутри заряженной цилиндрической поверхности поле отсутствует.

Если радиус цилиндра $R << r$, а заряд распределяется по длине цилиндра с линейной плотностью τ. Тогда можно формулу преобразовать:

$$\begin{cases} q = \sigma 2\pi Rh \\ q = \tau h \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\tau = \sigma 2\pi R \\ &\sigma = \frac{\tau}{2\pi R} \end{aligned}$$

Тогда получаем,

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad (1.31)$$

4. Поле, образованное двумя цилиндрическими поверхностями, заряженными одинаковыми разноименными зарядами

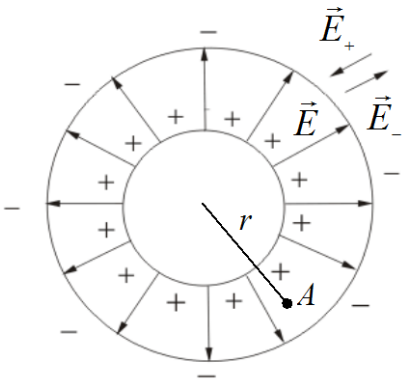


Рис.1.24

С помощью принципа суперпозиции легко найти поле двух коаксиальных цилиндрических поверхностей, заряженных с одинаковой по величине, но отличающейся знаком линейной плотностью τ (рис. 1.24). Внутри меньшего и вне большого цилиндров поле отсутствует. В зазоре между цилиндрами величина напряженности поля определяется формулой

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad (1.32).$$

Это справедливо и для цилиндрических поверхностей конечной длины, если зазор между поверхностями значительно меньше их длины (цилиндрический конденсатор).

5. Поле, образованное заряженной сферической поверхностью

Рассмотрим поле, создаваемое сферической поверхностью радиуса R, заряженной с постоянной поверхностной плотностью σ. Это поле обладает центральной симметрией. Это означает, что направление вектора $\vec{E}$ в любой точке проходит через центр сферы, а значение напряженности является функцией расстояния r от центра сферы (рис. 1.25).

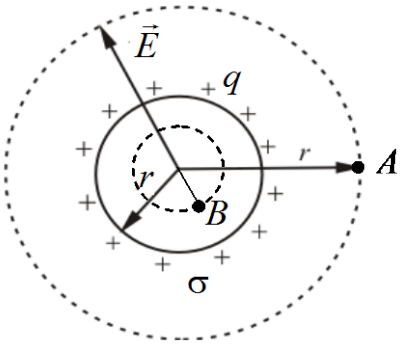


Рис.1.25

Найдем напряженность поля, созданную заряженной сферой в точках А и В. Через точки А и В проведем сферические поверхности и найдем поток вектора напряженности через эти поверхности.

Точка B находится внутри заряженной сферической поверхности, на расстоянии r от центра ($r<R$). Сферическая поверхность, проведенная через эту точку, не будет содержать внутри заряда. Следовательно, по теореме Гаусса $\oint_s E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$, напряженность в точке B будет равна нулю. E=0 ($r<R$) (рис. 2.17).

Найдем напряженность поля, созданного заряженной сферической поверхностью в точке A, находящейся на расстоянии r от центра сферы. Окружим заряженное тело замкнутой сферической поверхностью, радиуса r, проходящей через точку A (рис. 2.17).

Для всех точек этой поверхности $E_n = E(r)$. Внутрь поверхности попадает весь заряд q, создающий рассматриваемое поле. Следовательно, $E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (так как $\oint(\vec{E}d\vec{S}) = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$).

Таким образом, напряженность поля в точках, расположенных на расстоянии $r>R$, равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad (1.33)$$

Поле вне заряженной сферической поверхности имеет такой же вид, как поле точечного заряда q, находящегося на расстоянии r от точ-

ки A. Если известна поверхностная плотность заряда σ, то $q = \sigma 4\pi R^2$, подставив в (1.33), получим

$$E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}. \qquad (1.34)$$

6. Поле объемного заряженного шара

Найдем напряженность поля, созданного заряженным шаром в точке A, находящейся на расстоянии r от центра шара. Окружим заряженное тело замкнутой сферической поверхностью, радиуса r, проходящей через точку A (рис. 1.26).

Для всех точек этой поверхности $E_n = E(r)$. Внутрь поверхности попадает весь заряд q, создающий рассматриваемое поле. Следовательно, $E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (так как $\oint(\vec{E}d\vec{S}) = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$). Таким образом, для поля *вне шара* радиусом R (рисунок 2.18) получается тот же результат, что и для сферы, т.е. справедлива формула:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

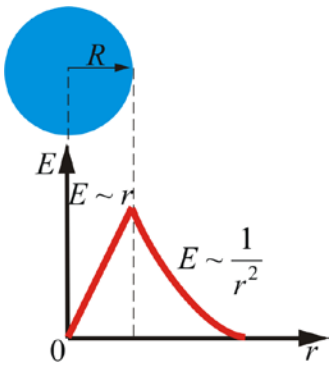


Рис.1.26

Точка B находится внутри заряженной сферической поверхности, на расстоянии r от центра ($r<R$). Сферическая поверхность, проведенная через эту точку содержать в себе заряд, равный

$$q = \rho\frac{4}{3}\pi r^3,$$

где ρ – объемная плотность заряда, равная $\rho = \frac{q}{V}$; $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ – объем шара. Тогда по теореме Остроградского-Гаусса $\oint_s E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$ запишем:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3,$$ т.е. *внутри шара*

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}. \qquad (1.35)$$

Таким образом, внутри шара напряженность поля пропорциональна расстоянию от центра $E \sim r$.

1.10. Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

С помощью дифференциальной формы теоремы можно рассчитать электростатическое поле при произвольном пространственном распределении зарядов. В ней установлена связь между объемной плотностью заряда ρ и изменением $\vec{E}$ в окрестности данной точки пространства.

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса, согласно которой поток вектора $\vec{A}$ через любую замкнутую поверхность равен интегралу от его дивергенции по объему, охватываемому этой поверхностью, т.е. $\oint_S A_n dS = \int_V div\vec{A}dV$. *Дивергенцией вектора* $\vec{A}$ *(обозначается* $div\vec{A}$*) в какой либо точке поля называется, предел отношения потока вектора* $\vec{A}$ *через замкнутую поверхность* S*, охватывающую точку* M*, к объему* ΔV *части поля, ограниченной поверхностью* S*, при неограниченном уменьшении* ΔV*:*

$$\mathrm{div}\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint(\vec{A}d\vec{S}). \qquad (1.36)$$

Пусть заряд распределен в пространстве ΔV, с объемной плотностью $<\rho>$. Тогда по теореме Остроградского – Гаусса

$$\oint(\vec{E}d\vec{S}) = \frac{q}{\varepsilon_0}; \quad \text{или} \quad \oint(\vec{E}d\vec{S}) = \frac{<\rho>\Delta V}{\varepsilon_0}; \qquad \frac{1}{\Delta V}\oint(\vec{E}d\vec{S}) = \frac{<\rho>}{\varepsilon_0}.$$

Теперь устремим $\Delta V \to 0$, стягивая его к интересующей нас точке. Очевидно, что при этом $<\rho>$ будет стремиться к ρ в данной точке, т.е. $\frac{<\rho>}{\varepsilon_0} \to \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Величину, являющуюся пределом отношения $\oint(\vec{E}d\vec{S})$ к ΔV, при $\Delta V \to 0$, называют *дивергенцией вектора* $\vec{E}$ *и* обозначается $\mathrm{div}\vec{E}$. Тогда, по определению

$$\mathrm{div}\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint (\vec{E} d\vec{S}). \qquad (1.37)$$

Аналогично определяется дивергенция любого другого векторного поля. Из этого определения следует, что *дивергенция* является *скалярной функцией координат*. В декартовой системе координат

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \qquad (1.38)$$

Итак,

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (1.39)$$

Это теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме. Это уравнение свидетельствует о том, что источником электростатического поля являются свободные электрические заряды.

Написание многих формул упрощается, если ввести векторный дифференциальный оператор $\vec{\nabla}$ (Набла)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}, \qquad (1.40)$$

где ***i***, ***j***, ***k*** – орты осей (единичные векторы).

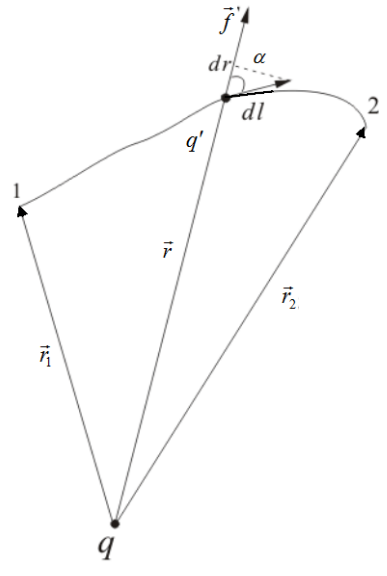
Сам по себе оператор $\vec{\nabla}$ смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании с векторной или скалярной функцией, на которую символично умножается:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (1.41)$$

Формула (1.41) это тоже *дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса.*

В тех точках поля, где $\mathrm{div}\,E > 0$ – (положительные заряды) *источники* поля, где $\mathrm{div}\,E < 0$ – *стоки* (отрицательные заряды). *Линии* $\vec{E}$ *выходят из источников и заканчиваются в стоках.*



1.11. Работа сил электрического поля. Консервативность электростатических сил

Сила, действующая на точечный заряд, находящийся в поле другого неподвижного

точечного заряда, является центральной. Направление силы, действующей в любой точке пространства на заряд, проходит через центр заряда, создающего поле, а значение силы зависит только от расстояния до этого заряда. Если тело поставлено в такие условия, что в каждой точке пространства оно подвержено воздействию других тел с силой, закономерно изменяющейся от точки к точке, то говорят, что это тело находится в поле сил. Центральное поле сил потенциально. Убедимся, что электрическое поле потенциально. Вычислим работу, которая совершается силами поля неподвижного точечного заряда q над перемещающимся в этом поле точечным зарядом q' (рис.1.27). Работа на элементарном пути dl равна: $dA = (\vec{F}d\vec{l})$ или

$$dA = Fdl\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}dl\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}dr,$$

так как $dl\cos\alpha = dr$. Отсюда на пути 1–2

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (1.41)$$

Видно, что работа не зависит от пути, по которому перемещался в электрическом поле заряд q', а зависит лишь от начального и конечного положений этого заряда (от r_1 и r_2). Следовательно, силы, действующие на заряд q' в поле неподвижного заряда q, являются консервативными, а поле этих сил *потенциальным.* Этот вывод легко распространяется на поле любой системы неподвижных зарядов, так как сила $\vec{f}$, действующая на точечный заряд q' в таком поле, может по принципу суперпозиции быть представлена в виде $\vec{f} = \sum \vec{f}_i$, где $\vec{f}_i$ – сила, обусловленная i-м зарядом создающей поле системы. Работа в этом случае равна алгебраической сумме работ, совершаемых отдельными силами: $A = \sum A_i$. Каждое из слагаемых в правой части этого выражения не зависит от пути. Поэтому не зависит от пути и работа A.

Из механики известно, что работа потенциальных сил на замкнутом пути равна нулю. Работа, совершаемая силами поля над зарядом q' при обходе по замкнутому контуру, может быть представлена как $\oint q'E_l dl$, где E_l–проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения dl, то, следовательно:

$$\oint E_l dl = 0 \qquad (1.42)$$

Это соотношение должно выполняться для любого замкнутого контура. Следует иметь в виду, что (1.42) справедливо только для электростатического поля. Поле движущихся зарядов (т.е. поле, изменяю-

щееся со временем) не является потенциальным. Следовательно, условие (1.42) для него не выполняется.

Выражение вида $\oint A_l dl$ называется циркуляцией вектора $\vec{A}$ по данному контуру. Таким образом, *характерным для электростатического поля является то, что циркуляция вектора напряженности по любому замкнутому контуру равна нулю.*

1.12. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля

Итак, мы утверждаем, что циркуляция вектора $\vec{E}$ в любом электростатическом поле равна нулю, т.е. $\oint E_l dl = 0$. Это утверждение называют теоремой о циркуляции вектора $\vec{E}$. Пусть в заданном поле с напряженностью $\vec{E}$ перемещается заряд по замкнутому пути 1а2б1. Для доказательства теоремы разобьем произвольный замкнутый путь на две части 1а2 и 2б1 (см. рис.1.27). Найдем работу по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2. Так как работа в заданном поле не зависит от формы пути, то работа по перемещению заряда по пути 1а2 равна работе по перемещению заряда по пути 1б2 или $q\int\limits_{1a}^{2}\vec{E}d\vec{l} = -q\int\limits_{1б}^{2}\vec{E}d\vec{l}$

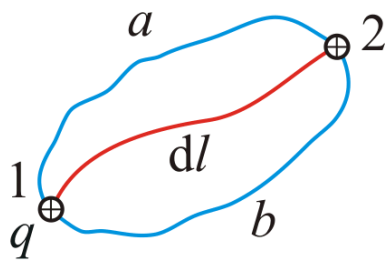


Рис.1.27

Из сказанного выше следует, что

$$\int\limits_{1a}^{2}(\vec{E}d\vec{l}) = \int\limits_{2б}^{1}(\vec{E}d\vec{l})$$

(Интегралы по модулю равны, но знаки противоположны). Тогда работа по замкнутому пути:

$$A = q\oint(\vec{E}d\vec{l}) = q\int\limits_{1}^{2}(\vec{E}d\vec{l}) - q\int\limits_{2}^{1}(\vec{E}d\vec{l}) = 0. \qquad (1.43)$$

или $$\oint(\vec{E}d\vec{l}) = 0 \qquad (1.44)$$

Поле, обладающее такими свойствами, называется *потенциальным*. *Любое электростатическое поле является потенциальным.*

Теорема о циркуляции позволяет сделать ряд важных выводов, практически не прибегая к расчетам. Рассмотрим два простых примера, подтверждающих это заключение.

1. *Линии электростатического поля не могут быть замкнутыми*. В самом деле, если это не так, и какая-то линия $\vec{E}$ – замкнута, то, взяв циркуляцию вдоль этой линии, мы сразу же придем к противоречию с *теоремой о циркуляции вектора* $\vec{E}$: $\oint(\vec{E}d\vec{l})=0$. А в данном случае направление интегрирования в одну сторону, поэтому циркуляция вектора $\vec{E}$ не равна нулю.

2. *Электростатическое поле не вихревое.* В ряде случаев для решения задачи о нахождении поля по известному неоднородному распределению зарядов с плотностью $\rho(x,y,z)$, нужны уравнения, содержащие характеристики поля в данной точке пространства или в ее малой окрестности (такое как, например, теорема Остроградского- Гаусса в дифференциальной форме). Получим такое уравнение, отражающее потенциальный характер электростатического поля.

Воспользуемся теоремой Стокса, которая гласит, что циркуляция вектора $\vec{A}$ по произвольному контуру L равна потоку ротора этого вектора через любую поверхность, натянутую на этот контур, т.е. $\oint\limits_L \vec{A}d\vec{l}=\int\limits_S (rotA)_n dS$. В случае электростатического поля имеем $\oint\limits_L (\vec{E}d\vec{l})=\int\limits_S (rotE)_n dS=0$, поэтому в силу произвольности вида поверхности получим $rot\vec{E}=0$. Следовательно, из потенциального характера электростатического поля вытекает, что *электростатическое поле не вихревое, если*

$$rot\vec{E}=0 \qquad (1.45)$$

1.13. Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

Тело, находящееся в поле потенциальных сил, обладает потенциальной энергией, за счет которой совершается работа силами поля. Следовательно, работа может быть представлена как разность значений потенциальных энергий, которыми обладает заряд q' в точках 1 и 2 поля заряда q

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r_2} = W_{P_1} - W_{P_2} \qquad (1.45)$$

Можно показать также, что, так как $f = -\frac{dW_P}{dr}$, $dW_P = -fdr$

$$W_P = -\int \frac{qq'dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + const = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r} + const.$$

Отсюда для потенциальной энергии заряда q' в поле заряда q получаем:

$$W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r} + const \qquad (1.46)$$

Значение *const* в (1.46) обычно выбирают таким образом, чтобы при удалении заряда q' на бесконечность ($r = \infty$) потенциальная энергия обращалась в нуль. При этом условии получается, что

$$W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}. \qquad (1.47)$$

Будем считать q' пробным зарядом. Тогда потенциальная энергия, которой обладает пробный заряд, зависит не только от его значения q', но и от значения q и r, определяющих поле. Следовательно, эта энергия может быть использована для описания поля, подобно тому, как была использована для этой цели сила, действующая на пробный заряд.

Разные пробные заряды $q'_{пр}$, $q''_{пр}$ будут обладать в одной и той же точке поля различной энергией W'_P, W''_P и т.д. Однако отношение $\frac{W_P}{q'_{пр}}$ будет для всех зарядов одно и то же. Величина

$$\varphi = \frac{W_P}{q_{пр}} \qquad (1.48)$$

называется *потенциалом* поля в данной точке и используется наряду с напряженностью поля $\vec{E}$, для описания электрических полей.
Как следует из (1.48) *потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля единичный положительный заряд.*

Таким образом, для потенциального поля точечного заряда получаем следующее выражение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \qquad (1.48)$$

Если поле создано системой точечных зарядов q_1, q_2, …, q_n, находящихся на расстояниях соответственно r_1, r_2,…, r_n до точки поля, в которой находится заряд q', то работа, совершаемая силами этого поля над зарядом q', будет равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности:

$$A_{12} = \sum A_i .$$

Но каждая из работ A_i равна:

$$A_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{q_i q'}{r_{i2}}\right),$$

где r_{i1} – расстояние от заряда q_i до начального положения заряда q', r_{i2} – расстояние от заряда q_i до конечного положения заряда q'.

Следовательно:

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i q'}{r_{i2}}.$$

Сопоставляя это выражение с соотношением $A_{12} = W_{p_1} - W_{p_2}$, получаем для потенциальной энергии заряда q' в поле системы зарядов выражение:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i q'}{r_i}, \qquad (1.49)$$

откуда

$$\varphi = \frac{W_P}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}. \qquad (1.50)$$

Следовательно, потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

Из соотношения $\varphi = \frac{W_p}{q_{ïð}}$ вытекает, что заряд q, находящийся в точке поля с потенциалом φ, обладает потенциальной энергией $W_p = q\varphi$. Следовательно, работа сил поля над зарядом q может быть выражена через разность потенциалов:

$$A_{12} = W_{p_1} - W_{p_2} = q(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (1.51)$$

Таким образом, работа, совершаемая над зарядом силами поля, равна произведению заряда на разность потенциалов в начальной и ко-

нечной точках. Если заряд q из точки с потенциалом φ удаляется на бесконечность (где по условию потенциал равен нулю), работа сил поля будет равна

$$A_{\infty} = q\varphi \text{ или } \varphi = \frac{A_{\infty}}{q}, \qquad (1.52)$$

т. е, *потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки поля в бесконечность, или работе, которую надо совершить против сил электрического поля для того, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля.*

За единицу потенциала следует принять потенциал в такой точке поля, для перемещения заряда в которую из бесконечности необходимо совершить работу, равную 1 Джоулю (система единиц “Си”)

$$1Дж = 1Кл \cdot 1В$$

Отсюда $1В = \frac{1Дж}{1Кл}$.

1.14. Диполь в электростатическом поле

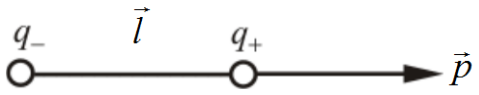


Рис.1.28

Электрическим диполем называется совокупность двух равных зарядов противоположного знака, находящихся друг от друга на расстоянии l, малом по сравнению с их расстоянием до точек, в которых определяется поле диполя.

Произведение заряда на расстояние между зарядами $p=ql$ называется *дипольным моментом*. Для полного определения диполя нужно задать еще и ориентацию оси диполя в пространстве. В соответствии с этим дипольный момент следует рассматривать как вектор $\vec{p}$. Этому вектору приписывают направление *от отрицательного заряда к положительному* (рис.1.28). Если ввести радиус – вектор $\vec{l}$ проведенный от $-q$ к $+q$, то дипольный момент можно представить в виде:

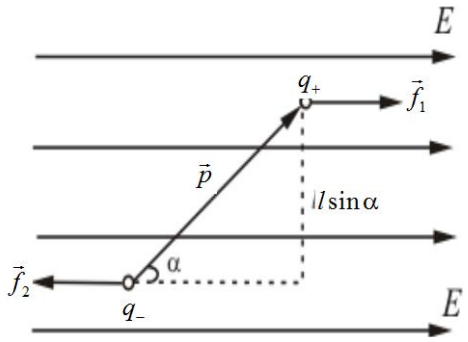


Рис.1.29

$$\vec{p} = q\vec{l}\ . \qquad (1.53)$$

Если диполь поместить в однородное электрическое поле, образующие диполь заряды $-q$ и $+q$ окажутся под действием равных по величине, но противоположных по направлению сил $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ (рис. 1.29). Эти силы образуют пару сил, плечо которой равно $l \cdot \sin\alpha$, т.е., зависит от ориентации диполя относительно поля. Модуль каждой из сил равен qE. Умножив его на плечо, получим значение момента пары сил, действующих на диполь:

$$M = qEl\sin\alpha = pE\sin\alpha \qquad (1.54)$$

где p – электрический момент диполя.

В векторном виде:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}\vec{E}\right]. \qquad (1.55)$$

Момент $\vec{M}$ стремится повернуть диполь так, чтобы его момент $\vec{p}$ установился по направлению поля. Чтобы увеличить угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{E}$ на $d\alpha$ нужно совершить работу против сил, действующих на диполь:

$$dA = Md\alpha = pE\sin\alpha d\alpha \qquad (1.56)$$

Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии W, которой обладает диполь в электрическом поле, т.е.:

$$dW = pE\sin\alpha d\alpha \qquad (1.57)$$

Интегрирование (1.57) дает для потенциальной энергии диполя в электрическом поле выражение :

$$W = -pE\cos\alpha + const \qquad (1.58)$$

Полагая $const=0$, получим

$$W = -pE\cos\alpha = -(\vec{p}\vec{E}) \qquad (1.59)$$

Выбрав $const=0$, считаем, что энергия диполя будет равна нулю, когда диполь устанавливается перпендикулярно к направлению поля. Наименьшее значение энергии, равное $(-pE)$, получается при ориентации диполя по направлению поля, наибольшее, равное pE, когда $\vec{p}$ направлен в сторону, противоположную по направлению вектору $\vec{E}$.

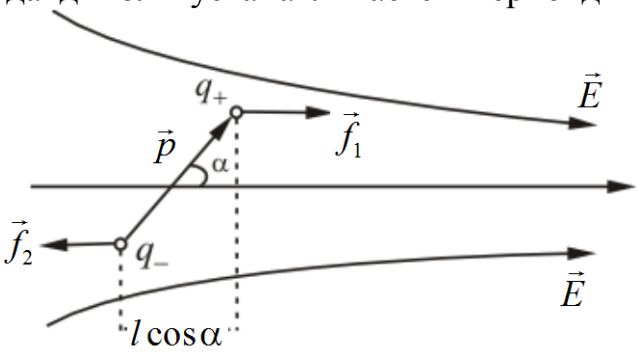


Рис.1.30

В неоднородном поле силы, действующие на заряды диполя, не одинаковы. При малых размерах диполя силы f_1 и f_2

можно считать приближенно коллинеарными. Предположим, что поле изменяется быстрее всего в направлении x, совпадающем с направлением $\vec{E}$ в том месте, где расположен диполь (рис. 1.30). Положительный заряд диполя смещен относительно отрицательного в направлении x на величину $\Delta x = l\cos\alpha$. Поэтому напряженность поля в точках, где помещаются заряды, отличается на ΔE. Так как сумма сил $f_1 = qE_1$ и $f_2 = -qE_2$

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2; \text{ или } \quad f = q(E_1 - E_2) = q\Delta E, \tag{1.60}$$

$\Delta E = \dfrac{dE}{dx} l\cos\alpha$, то

$$f = q\frac{dE}{dx} l\cos\alpha = p\frac{dE}{dx}\cos\alpha, \tag{1.61}$$

где $\dfrac{dE}{dx}$ – градиент вектора напряженности электрического поля. Таким образом, в неоднородном электрическом поле, кроме вращающегося момента, действует сила f, под действием которой диполь будет либо втягиваться в область более сильного поля ($\alpha<90^0$), либо выталкиваться из нее ($\alpha>90^0$).

Выражение для силы можно получить из (1.59), учтя, что $f = -\dfrac{dW}{dx}$.

1.15. Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом

Напряженность электрического поля – величина, численно равная силе, действующей на заряд. Потенциал φ – величина, численно равная потенциальной энергии заряда. Таким образом, между этими величинами должна существовать связь, аналогичная связи между потенциальной энергией и силой (т.е. $f = -\dfrac{dW}{dx}$). Работа сил поля над зарядом q на отрезке пути dl может быть представлена как $dA = qE_l dl$, а убыль потенциальной энергии заряда, которая при этом будет возникать: $-dU = -d(q\varphi) = -qd\varphi$. Откуда из равенства $dA = -dU$ находим:

$$qE_l dl = -qd\varphi \text{ или } E_l = -\frac{d\varphi}{dl}, \tag{1.62}$$

где через l обозначено произвольно выбранное направление.
Тогда,

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx},\ E_y = -\frac{d\varphi}{dy},\ E_z = -\frac{d\varphi}{dz}, \qquad (1.63)$$

Откуда

$$\vec{E} = \vec{i}\,E_x + \vec{j}\,E_y + \vec{k}\,E_z = -\left(\vec{i}\,\frac{d\varphi}{dx} + \vec{j}\,\frac{d\varphi}{dy} + \vec{k}\,\frac{d\varphi}{dz}\right), \qquad (1.64)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей, т. е., единичные вектора. Вектор с компонентами $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$, где φ – скалярная функция координат x, y, z называется <u>градиентом</u> функции φ и обозначается символом $grad\varphi$ (или $\nabla\varphi$, где ∇ – оператор набла). Таким образом, градиент потенциала:

$$\overrightarrow{grad}\varphi = \vec{i}\,\frac{d\varphi}{dx} + \vec{j}\,\frac{d\varphi}{dy} + \vec{k}\,\frac{d\varphi}{dz} \qquad (1.65)$$

и из (1.64) и (1.65) следует, что

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi \qquad (1.66)$$

Так как градиент – это вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой, то градиентом потенциала $\frac{d\vec{\varphi}}{dr}$ (где r–радиус-вектор) называется вектор, направленный в сторону наиболее быстрого возрастания потенциала, численно равный быстроте его изменения на единицу длины в этом направлении.

Поскольку $\overrightarrow{grad}\,\varphi$ – векторная величина, то его модуль выражается как:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}, \qquad (1.67)$$

подобно тому, как модуль вектора $\vec{E}$:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \qquad (1.68)$$

Знак “–” (1.66) указывает на то, что напряженность $\vec{E}$ направлена в сторону убывания потенциала. Формула (1.66) позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке или решить обратную задачу, т.е., по заданным значения $\vec{E}$ в каждой точке найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля.

1.16. Эквипотенциальные поверхности

Потенциал электростатического поля представляет собой функцию, меняющуюся от точки к точке. Однако, во всяком реальном случае можно выделить совокупность точек, потенциалы которых одинаковы.

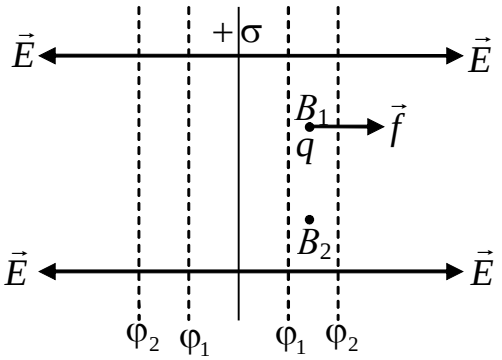


Рис.1.31

Геометрическое место точек постоянного потенциала называется поверхностью равного потенциала или эквипотенциальной поверхностью.

Возьмем равномерно заряженную бесконечную плоскость (рис. 1.31). Поле, создаваемое такой плоскостью однородно, а линии напряженности нормальны к плоскости. Отсюда следует, что работа перемещения заряда из некоторой точки B_1 в любую другую точку B_2, находящуюся на таком же расстоянии от заряженной поверхности, что и точка B_1 равна нулю. Действительно, при перемещении некоторого заряда q по прямой B_1B_2 сила, действующая на заряд со стороны поля, будет все время перпендикулярна к перемещению, а, следовательно, ее работа равна нулю. Но эта работа может быть представлена, с другой стороны, в виде:

$$A = q(\varphi_{B_1} - \varphi_{B_2}) = 0, \qquad (1.69)$$

где φ_{B_1} и φ_{B_2} – соответственно потенциалы точек B_1 и B_2. Отсюда, так как $A = 0$, то $\varphi_{B_1} = \varphi_{B_2}$, т.е., потенциалы точек, равноудаленных от заряженной плоскости, одинаковы. Таким образом, поверхности равного потенциала (эквипотенциальные поверхности) являются плоскостями, параллельными заряженной плоскости. Если плоскость заряжена положительно, то значение потенциала убывает по мере удаления от заряженной плоскости. Очевидно, что поверхности равного потенциала расположены симметрично по обе стороны от заряженной плоскости.

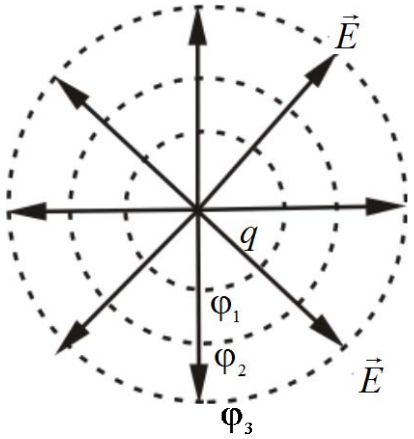


Рис.1.32

Эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда это сферы с радиусом

r , центр которых находится в центре точечного заряда, т.е. $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (рис. 1.32). На рис. 1.31 и рис. 1.32 вектор напряженности $\vec{E}$ перпендикулярен эквипотенциальным поверхностям.

Покажем, что вектор напряженности перпендикулярен эквипотенциальной поверхности. Рассмотрим работу по перемещению заряда по поверхности равного потенциала на малом участке пути ΔS (рис. 1.32). При этом, работа электрической силы $\vec{f} = q\vec{E}$ на данном пути будет:

$$\Delta \grave{A} = f\Delta S\cos\alpha = q\mathrm{E}\Delta S\cos\alpha, \qquad (1.70)$$

где α – угол между направлением силы f и перемещением ΔS. С другой стороны, эта работа может быть выражена как произведение величины перемещающегося заряда на разность потенциалов в начальном и конечном положениях заряда, т.е. $\Delta A = q(\varphi_A - \varphi_B)$.

Так как перемещение идет по эквипотенциальной поверхности, то разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B = 0$ и $q\mathrm{E}\Delta S\cos\alpha = 0$, или cosα = 0, значит α = 90^0 т.е. угол между направлением силы $\vec{f}$ и перемещением ΔS равен 90^0. Но $\vec{f} = q\vec{E}$, т.е. направления $\vec{f}$ и $\vec{E}$ совпадают, поэтому угол между $\vec{E}$ и ΔS, α=90^0 т.е. *направление вектора напряженности электростатического поля всегда перпендикулярно к эквипотенциальной поверхности.*

Эквипотенциальных поверхностей вокруг заряженного тела можно провести сколько угодно много. По густоте эквипотенциальных поверхностей можно судить о величине $\vec{\mathrm{E}}$, однако при условии, что разность потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями равна постоянной величине.

Формула $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi$ выражает связь потенциала с напряженностью и позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке. Можно решить и обратную задачу, т.е. по известным значениям $\vec{\mathrm{E}}$ в каждой точке поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля. Для этого воспользуемся тем, что работа, совершаемая силами поля над зарядом q при перемещении его из точки 1 в точку 2, может быть, вычислена как: $A_{12} = q\int_1^2 (\vec{\mathrm{E}}, \mathrm{d}\vec{\mathrm{l}})$.

С другой стороны работу можно представить в виде: $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}). \qquad (1.71)$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющие точку 1 и точку 2, т.к. работа сил поля не зависит от пути.

При обходе по замкнутому контуру $\varphi_1 = \varphi_2$ получим: $\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$, т.е. пришли к известной нам теореме о циркуляции вектора напряженности: *циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.*

Поле, обладающее этим свойством, называется потенциальным.

Из обращения в нуль циркуляции вектора $\vec{E}$ *следует, что линии* $\vec{E}$ *электростатического поля не могут быть замкнутыми*: *они начинаются на положительных зарядах* (*истоки*) *и на отрицательных зарядах заканчиваются* (*стоки*) *или уходят в бесконечность*.

Обобщим теорему Гаусса и теорему о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в вакууме. Так как $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi$, а $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, то $-\varepsilon_0 div(grad\varphi) = \rho$. Поскольку $div(grad\varphi) = \Delta\varphi$ ($\Delta\varphi$-оператор Лапласа), то для потенциала φ получим выражение $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ или $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, которое называется *уравнением Пуассона*. Это уравнение позволяет по известному распределению заряда $\rho = \rho(x, y, z)$ и заданным граничным условием для потенциала φ определить значения $\varphi = \varphi(x, y, z)$ во всех точках поля, а затем по формуле $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi$ найти напряженность $\vec{E}(x, y, z)$ поля, т.е. решить прямую задачу электростатики.

1.17. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля простейших электростатических полей

Установленная связь между напряженностью и потенциалом позволяет по известной напряженности поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками этого поля.

Рассмотрим несколько примеров вычисления разности потенциалов между точками поля, созданного некоторыми заряженными телами.

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости, найденная с помощью теоремы Остроградского-Гаусса, определяется по формуле $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, где σ – поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от плоскости, равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1). \qquad (1.72)$$

2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей

Напряженность электростатического поля между заряженными плоскостями, найденная с помощью теоремы Остроградского-Гаусса $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, где σ = q/S – поверхностная плотность заряда.

Так как напряженность связана с потенциалом $E = -\frac{d\varphi}{dl}$,

то

$$d\varphi = -E dl, \qquad (1.73)$$

Теперь, чтобы получить выражение для разности потенциалов любыми двумя точками, находящимися на расстояниях x_1 и x_2 между плоскстями, проинтегрируем выражение (1.73):

$$\int_1^2 d\varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} dx;$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x_2 - x_1) \text{ или } \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x_2 - x_1). \qquad (1.74)$$

При $x_1 = 0$ и $x_2 = d$, разность потенциалов между плоскостями

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}. \qquad (1.75)$$

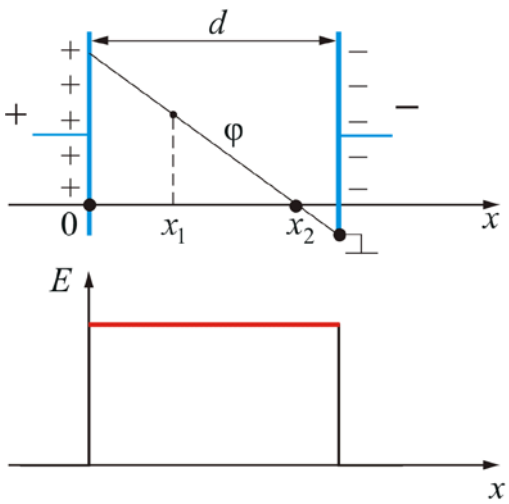


Рис.1.33

На рисунке изображена зависимость напряженности E и потенциала φ от расстояния между плоскостями.

3. Поле бесконечно длинной равномерно заряженной цилиндрической поверхности

С помощью теоремы Остроградского-Гаусса мы показали, что, т.к. $\Phi_E = \oint_s E\mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$, то (рис.1.34)

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \text{ или } \dfrac{\mathrm{q}}{2\pi\varepsilon_0 Rl} \text{ на поверхности цилиндра} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ или } \dfrac{\mathrm{q}}{2\pi\varepsilon_0 rl} \text{ вне цилиндра.} \end{cases} \qquad (1.76)$$

где $\lambda = \frac{q}{l}$ – линейная плотность заряда.

Тогда, т.к. $\mathrm{d}\varphi = -E\mathrm{d}r$; $\int_1^2 \mathrm{d}\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}$, отсюда следует разность потенциалов в произвольных точках 1 и 2 будет равна:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{1}{R} = \text{const} - \text{внутри и на поверхности цилиндра} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R} \ - \text{вне цилиндра.} \end{cases} \qquad (1.77)$$

На рисунке 1.34 изображена зависимость напряженности E и потенциала φ от r. (Здесь и далее E – изображена сплошной линией, а φ – пунктирной).

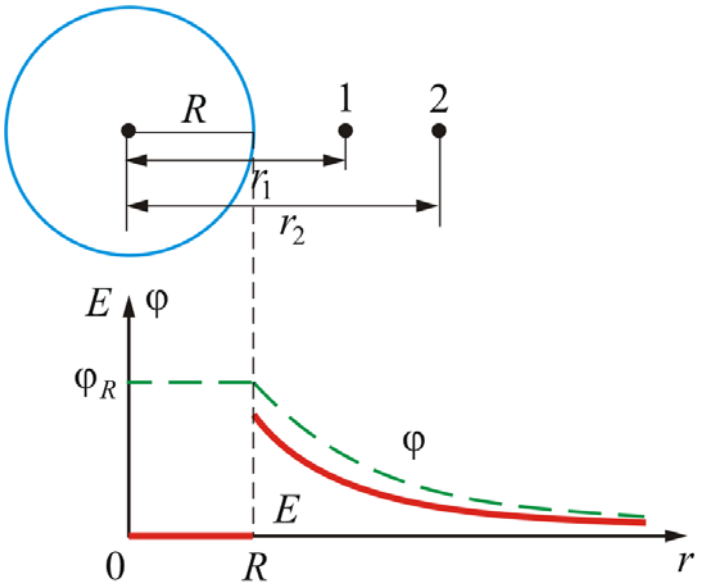


Рис.1.34

4. Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора

Рассматривая примеры применения теоремы Остроградского-Гаусса мы нашли, что (рис. 1.35)

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри меньшего и вне большего цилиндров зарядов нет} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} - \text{между цилиндрами, когда } R_1 < r < R_2. \end{cases} \qquad (1.78)$$

Отсюда так же, как и в предыдущем случае, разность потенциалов будет равна:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R_2}{R_1} = \text{const} - \text{внутри меньшего цилиндра } (r < R_1) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R_1} - \text{между цилиндрами } (R_1 < r < R_2) \\ 0 \ - \ \text{вне цилиндров.} \end{cases} \qquad (1.79)$$

Таким образом, внутри меньшего цилиндра имеем $\varphi = \text{const}$, $E = 0$, между обкладками потенциал уменьшается по логарифмическому закону, а вторая обкладка (вне цилиндров) экранирует электрическое поле и φ и E равны нулю.

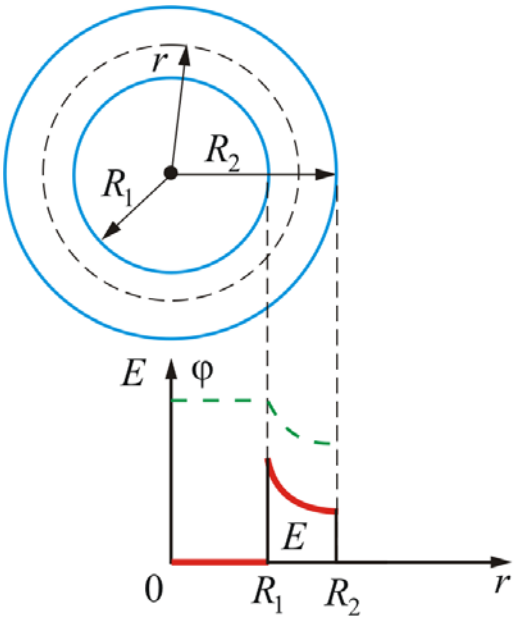


Рис.1.35

На рис. 1.35 изображена зависимость напряженности E и потенциала φ от r.

5. Поле равномерно заряженной сферической поверхности

Рассматривая примеры применения теоремы Остроградского-Гаусса мы нашли, что напряженность поля сферы определяется формулой : $E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (рис. 1.36). А т.к. $d\varphi = -Edr$, то

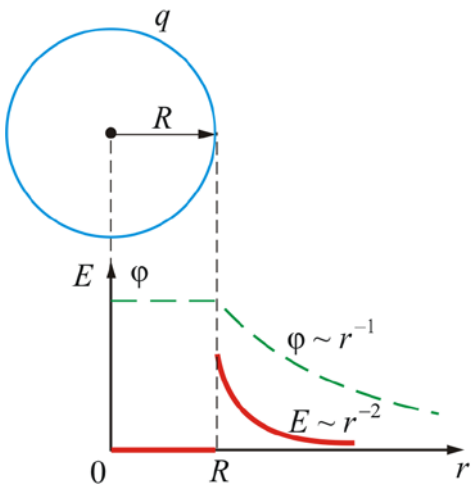


Рис.1.36

$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$. Если принять $r_1 = r$, а $r_2 = \infty$, то потенциал вне сферической поверхности определяется выражением $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Внутри сферической поверхности потенциал всюду одинаков и равен $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$, так как напряженность поля внутри сферической поверхности равна нулю.

Отсюда имеем

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} = \text{const} - \text{внутри и на поверхности сферы } (r \le R) \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{вне сферы } (r > R). \end{cases} \quad \textbf{(1.80)}$$

6. Поле объемно заряженного шара

Имеем шар радиусом R с общим зарядом q, т.е. заряженный с объемной плотностью $\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}$. Напряженность поля объемно заряженного шара радиусом R, с общим зарядом q, вне шара ($r>R$) вычисляется по формуле $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$. Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра шара ($r_1>R$, $r_2>R$, $r_2>r_1$),

определяется формулой

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (1.81)$$

Если принять, что $r_1 = r$, а $r_2 = \infty$, то потенциал вне сферической поверхности определяется выражением $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. В частности, при $r = R$, потенциал поверхности сферы, относительно точки с нулевым потенциалом равен $\varphi(R) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$ (нулевой уровень потенциала нами выбран для точки $r_2 = \infty$).

В любой точке, находящейся внутри шара на расстоянии r' от его центра ($r' < R$), напряженность поля определяется формулой $E_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R^3} r'$. Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1' и r_2' от центра шара равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1^1}^{r_2^1} E_r dr = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[(r_1^1)^2 - (r_2^1)^2\right]. \qquad (1.82)$$

С учетом выбора нулевого уровня потенциала в точке $r_2 = \infty$ потенциал любой точки внутри заряженного шара можно найти следующим образом: $\varphi = \varphi(R) - \int_R^r E_r dr$.

После интегрирования, получим

$$\varphi = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2). \qquad (1.83)$$

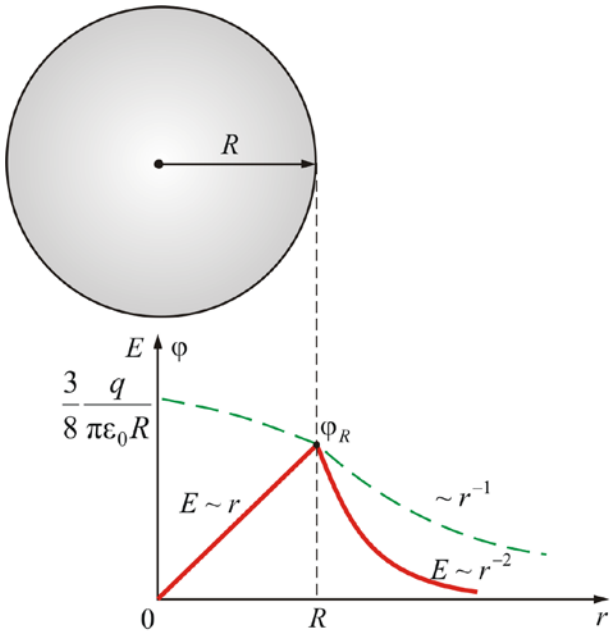


Рис.1.37

Если учесть, что $\rho = \dfrac{3q}{4\pi R^3}$, то

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \text{в центре шара } (r = 0) \\ \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) - \text{внутри шара } (r \le R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{на поверхности и вне шара} (r \ge R). \end{cases} \qquad \textbf{(1.84)}$$

Из полученных соотношений можно сделать следующие выводы:

- *с помощью теоремы Гаусса сравнительно просто можно рассчитать E и φ от различных заряженных поверхностей.*
- *напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.*
- *потенциал поля – всегда непрерывная функция координат.*

Тема 2

ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

2.1. Микро- и макрополе

Положительные и отрицательные заряды, входящие в состав молекул (атомов), называются *связанными*. Под действием электрического поля они могут смещаться из своего положения равновесия, но не могут покинуть молекулу (атом).

Заряды, которые не входят в состав молекул (атомов), но находятся в пределах диэлектрика, а также заряды вне диэлектрика называются *сторонними* или *свободными*.

Микроскопическое или *истинное* поле – суперпозиция (результат) поля сторонних зарядов ($\vec{E}_{стор}$) и поля связанных зарядов ($\vec{E}_{связ}$):

$$\vec{E}_{микро} = \vec{E}_{стор} + \vec{E}_{связ}\,. \qquad (2.1)$$

Микроскопическое поле сильно изменяется в пределах межмолекулярных расстояний (т.е. в пространстве) и во времени, рассчитать такое поле нереально. Поэтому под электрическим полем в веществе, хотя электрический заряд дискретен, но в связи с тем, что число его носителей в макроскопических телах очень велико, понимают усредненное микрополе, которое называется *макроскопическим* полем (макрополем):

$$\vec{E}_{макро} = \left\langle \vec{E}_{микро} \right\rangle = \left\langle \vec{E}_{стор} \right\rangle + \left\langle \vec{E}_{связ} \right\rangle = \vec{E}_0 + \vec{E}'\,. \qquad (2.2)$$

2.2. Проводники и диэлектрики

Проводники – это вещества, в которых свободные заряды перемещаются под действием электрического поля на макроскопические расстояния.

Металлы (свободные заряды: электроны) – проводники *первого рода*, в них протекание тока не связано с переносом вещества.

Электролиты и *ионизированный газ* (свободные заряды: положительные и отрицательные ионы) – проводники *второго рода*, в них при протекании тока происходит перенос вещества.

Диэлектрики (изоляторы) – это вещества, не способные проводить электрический ток.

Идеальных изоляторов в природе не существует. Удельное сопротивление диэлектриков в $10^{15} \div 10^{20}$ раз больше, чем у проводников. Диэлектрики содержат положительные и отрицательные связанные заряды, входящие в состав атомов и молекул. Линейные размеры молекул и атомов имеют порядок нескольких ангстрем (1 Å = 10^{-10} м).

Молекула в целом электрически нейтральна, тем не менее, она может обладать электрическими свойствами.

• Все положительные заряды молекул (атомов) можно заменить одним суммарным зарядом $+q$, помещенным в некоторую точку, называемую *«центром тяжести положительных зарядов»* (аналог – центр масс), её радиус вектор:

$$\vec{r}_+ = \frac{\sum q_{i+}\vec{r}_{i+}}{q_+}. \qquad (2.3)$$

• По аналогии для отрицательных зарядов вводим понятие *«центр тяжести отрицательных зарядов»*:

$$\vec{r}_- = \frac{\sum q_{i-}\vec{r}_{i-}}{q_-}. \qquad (2.4)$$

В первом приближении молекулу можно рассматривать как диполь (дипольный момент $\vec{p} = |q|\vec{l}$).

Диэлектрики в зависимости от строения их молекул и внутренней структуры можно разделить на:

1) *неполярные* (H_2, N_2, O_2, CO_2) – молекула имеет симметричное строение, то есть центры тяжести положительных и отрицательных зарядов в отсутствии внешнего электрического поля совпадают, следовательно, собственный дипольный момент такой молекулы равен нулю ($\vec{p} = 0$).

2) *полярные* (H_2O, NH_3, SO_2, CO) – молекула имеет не симметричное строение, то есть центры тяжести положительных и отрицательных зарядов в отсутствии внешнего электрического поля не совпадают, следовательно, молекула обладает дипольным моментом.

3) *ионные диэлектрики* (NaCl, KCl, KBr - ЩГК) – молекулы имеют ионное строение, а диэлектрик представляет собой ионную кристаллическую решетку с чередованием ионов разных знаков, то есть диэлектрик можно рассматривать как две подрешетки противоположных зарядов, вдвинутых одна в другую.

2.3. Диполь в электрическом поле

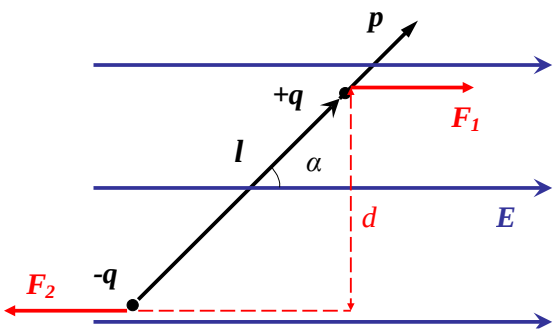


Рис.2.1

Пусть диполь (полярная молекула) (рис.2.1) находится в **однородном** электрическом поле ($\vec{E}$ = *const*). На диполь действует пара сил $|\boldsymbol{F}_1| = |\boldsymbol{F}_2| = F$, которые создают вращающий момент

$$M = Fd\,, \qquad (2.5)$$

где d – кратчайшее расстояние между парой сил.

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_l, \vec{E}\right]. \qquad (2.6)$$

Вращающий момент $\vec{M}$ стремится повернуть диполь и установить его так, чтобы $\vec{p}_l \uparrow\uparrow \vec{E}$.

● Если поле **неоднородное** ($\vec{E} \neq const$), то помимо вращающего момента на диполь действует сила

$$F = F_2 - F_1 = q(E_2 - E_1) = q\frac{\partial E}{\partial l}l = p_l\frac{\partial E}{\partial l},$$
$$\vec{F} = p_l\frac{\partial \vec{E}}{\partial l}. \qquad (2.7)$$

Под действием этой силы диполь стремится переместиться в область наибольшей напряженности $\vec{E}$ электрического поля.

В общем виде имеем: $\vec{F} = grad(\vec{p}_l \cdot \vec{E})$. (2.8)

2.4. Поляризация диэлектриков

Дипольные моменты молекул в неполярном диэлектрике равны нулю. В полярном диэлектрике полярные молекулы обладают дипольным моментом. Но при отсутствии внешнего электрического поля из-за теплового движения молекул дипольные моменты p_i всех молекул ориентированы в пространстве хаотично, поэтому их результирующий электрический момент равен нулю ($\sum \vec{p}_i = 0$).

Поляризация диэлектрика – процесс ориентации диполей или появления под действием внешнего электрического поля $\boldsymbol{E}_0$ ориентированных по полю диполей.

В зависимости от типа диэлектриков будет различаться вид поляризации.

1) Полярные диэлектрики: *ориентационная (дипольная)* поляризация заключается в преимущественной ориентации дипольных моментов хаотически движущихся молекул по полю, чему препятствует тепловое движение молекул (рис. 2.2).

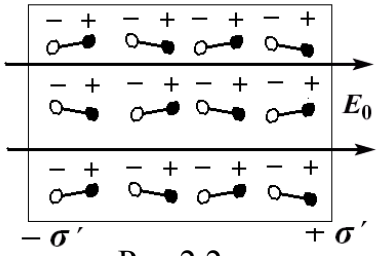


Рис.2.2

2) Неполярные диэлектрики: *электронная (деформационная) поляризация*. Во внешнем электрическом поле $\vec{E}_0$ электронная орбита деформируется, то есть заряды неполярной молекулы смещаются в противоположные стороны (рис. 2.3) и у молекулы появляется дипольный момент $\vec{p}$, который затем поворачивается вдоль напряженности внешнего поля. Показано, что индуцированный дипольный момент неполярной молекулы $\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 r^3 \vec{E} = \alpha\varepsilon_0 \vec{E}$, где $\alpha = 4\pi r^3$ – поляризуемость молекулы (поле диполя $E = \dfrac{p_l}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \sqrt{3cos^2\varphi + 1}$). Наведенный дипольный момент называется *упругим*, так как после выключения электрического поля диполь исчезает.

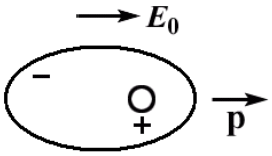


Рис.2.3

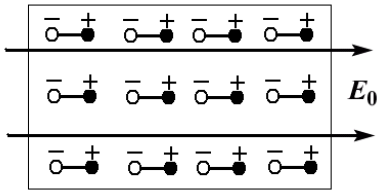


Рис.2.4

Поскольку молекулы диэлектрика остаются при поляризации нейтральными, средняя плотность связанных зарядов внутри диэлектрика $\rho_\varepsilon = 0$. Можно сказать и так: если поле и диэлектрик одно-

родны, то в объеме диэлектрика происходит компенсация положительных и отрицательных зарядов, и суммарный заряд равен нулю. На поверхности диэлектрика возникают *поляризационные* (*связанные*) заряды с поверхностными плотностями $-\sigma'$ и $+\sigma'$ (рис. 2.4).

Если поле неоднородное, то поляризационные заряды возникают и в объеме.

3) Ионные диэлектрики: *ионная* поляризация заключается в смещении подрешетки положительных ионов по полю, а подрешетки отрицательных ионов – против поля, что приводит к возникновению дипольных моментов.

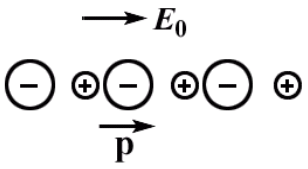


Рис.2.5

2.5. Вектор поляризации. Поляризованность

В результате поляризации диэлектрик приобретает электрический (дипольный) момент отличный от нуля ($\neq 0$). Дипольный момент диэлектрика определяется суммой дипольных моментов молекул:

$$\vec{p}_V = \sum_i \vec{p}_{li}\,, \qquad (2.9)$$

где $p_{l\,i}$ – дипольный момент одной молекулы.

Количественной характеристикой поляризации является физическая величина, называемая *поляризованностью (вектором поляризации)* диэлектрика – дипольный момент единичного объема:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}_V}{V} = \frac{\sum_i \vec{p}_{li}}{V}, \quad [(\text{Кл}\cdot\text{м})/\text{м}^3 = \text{Кл}/\text{м}^2]. \qquad (2.10)$$

Для изотропного диэлектрика с неполярными молекулами:

$$\vec{P} = \vec{p}_l \cdot n = \alpha\varepsilon_0 n\vec{E} = \text{і}\ \varepsilon_0\vec{E},. \qquad (2.11)$$

где n – концентрация молекул, безразмерная величина (каппа) $\text{і} = \alpha\cdot n$ называется *диэлектрической восприимчивостью* вещества. Следовательно, для неполярного диэлектрика: $\vec{P} = \text{і}\ \varepsilon_0\vec{E}$. Все диполи (молекулы) направлены вдоль вектора ***E***. Эта зависимость изображена (рис.2.6) прямой 1 на графике *P(E)*. В случае полярного диэлектрика зависимость *P(E)* имеет другой вид: кривая 2.

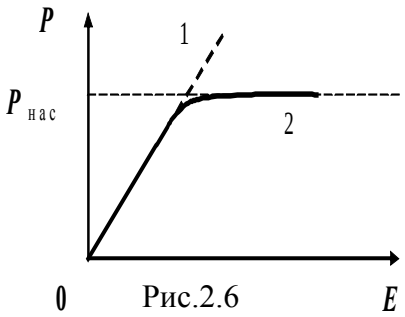


Рис.2.6

При больших полях ($E >> 0$) в случае полярного диэлектрика линейная зависимость $P(E)$ нарушается и выходит на насыщение. Этот факт обусловлен тем, что при определенной величине E достигается такое состояние, когда дипольные моменты всех молекул направлены по полю, то есть наступает насыщение и модуль вектора поляризации достигает $P_{нас.}$

2.6. Связь между вектором поляризации и поверхностной плотностью связанных (поляризационных) зарядов

Рассмотрим бесконечную плоскопараллельную пластину из однородного диэлектрика, помещенного в однородное электрическое поле $\vec{E}$ (рис.2.7).

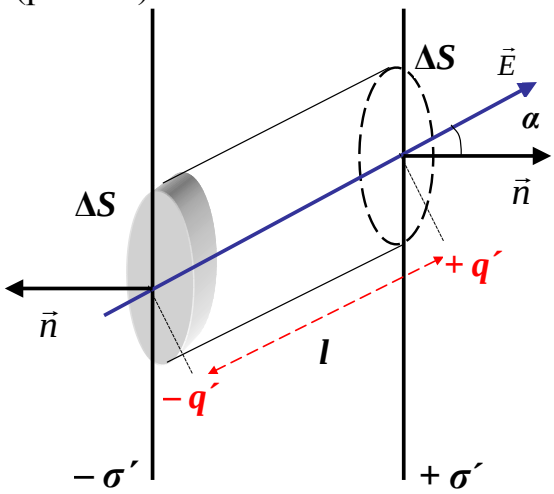


Рис.2.7

Поляризованность $P = \dfrac{p_l}{\Delta V}$ откуда $p_l = P \cdot \Delta V = P \cdot \Delta S \cdot l \cos\alpha$ (2.13)

Левые и правые части уравнений (2.12) и (2.13) равны; следовательно:

$$P\cos\alpha = \sigma' \quad \Rightarrow \quad P_n = \sigma'. \qquad (2.14)$$

P_n – проекция вектора поляризации на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика. P_n численно равна электрическому заряду, смещаемому через единичную площадку в направлении положительной нормали к ней. Проекцию вектора поляризации на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика можно записать с учётом диэлектрической восприимчивости вещества:

$$P_n = \sigma' = \mathrm{i}\ \varepsilon_0 E. \qquad (2.15)$$

2.7. Закон Гаусса для вектора поляризации $\vec{P}$

При неоднородной поляризации (например, для однородного диэлектрика, находящегося в неоднородном поле, или для неоднородного диэлектрика) поляризационные заряды возникают в объеме диэлектрика и вектор поляризации $\vec{P}$ меняется от точки к точке.

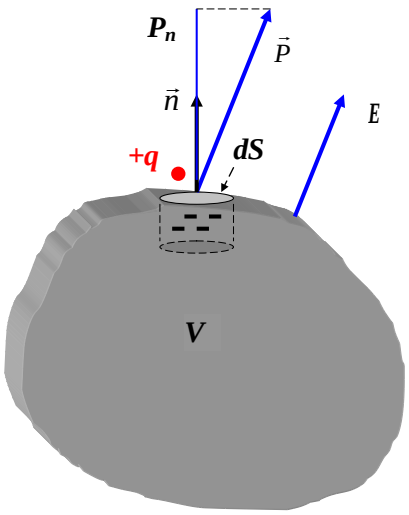


Рис.2.8

щадкой dS: $dq = -\vec{P} \cdot d\vec{S}$. Всю поверхность S пересечет и выйдет наружу заряд

$$Q_{выш} = \sum q_{выш} = \oint_S dq = \oint_S \vec{P} d\vec{S}. \qquad (2.16)$$

В объеме, ограниченном S, возникнет избыточный связанный заряд

$$Q_{связ} = \sum q_{связ} = -\sum q_{выш} = -\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -\oint_S P_n dS. \qquad (2.17)$$

Или

$$-Q_{поляриз} = -\sum q_{поляриз} = -\sum q_{связ} = \oint_S \vec{P} d\vec{S} \text{ м} \qquad (2.18)$$

Закон Гаусса для вектора P: $Q_{поляриз} = -\oint_S \vec{P} d\vec{S}$ (2.19)

Поток вектора поляризации $\vec{P}$ *через произвольную замкнутую поверхность S равен поляризационному заряду диэлектрика в объеме, охватываемом этой поверхностью.*

2.8. Вектор электростатической индукции. Закон Гаусса для вектора электростатической индукции

Поле в среде отличается от поля в вакууме тем, что оно создается как свободными, так и связанными (поляризационными) зарядами. Следовательно, теорема Гаусса приобретает вид:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{своб} + q_{пол}}{\varepsilon_0}. \qquad (2.20)$$

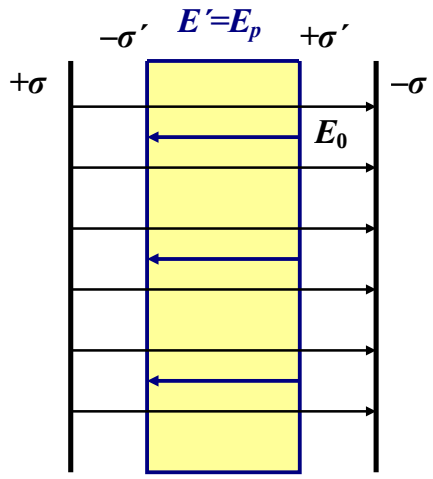


Рис.2.9

Между заряженными пластинами помещаем диэлектрик. Пластины, заряженные свободными зарядами с поверхностной плотностью заряда $\pm\sigma$, создают внешнее поле $\vec{E}_0$ (рис.2.9). В результате поляризации диэлектрика на его поверхности возникают связанные заряды с поверхностной плотностью заряда $\pm\sigma'$, создающие поле напряженностью $\vec{E}_p$. Следовательно, свободные заряды создают внешнее поляризующее поле $\vec{E}_0$, а связанные заряды – добавочное поле поляризованного диэлектрика $\vec{E}_p$.

Вектора $\vec{E}_0$ и $\vec{E}_p$ противоположно направлены ($\vec{E}_p \uparrow\downarrow \vec{E}_0$), поэтому результирующее поле в диэлектрике:

$$E = E_0 - E_p < E_0. \qquad (2.21)$$

Из уравнения (2.20) следует: $\oint\limits_S \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = q_{своб} + q_{пол}$. (2.22)

А согласно закону Гаусса для вектора поляризации

$$\oint\limits_S \vec{P} d\vec{S} = -q_{пол} \Rightarrow .$$

$$\oint\limits_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = q_{своб}. \qquad (2.23)$$

Величина, определяемая соотношением $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, называется вектором *электростатической индукции (электрического смещения)*.
Тогда с учётом всех преобразований имеем:

$$\oint\limits_S \vec{D} d\vec{S} = q_{своб}. \qquad (2.24)$$

Закон Гаусса для вектора электростатической индукции: поток вектора электростатической (или просто электрической) индукции через любую замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Используя теорему Остоградского-Гаусса, получаем закон Гаусса для вектора $\vec{D}$ в дифференциальном виде:

$$\oint\limits_S \vec{D} d\vec{S} = \int\limits_V div\vec{D} dV = \int\limits_V \rho dV, \quad \Rightarrow \quad div\vec{D} = \rho. \qquad (2.25)$$

Связь между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$ получается из соотношений:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \text{ и } \vec{P} = \mathrm{i}\, \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \mathrm{i}\, \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \mathrm{i}\,) \vec{E}. \qquad (2.26)$$

Величина $\varepsilon = 1 + \mathrm{i}$ называется *относительной диэлектрической проницаемостью*.С учётом данного выражения получаем, получаем

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}. \qquad (2.27)$$

Вектор $\vec{D}$ является вспомогательной силовой характеристикой и характеризует установившееся электрическое поле, создаваемое свободными зарядами, но при таком их распределении, какое имеет место при наличии диэлектрика.

2.9. Относительная диэлектрическая проницаемость

Поместим диэлектрик в виде бесконечной диэлектрической пластины во внешнее электрическое поле $\vec{E}_0$.

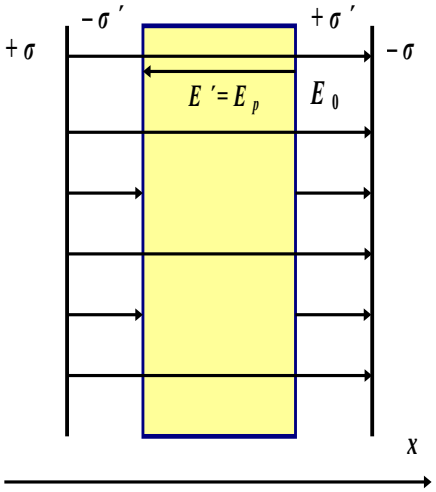


Рис.2.10

Внешнее поле $\vec{E}_0$ создается двумя бесконечными пластинами с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$ и $-\sigma$. Диэлектрик поляризуется, и на его поверхности возникают поляризационные (связанные) заряды. Результирующее поле в диэлектрике

$$\vec{E} = \vec{E}_{стор} + \vec{E}_{пол}. \qquad (2.28)$$

Напряженность поля $E_{стор}$ вызвана зарядами, не входящими в диэлектрик.

Используя другие обозначения, уравнение (2.28) представим в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \qquad (2.29)$$

Уравнение (2.29) в проекциях на ось x имеет вид: $E = E_0 - E'$.(2.30)

Поле между двумя пластинами:

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \qquad (2.31)$$

Тогда уравнение (2.30) будет иметь вид

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \qquad (2.32)$$

Известно, что $\vec{P} = \mathrm{i}\ \varepsilon_0 \vec{E}$ и $P = \sigma'$. Учитывая это, представим (2.32) в виде

$$E = E_0 - \frac{\mathrm{i}\ \varepsilon_0 E}{\varepsilon_0}. \qquad (2.33)$$

$$E_0 = (1 + \mathrm{i}\ )E. \qquad (2.34)$$

Известно, что $\varepsilon = 1 + \mathrm{i}$, следовательно, относительная диэлектрическая проницаемость среды

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}. \qquad (2.35)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость среды показывает во сколько раз поле в вакууме $\vec{E}_0$ больше поля $\vec{E}$ в среде.

2.10. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред

Имеем два соприкасающихся диэлектрика с различными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2, помещенные во внешнее электрическое поле.

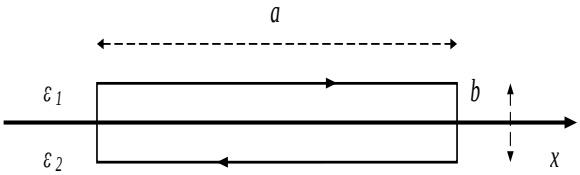


Рис.2.11

Выделим прямоугольный контур $a \times b$ (рис.2.11).

Циркуляция вектора $\vec{E}$ по этому замкнутому контуру

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = E_{1x}a - E_{2x}a + \langle E_n \rangle 2b,$$

где $E_{1x} = E_{1\tau}$, $E_{2x} = E_{2\tau}$ – тангенциальные составляющие вектора $\vec{E}$ в 1 и 2 диэлектрике, соответственно, $\langle E_n \rangle$ – среднее значение E_l на участках контура, перпендикулярных к границе. Но следует вспомнить, что циркуляция вектора $\vec{E}$ по этому замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

С учетом этого уравнение циркуляции вектора $\vec{E}$ запишем в виде:

$$(E_{2\tau} - E_{1\tau}) \cdot a = \langle E_n \rangle \cdot 2b.$$

Сторона b контура мала, тоесть $b \to 0$. Следовательно

$(E_{2\tau} - E_{1\tau}) \cdot a = 0 \Rightarrow E_{1\tau} = E_{2\tau}$. С учётом данного уравнения получаем

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \qquad \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \qquad (2.36)$$

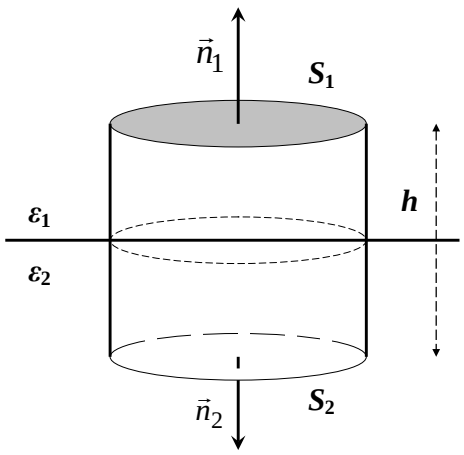


Рис.2.12

Выделим на границе раздела диэлектриков цилиндрическую поверхность высотой h. Основание S_1 расположено в первом диэлектрике, S_2 – во втором диэлектрике. Пусть $S_1 = S_2 = S \to 0$. Следовательно, поле в пределах S можно считать однородным. Сторонних зарядов на границе 2-х диэлектриков нет. Следовательно, поток вектора электрической индукции

$$\Phi_D = \sum q_i = 0\,. \qquad (2.37)$$

С другой стороны поток вектора электрической индукции равен

$$\Phi_D = D_{1n}S + D_{2n}S + \langle D_n \rangle S_{бок} = 0\,, \qquad (2.38)$$

где D_{1n} – проекция вектора $\vec{D}$ в первом диэлектрике на нормаль $\vec{n}_1$, D_{2n} – проекция вектора $\vec{D}$ во втором диэлектрике на нормаль $\vec{n}_2$, $\langle D_n \rangle$ – значение D_n, усредненное по всей боковой поверхности. Высота цилиндра h в пределе может быть сколь угодно малой ($h \to 0$), следовательно, $S_{бок} \to 0$.

Тогда

$$D_{1n} = -D_{2n}\,. \qquad (2.39)$$

Минус в уравнении (2.39) объясняется тем, что вектора нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ направлены в противоположные стороны. Проекции векторов $\vec{D}_1$ и $\vec{D}_2$ на одну и ту же нормаль:

$$D_{1n} = D_{2n} \qquad (2.40)$$

Поэтому

$$\int_s D_{1n}dS = \int_s D_{2n}dS\,. \qquad (2.41)$$

Следовательно, поток вектора $\vec{D}$ не изменяется при переходе через границу двух сред, что упрощает расчет поля в различных средах.

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \qquad (2.42)$$

Из полученных уравнений следует, что при переходе через границу раздела двух сред D_n и E_τ изменяются непрерывно (не претерпевают скачка), а D_τ и E_n претерпевают разрыв. Следствием этого является то, что линии напряженности электрического поля $\vec{E}$ и линии электрического смещения $\vec{D}$ на границе раздела двух диэлектриков претерпевают излом.

Так как $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, то вектора $\vec{E}$ и $\vec{D}$ всегда коллинеарны.

Графически это можно представить в следующем виде (рис. 2.13 и рис.2.14).

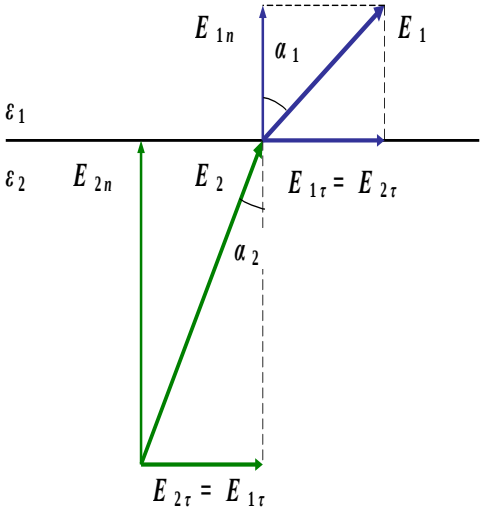


Рис.2.13

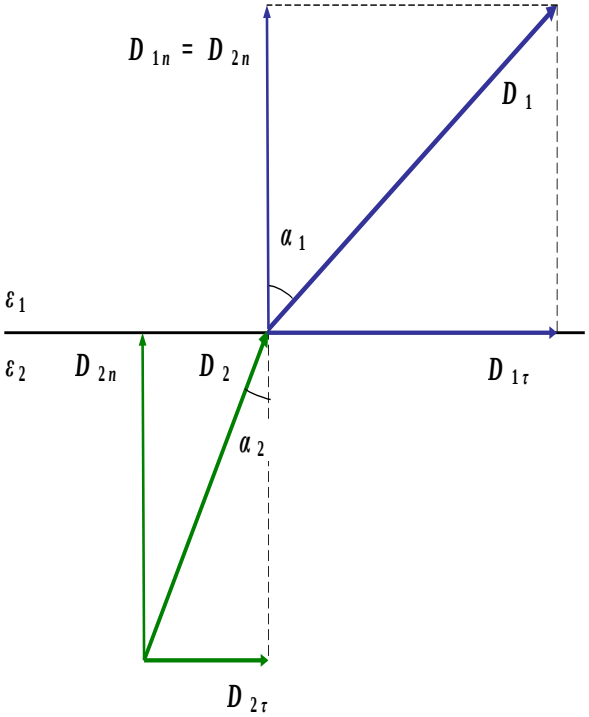


Рис.2.14

Пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Тогда имеем

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \quad \rightarrow \quad \frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\dfrac{E_{1\tau}}{E_{1n}}}{\dfrac{E_{2\tau}}{E_{2n}}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \qquad (2.43)$$

Аналогичное соотношение можно получить, используя уравнения для вектора $\vec{D}$.

При переходе в диэлектрик с большим ε линии $\vec{E}$ и $\vec{D}$ удаляются от нормали.

2.11. Сегнетоэлектрики

Существует группа веществ, которые обладают спонтанной (самопроизвольной) поляризацией в отсутствие внешнего электрического поля. Это явление было открыто первоначально для сегнетовой соли $KNaC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$, в связи с чем все подобные вещества получили название *сегнетоэлетриков*. К сегнетоэлектрикам относятся, например, дигидрофосфат калия KH_2PO_4 молибдат гадолиния, титанат висмута, метатитанат бария $BaTiO_3$ и другие. Первое детальное исследование электрических свойств сегнетовой соли было осуществлено советскими физиками И.В. Курчатовым и П.П. Кобенко.

Сегнетоэлектрики от остальных диэлектриков отличаются рядом характерных особенностей.

1. В то время как у обычных диэлектриков ε составляет несколько единиц, достигая в виде исключения нескольких десятков (например, для воды ε=81), диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков бывает порядка нескольких тысяч (например, для сегнетовой соли ε=10000).

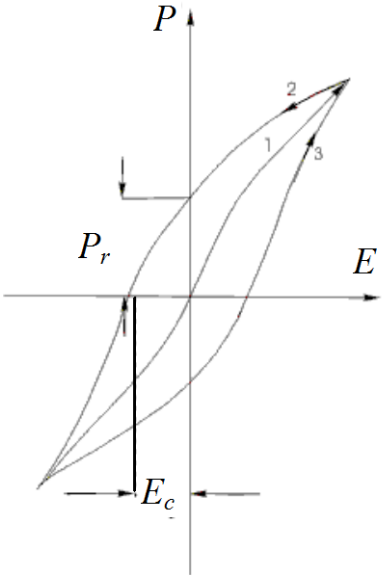


Рис.2.15

2. Зависимость *D=f(E)* не является линейной, следовательно, диэлектрическая проницаемость оказывается зависящей от напряженности поля.

3. При изменении поля значения вектора поляризации $\vec{P}$ (а следовательно и $\vec{D}$) отстают от напряженности поля $\vec{E}$, в результате чего $\vec{P}$ и $\vec{D}$ определяются не только величиной $\vec{E}$ в данный момент, но и предшествующим значениями $\vec{E}$, т.е., зависят от предыстории диэлектрика. Это явление называется гистерезисом (гр. – запаздывание).

При циклических изменениях поля зависимость *P=f(E)* следует изображенной (рис. 2.15) кривой, называемой *петлей гистерезиса*. При первоначальном включении поля поляризация растет с увеличением *E* в соответствии с ветвью кривой 1. Уменьшение поляризации, в связи с уменьшением *E*, происходит по ветви 2. При *E*=0 сегнетоэлектрик сохраняет значение поляризации P_r, называемое *остаточной поляризаци-*

ей. Только под действием противоположно направленного поля напряженности E_C поляризация становится равной нулю. Это значение напряженности поля (E_C) называется *коэрцитивной силой*. При дальнейшем изменении E возникает ветвь 3 петли гистерезиса. Поведение поляризации сегнетоэлектриков аналогично поведению намагничения ферромагнетиков.

Сегнетоэлектриками могут быть только кристаллические вещества, причем такие, у которых отсутствует центр симметрии. Так, например, кристаллы сегнетовой соли принадлежат к ромбической системе. Взаимодействие частиц в кристалле сегнетоэлектрика приводит к тому, что их дипольные моменты спонтанно устанавливаются параллельно друг другу. В исключительных случаях одинаковая ориентация дипольных моментов распространяется на весь кристалл. Обычно же кристалл можно представить в виде ряда областей, в пределах каждой из которых дипольные моменты атомов параллельны друг другу, однако, направления вектора поляризации в разных областях бывают различны, так что результирующий дипольный момент всего кристалла может быть равен нулю. Области самопроизвольной поляризации называются *доменами.* Под действием внешнего электрического поля моменты доменов поворачиваются как целое, устанавливаясь в направлении поля.

Для каждого сегнетоэлектрика имеется температура, выше которой вещество утрачивает необычные свойства и становится нормальным диэлектриком. Эта температура называется *точкой Кюри* по имени французского физика Пьера Кюри(1859–1906), который занимался исследованиями диэлектрических и магнитных свойств тел в зависимости от температуры (П. Кюри один из основателей учения о радиоактивности). Сегнетова соль имеет две точки Кюри: -15^{0}С и +22,5^{0}С, т.е., в этом интервале температур она ведет себя как сегнетоэлектрик. Очень важное практическое значение имеет открытый советским физиком Б.М. Вулом и его сотрудниками сегнетоэлектрик метатитанат бария $BaTiO_3$ (ε=6000) точка Кюри которого равна 125^{0}С. (Вул Бенцион Моисеевич (1903–1972) занимался исследованиями по физике диэлектриков и полупроводников, а также фотоэлектрических явлений, вентильным фотоэффектом, полупроводниковыми лазерами).

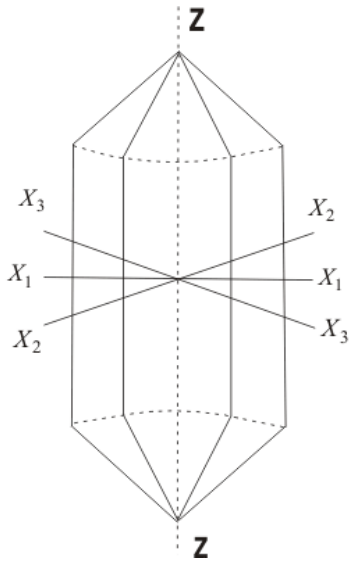


Рис.2.16

2.12. Прямой и обратный пьезоэлектрические эффекты

Некоторые кристаллы, не имеющие центра симметрии (в том числе все сегнетоэлектрики),

при деформации поляризуются. Это явление называется прямым пьезоэлектрическим эффектом или просто пьезоэлектрическим эффектом (Пьезоэлектрический эффект был открыт в 1880г. французским физиком П. Кюри). Величина поляризации пропорциональна деформации. Важнейшими пьезоэлектриками (т.е. пьезоэлектрическими кристаллами) являются кварц, сегнетова соль, метатитанат бария и сульфат лития.

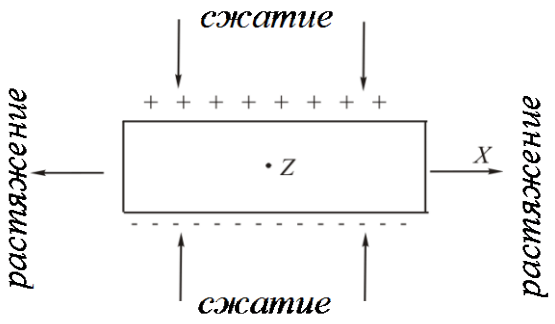


Рис.2.17

Рассмотрим возникновение пьезоэлектрического эффекта на кристаллах кварца. Кристаллы кварца SiO_2 существуют в различных кристаллографических модификациях. Интересующие нас кристаллы (α–кварц) принадлежат к так называемой триагональной кристаллографической системе, имеющей форму, показанную на рис. 2.16. Они напоминают шестигранную призму, ограниченную двумя пирамидами, и имеют ряд дополнительных граней. Такие кристаллы характеризуются четырьмя кристаллическими осями, определяющими важные направления внутри кристалла. Ось Z соединяет вершины пирамид. Три другие оси перпендикулярны к оси Z и соединяют противоположные ребра шестигранной призмы. Направление, определяемое осью Z пьезоэлектрически неактивно, т.е., при сжатии или растяжении по оси Z никакой поляризации не происходит. При сжатии или растяжении в любом направлении перпендикулярном оси Z, возникает электрическая поляризация. Ось z называется оптической осью кристалла, а оси X_1, X_2, X_3 – электрическими или пьезоэлектрическими осями. Таким образом, если вырезать из кристалла кварца пластинку, перпендикулярную оптической оси Z, и подвергнуть ее сжатию, то на гранях этой пластинки появятся связанные заряды. То же самое происходит, если пластинку подвергнуть растяжению вдоль оси X перпендикулярной оси Z (рис. 2.17).

При изменении знака деформации, т.е., при растяжении в направлении перпендикулярном оси Z, или сжатии на гранях пластинки появятся связанные заряды другого знака.

Качественные объяснения пьезоэлектрического эффекта на кристалле кварца представлено на рис. 2.18. Для практического использо-

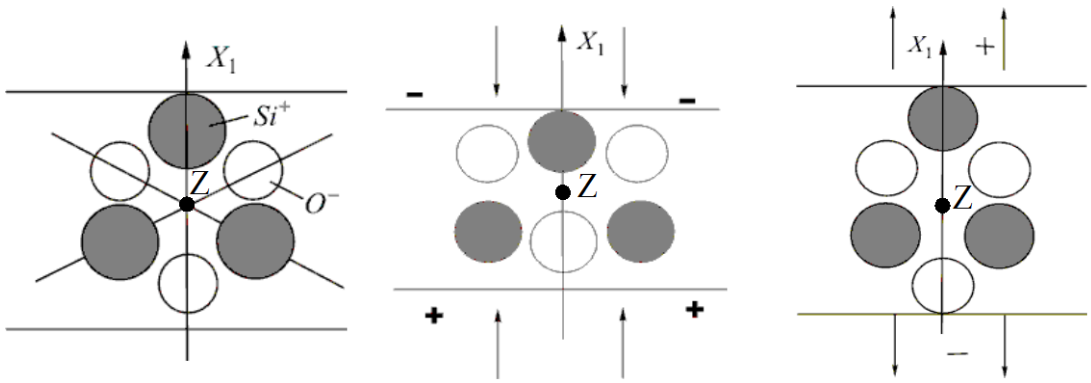


Рис.2.18

вания пьезоэлектрического эффекта на грани пластинки накладывают металлические обкладки. Если эти обкладки включить в замкнутую цепь, то при изменениях деформации кристалла в цепи будут возникать импульсы тока. Такие процессы протекают, например, в пьезоэлектрическом микрофоне, где знакопеременная деформация пластинки под действием звуковой волны преобразуется в переменный ток той же частоты.

Наряду с прямым пьезоэффектом у пьезокристаллов наблюдается эффект, заключающийся в том, что поляризация под действием электрического поля сопровождается механическими деформациями кристалла. Если на металлические обкладки пьезоэлектрической пластинки подать переменное электрическое напряжение, то пластинка будет попеременно растягиваться и сжиматься вдоль оси X, в ней возбудятся механические колебания. Эти колебания станут особенно интенсивными, если частота переменного тока, совпадает с собственной (резонансной) частотой пластинки. Такие настроенные в резонанс пьезоэлектрические пластинки используются для возбуждения ультразвуковых волн, для стабилизации частоты генераторов электрических колебаний в радиотехнике и т.п.

Обратный пьезоэлектрический эффект следует отличать от электрострикции, которая имеет место во всех диэлектриках – твердых, жидких и газообразных. Пьезоэлектрический эффект возникает только в некоторых кристаллах. Деформация при электрострикции зависит от поля квадратично и при изменении направления поля знак не меняет. Пьезоэлектрический эффект зависит от поля линейно и при изменении его направления меняет знак.

2.13. Проводники в электрическом поле. Равновесие зарядов в проводниках

В проводниках имеются электрически заряженные частицы – *носители заряда*, которые способны под действием внешнего электрического поля перемещаться по всему объему проводника.

Ограничимся рассмотрением твердых металлических проводников. Носителями зарядов в них являются электроны, отделившиеся от «своих» атомов. Такие электроны называются *электронами проводимости* или *свободными электронами.*

Сообщим проводнику заряд q. В течение сотых долей секунды заряды распределяются так, чтобы потенциальная энергия взаимодействия зарядов была минимальной. При этом напряженность поля во всех точках проводника обращается в нуль $\vec{E}=0$. Если бы между любыми произвольно выбранными двумя точками проводника существовало поле, то возник бы и электрический ток без источника, что противоречит закону сохранения энергии. Поскольку $\vec{E}=0,$ то по закону Гаусса в дифференциальной и интегральной форме:

$$div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}; \qquad \oint_S \vec{E}d\vec{S}=\int_V \frac{\rho dV}{\varepsilon_0}=\frac{\sum q}{\varepsilon_0}, \qquad (2.44)$$

где S – произвольная замкнутая поверхность внутри проводника.

С учётом того, что $\vec{E}=0 \Rightarrow \quad div\vec{E}=0 \quad \Rightarrow \quad \rho=0.$

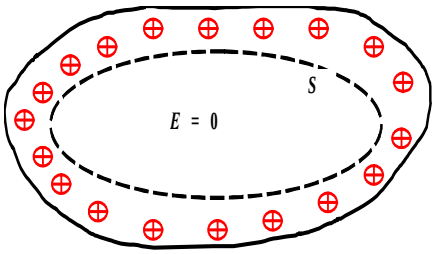


Рис.2.19

Поэтому в объеме проводника избыточные заряды отсутствуют и могут находиться только на внешней поверхности проводника. Поскольку $\vec{E}=-\nabla\varphi,$ а $\vec{E}=0,$ то заряды перераспределяются таким образом, что $\varphi=const,$ то есть любой проводник представляет собой эквипотенциальное тело, а его поверхность, естественно, является эквипотенциальной.

На поверхности проводника вектор $\vec{E}$ должен быть направлен по нормали к этой поверхности, иначе под действием тангенциальной со-

ставляющей вектора напряженности $\vec{E}_\tau$ заряды бы перемещались по проводнику, что противоречит их статическому распределению.

Итак, в равновесном состоянии:

1) Во всех точках внутри проводника $\vec{E}_{внутр} = \vec{E} = 0$. $\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi$.

2) $\varphi_{внутр} = const$, то есть весь объем проводника и его поверхность *эквипотенциальны*.

3) На поверхности проводника $\vec{E} = \vec{E}_n$, $\vec{E}_\tau = 0$.

4) Вектор электрического смещения $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ внутри проводника $\vec{D}_{внутр} = 0$, так как $\vec{E}_{внутр} = 0$.

2.14. Поле вблизи поверхности заряженного проводника

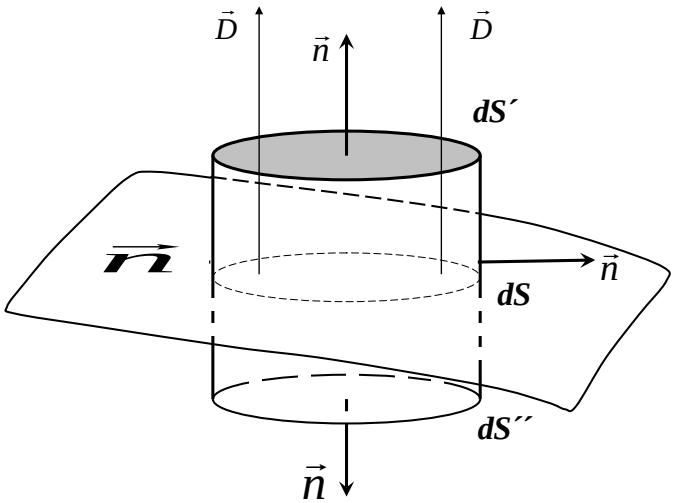


Рис.2.20

Выделим на поверхности проводника произвольную площадку *dS*. Построим на ней цилиндр высотой *dh* с образующей, перпендикулярной площадке *dS*.

Так как *dS* – мала: *dS* = *dS´* = *dS´´*.

На поверхности проводника векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ перпендикулярны поверхности, следовательно, потоки векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ через боковую поверхность

$$d\Phi_{E,D\ бок..\ поверхность} = 0.$$

Так как *dS´´* лежит внутри проводника, где $\vec{D} = 0$, следовательно, поток вектора $\vec{D}$ через *dS´´*:

$$d\Phi_{D\ dS''} = 0. \qquad (2.45)$$

Поток вектора через всю поверхность цилиндра равен потоку через *dS´*

$$d\Phi_D = d\Phi_{D\ dS'} = D_n \cdot dS. \qquad (2.46)$$

Теорема Гаусса для $\vec{D}$: $d\Phi_D = dq = \sigma \cdot dS.$
Следовательно

$$D_n = \sigma;\ E_n = \sigma / \varepsilon\varepsilon_0. \qquad (2.47)$$

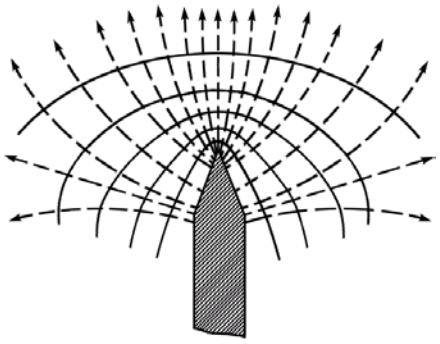


Рис.2.21

Если электрическое поле создается заряженным проводником, то напряженность поля $\vec{E}$ вблизи поверхности проводника прямо пропорциональна поверхностной плотности зарядов σ, находящейся на ней.

Вектор $\vec{E}$ вблизи поверхности проводника зависит от кривизны С поверхности проводника: $C = 1/R$. Чем больше кривизна поверхности C, тем больше поверхностная плотность зарядов σ и поле $\vec{E}$. Напряженность электрического поля максимальна на острие заряженного проводника (рис.2.21). Сплошными линиями изображены сечения эквипотенциальных поверхностей, пунктирными – силовые линии поля. Вокруг острия в воздухе может возникнуть пробой. Напряженность поля около острия велика. Свободный заряд в поле острия может приобрести энергию, достаточную для ионизации молекул воздуха, и будет стекать с острия (E = 30 кВ/см – напряженность поля, при которой воздух пробивается (ионизируется)).

• Распределение зарядов по внешней поверхности проводника зависит только от её формы.

• На внутренней поверхности замкнутых полых проводников избыточные заряды отсутствуют и поверхностная плотность зарядов $\sigma = 0$.

Применение: для измерения заряда какого-либо тела используют длинный полый металлический цилиндр, называемый *цилиндром Фарадея*. Многократно передавая заряд полому проводнику, можно значительно повысить его потенциал. Применение: *электростатический генератор Ван-де-Граафа*.

• Между одноименно заряженными участками проводника действуют силы взаимного отталкивания.

2.15. Электростатическая индукция

Электростатическая индукция – явление перераспределения зарядов в проводнике во внешнем электростатическом поле.

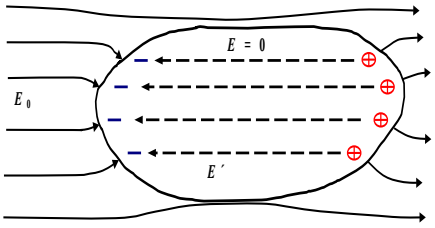


Рис.2.22

Так как концентрация свободных электронов в проводниках (металлах) очень высока, то перераспределение зарядов происходит до тех пор, пока результирующее поле в металле $E = E_0 - E'$ не окажется равным нулю (рис. 2.22).

Нейтральный проводник, внесенный в электростатическое поле, разрывает часть линий напряженности, они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных.

Индуцированные (наведенные) на проводнике заряды исчезают, когда проводник удаляют из электрического поля.

Рассмотрим нейтральный проводник с полостью, внесенный в электростатическое поле. S – поверхность внутри проводника, окружающая внутреннюю полость.

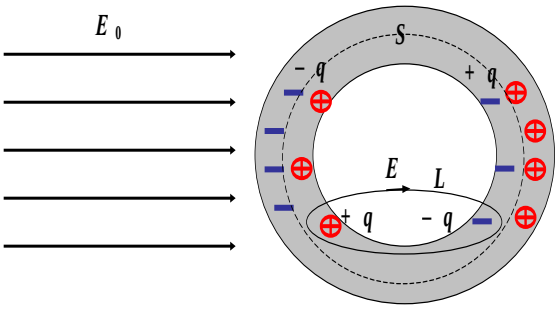


Рис.2.23

Согласно теореме Гаусса

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0},$$

$$\vec{E} = 0.$$

$$\sum q = 0, \qquad \sum q = q_+ + q_- .$$

Вектор $\vec{E} = 0$, так как поле внутри проводника отсутствует.

Можно предположить наличие на поверхностях полости равных по величине и противоположных по знаку зарядов: $q_+ = q_-$, то есть суммарный заряд равен нулю, но поле внутри полости имеет место. Проведем через полость и металл замкнутый контур L. Если на поверхностях полости имеются разноимённые заряды, то они должны двигаться навстречу друг другу и компенсироваться, тогда работа по перемещению зарядов в полости будет отлична от нуля. В металле, где поле отсутствует, работа равна нулю. Следовательно, работа по перемещению

заряда по замкнутому контуру L отлична от нуля и $\oint_L \vec{E}d\vec{l} \neq 0$, что невозможно для кулоновских сил. Поэтому заряды и электростатическое поле внутри полости металла, находящегося в электрическом поле, отсутствуют.

На этом основана электростатическая защита – экранирование тел (измерительные приборы, колебательный контур) от влияния внешних электрических полей. Если проводник с полостью заземлить, то потенциал во всех точках полости равен нулю, т. е. полость полностью изолирована от внешних электрических полей. Вместо сплошного проводника часто используют густую металлическую сетку.

Опыт Кавендиша

Распределение зарядов только на поверхности проводника вытекает из закона Гаусса, который является следствием закона Кулона как закона обратных квадратов. Если бы сила взаимодействия точечных зарядов выражалась законом

$F = k\dfrac{q_1 q_2}{r^{2\pm\delta}}$, то заряды распределялись бы не только на поверхности, но и в объеме проводника. Идея Кавендиша состояла в том, чтобы проверить, остается ли электрическое поле (заряды) внутри заряженной проводящей сферы, отсутствие которого означало бы, что электрические силы, как и гравитационные, обратно пропорциональны квадрату расстояния. Опыт позволял оценить верхнюю границу отклонения δ от закона $1/r^2$. Отклонение δ равно ошибке эксперимента.

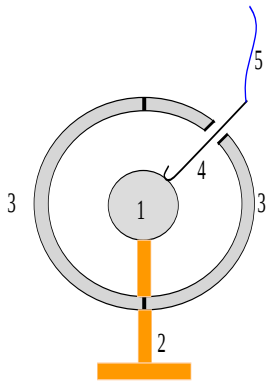


Рис.2.24

В этих опытах металлический шар 1 был укреплен на изолирующей подставке 2 (рис. 2.24). Две металлические полусферы 3 могли быть соединены в одну сферу, охватывающую шар 1. В одной из полусфер имелось малое отверстие, в которое можно было вставлять короткую металлическую проволоку 4, подвешенную на шелковой нити 5, и соединять шар и сферу, не разряжая систему.

Суть опыта – полусферы 3 складывали вместе, соединяли их проволокой 4 с шаром 1 и заряжали. Заряд сферы определялся электрометром. Затем проволоку 4 с помощью шелковой нити 5 удаляли, обе полусферы

раздвигали и разряжали, соединяя их с землей. После этого электрометр присоединяли к шару 1 и проверяли, имеется ли на нем заряд. Опыт с точностью эксперимента показывал отсутствие на шаре заряда. Ошибка эксперимента δ по Кавендишу была 0,02. Позднее, Максвелл понизил эту границу до $\delta < 6 \cdot 10^{-5}$. Современная оценка – $\delta < 6 \cdot 10^{-17}$. Таким образом, закон Кулона проверен с очень высокой точностью по сравнению с результатами опыта Кулона.

Тема 3

3.1. Электроемкость проводника. Энергия электрического поля

Уединенный проводник – проводник, вблизи которого нет других тел, способных повлиять на распределение зарядов на нем.

Сообщим проводнику заряд q, который распределится по поверхности проводника так, что внутри проводника поле $\vec{E}$ равно нулю ($\vec{E}$ = 0). Если проводнику сообщить дополнительный заряд, то он распределится таким образом, чтобы $\vec{E}$ = 0, при этом потенциал φ изменится, но по-прежнему во всех точках проводника будет одинаков. Следовательно, отношение поверхностных плотностей зарядов любых двух точек поверхности проводника – величина постоянная при любых зарядах, сообщенных проводнику. Поверхностная плотность заряда пропорциональна сообщенному ему заряду. Напряженность электрического поля вблизи проводника

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \text{следовательно } E \sim \sigma \sim q.$$

С учётом того, что

$$\int_r^\infty \vec{E} d\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2, \qquad \varphi_2 = 0. \qquad \Rightarrow \quad \int_r^\infty \vec{E} d\vec{r} = \varphi,$$

где φ – потенциал проводника.

Тоесть $E \sim \varphi$, а $E \sim q$, получаем, что

$$q = C\varphi, \tag{3.1}$$

C – коэффициент пропорциональности (электроемкость проводника).

В СИ C измеряется в фарадах [1Ф = 1Кл / 1В].

Электроемкость проводника – это физическая величина, численно равная заряду, который необходимо сообщить проводнику, чтобы увеличить его потенциал на 1В.

Диэлектрик электроемкостью не характеризуется, так как он не является эквипотенциальным телом.

● Электроемкость шара.

Связь напряженности поля и потенциала выражается соотношением:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}, \text{ или } \qquad Edr = -d\varphi.$$

Поле вне шара можно вычислить, с учётом, что $r \geq R$, $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$.

Тогда $\int\limits_R^{\infty} \dfrac{qdr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = -\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi.$ Проинегрируем обе части уравнения и учтём, что потенциал на бесконечности равен нулю. Получим $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R} = \varphi.$ С учётом того, что $C = \dfrac{q}{\varphi}$, электроемкость шара будет расчитываться по формуле

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R. \qquad (3.2)$$

Электроемкость проводника зависит от его формы и размеров, свойств окружающей среды (ε).

Электроемкость Земли: $C_{Земли} = 4\pi\varepsilon_0 R = 4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} 6400 \cdot 10^3 \approx 0{,}7 мФ.$

1 фарад – большая величина, обычно используют единицы: микрофарад (мкФ), нанофарад (нФ), пикофарад (пФ).

Для того чтобы проводник обладал большой емкостью, он должен иметь большие размеры.

3.2. Взаимная электроемкость. Конденсаторы

В поле проводника помещаем металлическую пластину (рис.3.1). Металлическая пластина заряжается в поле проводника.

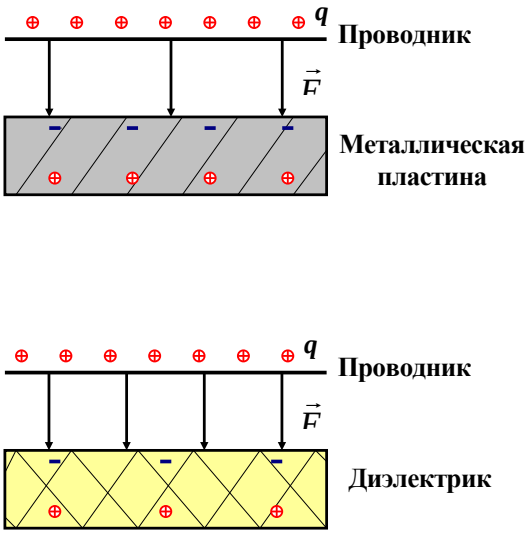


Рис.3.1

Ближе к проводнику будет находиться поверхность пластины, зарядившаяся противоположным зарядом.

Следовательно, поле, создаваемое зарядом проводника понизится, понизится и потенциал проводника.

$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-; \varphi \prec \varphi_+$

$q = const$

$C = q / \varphi$ - увеличится.

В поле заряженного проводника диэлектрик поляризуется, что приводит к тому, что потенциал проводника уменьшается, а его емкость увеличивается.

Взаимная электроемкость больше, чем емкость уединенного проводника.

Особенно большой электроемкостью обладает *конденсатор* – система из двух проводников, разделенных слоем диэлектрика, продольные размеры которых много больше расстояния между ними.

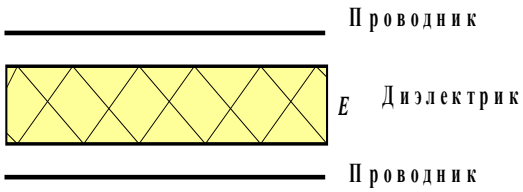


Рис.3.2

Проводники называются *обкладками конденсатора*.

Конденсаторы конструируют таким образом, чтобы поле было сосредоточено между обкладками (рис. 3.2).

В этом случае на емкость конденсатора не оказывают влияния окружающие тела. При зарядке конденсатора от электрической машины процесс происходит так, как если бы некоторый заряд был перенесен с одной обкладки на другую. Модуль заряда, который необходимо перенести с одной обкладки на другую, чтобы зарядить одну из них отрицательно, а другую положительно, называется зарядом конденсатора.

Конструктивно конденсаторы бывают *плоские, цилиндрические, сферические*.

Устройство конденсаторов (рис. 3.3):

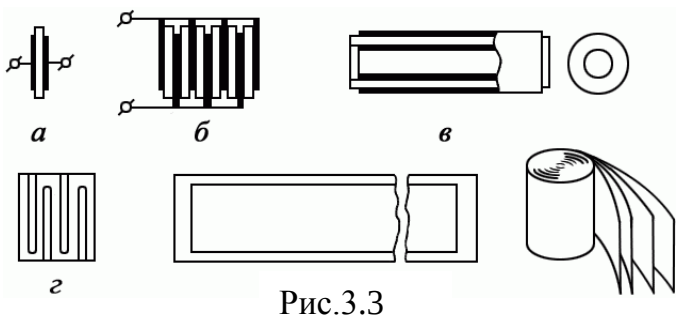


Рис.3.3

(*а*) плоский конденсатор – две плоские металлические обкладки, разделенные диэлектриком,
(*б*) плоский многопластинчатый конденсатор, содержащий *n* обкладок, соединенных параллельно.
Конструкции (*а, б)* применяются в конденсаторах с неорганическими диэлектриками. В керамических конденсаторах используются другие конструкции – цилиндрическая (*в)* и многосекционная (*г*).
В конденсаторах с органическими диэлектриками базовой конструкцией является спиральный конденсатор (*д*), в котором обкладки и диэлектрики представляют собой ленты, скручиваемые спиралью.

3.3. Плоский, сферический и цилиндрический конденсаторы

Емкость конденсатора $C = \dfrac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$,

где q – заряд конденсатора,
$\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между обкладками конденсатора.

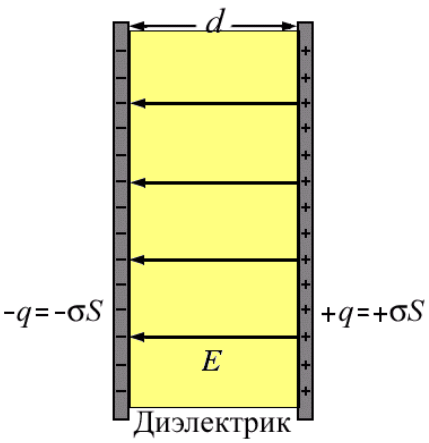


Рис.3.4

Плоский конденсатор.
Расстояние между обкладками d много меньше линейных размеров конденсатора (рис. 3.4). Следовательно, поле конденсатора можно рассматривать как поле между двумя бесконечными пластинами. Напряженность поля между двумя бесконечными пластинами рассчитывается по формуле $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$, а связь между напряженностью и потенциалом определяется соотношением $E = -\dfrac{d\varphi}{dr}$. Приравняем и проинтегрируем

$$\int_0^d \frac{\sigma dr}{\varepsilon\varepsilon_0} = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi. \qquad (3.3)$$

$$\frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon\varepsilon_0} = \varphi_1 - \varphi_2. \qquad (3.4)$$

$$q = \sigma S.$$

В результате преобразований, получаем, что емкость конденсатора можем рассчитать с учётом его геометрических характеристик

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (3.5)$$

Сферический конденсатор.

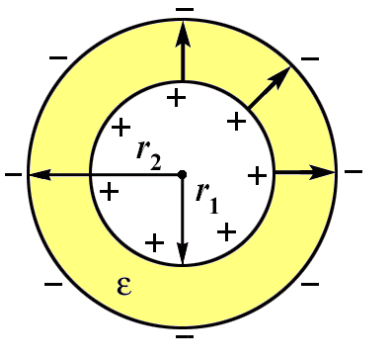


Рис.3.5

Состоит из двух концентрических обкладок сферической формы, разделенных слоем диэлектрика (рис. 3.5).

Поле равномерно заряженной сферической поверхности (вне сферы) эквивалентно полю точечного заряда:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}. \qquad (3.6)$$

Формулу (3.6) подставляем в формулу связывающую напряженность и разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \Rightarrow$$

Емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} \qquad (3.7)$$

Цилиндрический конденсатор.

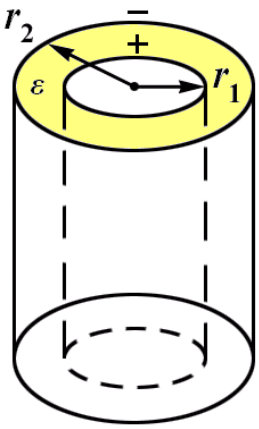


Рис.3.6

Состоит из двух полых коаксиальных цилиндров с радиусами r_1 и r_2, вставленных один в другой ($r_1 < r_2$) и разделенных слоем диэлектрика (рис. 3.6).

Если r_1 и r_2 меньше длины конденсатора, то для расчета поля можно применить уравнение для поля бесконечного равномерно заряженного цилиндра:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}. \qquad (3.8)$$

В результате преобразований, получаем,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

$$\tau = \frac{q}{l}.$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}. \qquad (3.9)$$

Конденсаторы характеризуются пробивным напряжением – разность потенциалов, при которой происходит пробой – электрический разряд через слой диэлектрика. Пробивное напряжение зависит от формы обкладок, свойств диэлектрика и его толщины.

3.4. Соединения конденсаторов

Располагая некоторым набором конденсаторов, можно значительно расширить число возможных значений емкости и рабочего напряжения, если применить соединение конденсаторов в батарею.

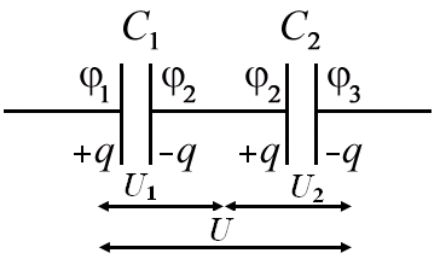


Рис.3.7

Последовательное соединение.

При последовательном соединении (рис. 3.7). заряд каждого конденсатора равен заряду батареи конденсаторов. Последовательное соединение конденсаторов применяется для деления напряжения, например, во избежание пробоя конденсатора.

$$U = U_1 + U_2. \qquad (3.10)$$

$$\frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \qquad (3.11)$$

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}. \qquad (3.12)$$

Для n последовательно соединённых конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}. \qquad (3.13)$$

$C < C_1$, $C < C_2$. Если емкости конденсаторов одинаковы, то общая емкость $C = C / n$.

Таким образом, при последовательном соединении конденсаторов складываются величины, обратные их емкостям.

Параллельное соединение.

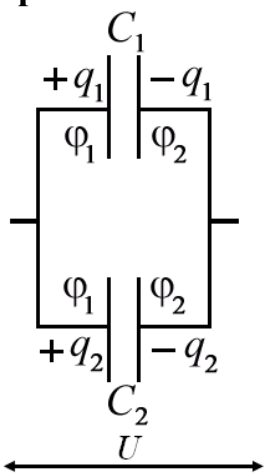


Рис.3.8

У параллельно соединенных конденсаторов (рис. 3.8). разность потенциалов на обкладках конденсаторов одинакова и равна U.

Заряд батареи согласно закону сохранения заряда $q_1 + q_2 = const$.

$$C_1U + C_2U = CU \quad \Rightarrow \quad C = C_1 + C_2.$$

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i. \qquad (3.14)$$

При параллельном соединении конденсаторов емкость батареи конденсаторов увеличивается.

3.5. Энергия электрического поля

Энергия заряженного проводника.

При переносе заряда dq из бесконечности на уединенный проводник емкостью C, имеющий потенциал φ, совершается работа $dA = \varphi \cdot dq$.

Потенциал связан с емкостью конденсатора соотношением $\varphi = \frac{q}{C}$. Подставив в формулу работы, получим $dA = \frac{qdq}{C}$. При этом заряд проводника увеличивается на dq. Работа, затрачиваемая на зарядку проводника от нулевого потенциала ($\varphi = 0$) до φ

$$A = \int dA = \int \frac{qdq}{C} = \frac{q^2}{2C}. \qquad (3.15)$$

Энергия заряженного проводника равна работе, которую необходимо совершить, чтобы зарядить этот проводник:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}. \qquad (3.16)$$

● **Энергия заряженного конденсатора.**

Если заряженный конденсатор замкнуть на электрическую лампочку, то она какое-то время будет гореть. Следовательно, конденсатор обладает энергией. Сделаем преобразования

$$\left.\begin{aligned} dA &= U \cdot dq. \\ U &= \frac{q}{C}. \end{aligned}\right\} \; dA = \frac{qdq}{C}.$$

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}. \qquad (3.17)$$

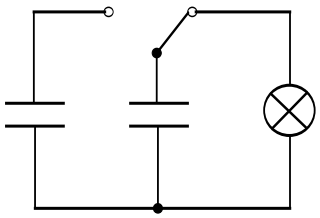


Рис.3.9

Объемная плотность энергии электрического поля

На вопрос о том, где аккумулируется энергия электрического поля на зарядах или в пространстве, окружающем заряды, в рамках электростатики получить ответ нельзя. Описание электрических явлений с помощью прямого силового взаимодействия (теория дальнодействия) и с помощью промежуточного электрического поля (теория близкодействия) эквивалентны в рамках электростатики. Только в электродинамике, где существуют свободные электромагнитные волны, независимые от породивших их зарядов, доказана реальность электромагнитного поля. Электромагнитная волна обладает энергией (радио, телевидение). Соответственно, энергия электростатического поля сосредоточена в пространстве между зарядами (электростатическое поле обладает энергией с определенной объемной плотностью энергии).

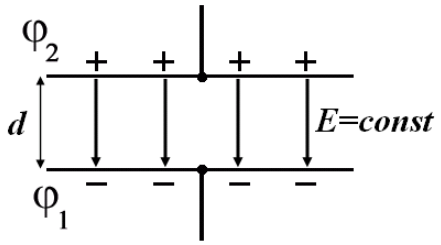


Рис.3.10

Объемная плотность энергии:

а) в случае однородного поля (плоский конденсатор):

$$\omega_E = \frac{W}{V} = \frac{CU^2}{2Sd}, \qquad (3.18)$$

где S – площадь обкладок конденсатора,
d – расстояние между обкладками конденсатора. Учитывая формулы (1.66) и (3.5) получим

$$\omega_E = \frac{C(Ed)^2}{2Sd} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S(Ed)^2}{d \cdot 2Sd} \quad \Rightarrow$$

$$\omega_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} \qquad (3.20)$$

– энергия, приходящаяся на единичный объем однородного поля.

Для расчёта энергии по всему объёму проинтегрируем

$$dW = \omega_E \cdot dV, \qquad W = \int_V \omega_E \cdot dV. \qquad (3.21)$$

ЧАСТЬ II
ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Тема 4
4.1.Понятие об электрическом токе

Заряженные объекты являются причиной не только электростатического поля, но еще и электрического тока. В этих двух явлениях есть существенное отличие. Для возникновения электростатического поля требуются неподвижные, каким-то образом зафиксированные в пространстве заряды, а для возникновения электрического тока, напротив, требуется наличие свободных, не закрепленных заряженных частиц, которые в электростатическом поле неподвижных зарядов приходят в состояние *упорядоченного движения вдоль силовых линий поля*. Это движение и есть *электрический ток*.

Электрический ток – упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов.

Различают:

- *ток проводимости (ток в проводниках)* – движение микрозарядов в макротеле;
- *конвекционный ток* – движение макроскопических заряженных тел в пространстве;

- *ток в вакууме* – движение микрозарядов в вакууме.

В проводнике под действием приложенного электрического поля свободные электрические заряды перемещаются: положительные – по полю, отрицательные – против поля. Носители зарядов (электроны в металле) совершают сложное движение:

1) хаотическое со средней скоростью $\upsilon \sim \sqrt{kT}$ ($10^3 \div 10^4$ м/с),
2) направленное со средней скоростью $\upsilon \sim E$ (доли мм/с).

Таким образом, средняя скорость направленного движения электронов много меньше средней скорости их хаотического движения. Незначительная средняя скорость направленного движения объясняется их частыми столкновениями с ионами кристаллической решетки. В то же время всякое изменение электрического поля передается вдоль проводов со скоростью, равной скорости распространения электромагнитной волны – ($3 \cdot 10^8$ м/с). Поэтому движение электронов под действием внешнего поля возникает на всем протяжении провода практически одновременно с подачей сигнала. При движении зарядов нарушается их равновесное распределение. Следовательно, поверхность проводника уже не является эквипотенциальной и вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ не направлен перпендикулярно поверхности, так как для движения зарядов необходимо, чтобы на поверхности $E_\tau \neq 0$. По этой причине внутри проводника существует электрическое поле, которое равно нулю только в случае равновесного распределения зарядов на поверхности проводника.

Условия появления и существования тока проводимости:

1. Наличие в среде свободных носителей заряда, т.е. заряженных частиц, способных перемещаться. В металле это электроны проводимости; в электролитах – положительные и отрицательные ионы; в газах – положительные, отрицательные ионы и электроны.

2. Наличие в среде электрического поля, энергия которого затрачивалась бы на перемещение электрических зарядов. Для того чтобы ток был длительным, энергия электрического поля должна все время пополняться, т.е. нужен *источник электрической энергии* – устройство, в котором происходит преобразование какого-либо вида энергии в энергию электрического поля.

За *направление тока* условно принято направление движения положительных зарядов.

4.2. Сила тока. Плотность тока

Сила тока – количественная мера (характеристика) электрического тока.

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad (4.1)$$

– сила тока численно равна заряду, проходящему через поперечное сечение проводника за единицу времени.

В СИ сила тока измеряется в амперах [1А = 1Кл / 1с]. 1А – основная единица СИ.

Движение носителей положительного заряда эквивалентно движению носителей отрицательного заряда в противоположном направлении. Если ток создается двумя видами носителей заряда, то

$$I = \frac{dq_+}{dt} + \frac{dq_-}{dt}. \qquad (4.2)$$

Для постоянного тока:

$$I = \frac{q}{t}. \qquad (4.3)$$

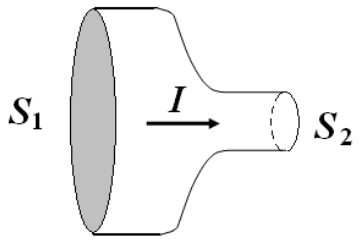


Рис.4.1

Вектор плотности тока $\vec{j}$ вводится для характеристики распределения заряда по сечению проводника (рис. 4.1).

В СИ плотность тока измеряется в [А / м^2].

$$j = \frac{dq}{dS_n dt} = \frac{dI}{dS_n} \qquad (4.3)$$

– плотность тока численно равна заряду, проходящему через единичную площадку dS_n, расположенную перпендикулярно направлению тока, за единицу времени (рис. 4.2).

$$dI = \vec{j}d\vec{S} = jdS\cos\left(\angle\vec{j}, d\vec{S}\right) = jdS\cos\alpha = jdS_n. \qquad (4.4)$$

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}. \qquad (4.5)$$

$$I = \int_S \vec{j}d\vec{S}. \qquad (4.6)$$

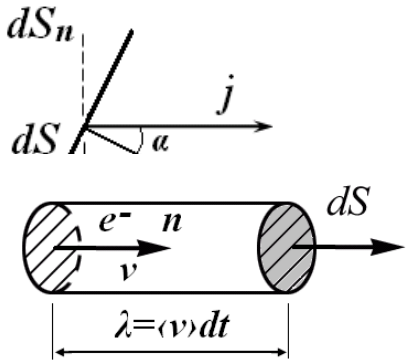


Рис.4.3

Рассмотрим проводник сечением dS (рис. 4.3).

e – элементарный заряд,
n – концентрация носителей заряда в объеме проводника,
$\langle \vartheta \rangle$ – средняя скорость упорядоченного движения зарядов.

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{nedV}{dt} = \frac{ne\langle\lambda\rangle dS}{dt} = \frac{ne\langle\vartheta\rangle dtdS}{dt} = ne\langle\vartheta\rangle dS. \qquad (4.7)$$

$$j = \frac{I}{dS} = ne\langle v\rangle. \qquad (4.8)$$

4.3. Уравнение непрерывности

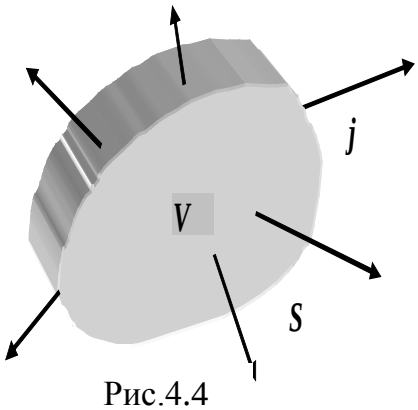


Рис.4.4

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V div\vec{j} dV. \qquad (4.9)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV. \qquad (4.10)$$

Знак минус в уравнении (4.10) означает то, что заряды вытекают из объема V (рис. 4.4). Объемная плотность заряда ρ изменяется в пространстве и времени, т.е. ρ является функцией координат и времени:

$\rho = \rho(x,y,z,t)$.

Следовательно, $\int_V \rho dV$ является функцией координат и времени, и в уравнении (4.10) операции интегрирования и дифференцирования можно поменять местами. Из уравнений (4.9) и (4.10) имеем:

$$I = \oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V div\vec{j} dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV. \quad \Rightarrow \quad div\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}. \qquad (4.11)$$

– *уравнение непрерывности* (закон сохранения заряда).

Знак минус в уравнении (4.11) означает, что в точках, которые являются источниками тока (j), происходит убывание заряда.

4.4. Сторонние силы. Электродвижущая сила. Напряжение

Если в цепи на носители тока действует только сила электростатического поля, то происходит перемещение носителей, которое приводит к выравниванию потенциалов во всех точках цепи и к исчезновению электрического поля. Следовательно, для существования постоянного тока необходимо наличие в цепи устройства, которое создает и поддерживает разность потенциалов $\Delta\varphi$ за счет работы сил неэлектрического происхождения. Такие устройства называются *источниками тока* (генераторы – преобразуется механическая энергия; аккумуляторы – энергия химической реакции между электродами и электролитом).

Сторонние силы – силы неэлектрического происхождения, действующие на заряды со стороны источников тока.

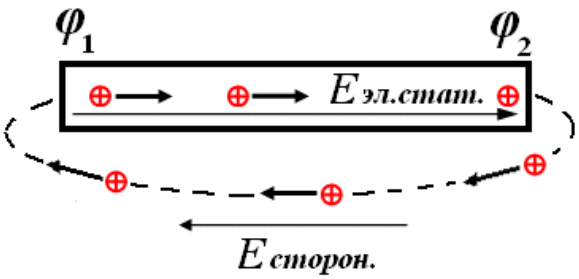


Рис.4.5

За счет поля сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника тока против сил электростатического поля (рис. 4.5). Следовательно, на концах внешней цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи течет постоянный ток. Сторонние силы совершают работу по перемещению электрических зарядов.

Электродвижущая сила (э.д.с. – $\mathcal{E}$) – физическая величина, определяемая работой, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q_{0+}}. \qquad (4.12)$$

Э.д.с. в замкнутой цепи может быть определена как циркуляция вектора напряженности сторонних сил

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{cm} d\vec{l}. \qquad (4.13)$$

Таким образом, на заряды на участке цепи, в котором есть источник тока, действуют кулоновские и сторонние силы. Следовательно, *напряжение на участке цепи* – величина, численно равная работе, совершаемой полем электростатических и сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда на этом участке цепи

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}. \qquad (4.14)$$

4.5. Закон Ома для однородного участка цепи

Однородным называется участок цепи, не содержащий источника э.д.с. (рис. 4.6).

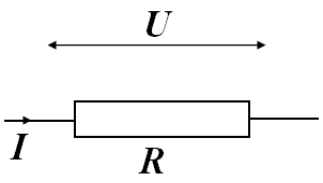


Рис.4.6

$$I = \frac{U}{R}. \qquad (4.15)$$

Закон Ома в интегральной форме: сила тока прямо пропорциональна падению напряжения на однородном участке цепи и обратно пропорциональна сопротивлению этого участка.

● Закон Ома не является универсальной связью между током и напряжением.

а) Ток в газах и полупроводниках подчиняется закону Ома только при небольших U.

б) Ток в вакууме не подчиняется закону Ома даже при малых U, а подчиняется закону Богуславского-Лэнгмюра (закон 3/2): $I \sim U^{3/2}$.

в) в дуговом разряде – при увеличении тока напряжение падает.

Неподчинение закону Ома обусловлено зависимостью сопротивления от тока.

В СИ сопротивление R измеряется в омах [1Ом = 1В / 1А].

Величина сопротивления R зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он сделан. Для цилиндрического проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \qquad (4.16)$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление [Ом·м], для металлов его величина порядка 10^{-8} Ом·м. Сопротивление проводника зависит от его температуры:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \cdot t),$$
$$R = R_0 (1 + \alpha \cdot t), \qquad (4.17)$$

где α – температурный коэффициент сопротивления, для чистых металлов (при не очень низких температурах $\alpha \approx 1 / 273$ К$^{-1}$), ρ_0, R_0 – соответственно удельное сопротивление и сопротивление проводника при $t = 0$ °С. Такая зависимость $\rho(t)$ объясняется тем, что с ростом температуры интенсивность хаотического движения положительных ионов кри-

сталлической решетки увеличивается, направленное движение электронов тормозится.

При последовательном соединение проводников:

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n. \qquad (4.18)$$

При параллельном соединение проводников:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}. \qquad (4.19)$$

4.6. Закон Ома в дифференциальной форме

Закон Ома в дифференциальной форме связывает, как и любое дифференциальное уравнение, величины, относящиеся к одной точке, в отличие от интегральных уравнений, связывающих величины, относящиеся к разным точкам.

$$d\varphi = Edl;$$

$$dI = \frac{d\varphi}{dR}, \qquad jdS = \frac{Edl}{\rho dl} \cdot dS, \Rightarrow \quad j = \frac{E}{\rho}. \qquad (4.20)$$

$\sigma = 1/\rho$ – удельная электрическая проводимость, [сименс на метр, См/м]. Тогда формулу (4.20) можно представить в виде

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \qquad (4.21)$$

В изотропной среде носители тока (положительные) в каждой точке движутся в направлении вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$.

4.7. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Закон Ома для замкнутой цепи

Неоднородный – участок цепи, содержащий источник э.д.с. (рис. 4.7).

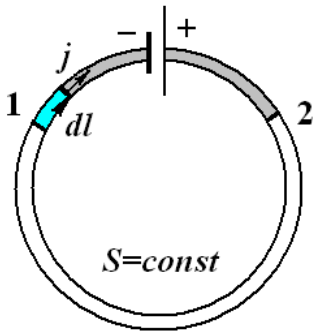


Рис.4.7

Рассмотрим замкнутую цепь, содержащую источник э.д.с., который в направлении 1–2 способствует движению положительных зарядов.

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_{cm}\right),$$

E – напряженность поля кулоновских сил,
$\boldsymbol{E}_{ст}$ – напряженность поля сторонних сил.

$$d\vec{l} \cdot \vec{j} = \sigma\vec{E}d\vec{l} + \sigma\vec{E}_{ст}d\vec{l}.$$

Вектор ***dl*** выбраем совпадающим по направлению с вектором плотности тока ***j***. Учитывая, что $d\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{j} \uparrow\uparrow \vec{E} \uparrow\uparrow \vec{E}_{ст}$;

$\sigma = \dfrac{1}{\rho}$; $\quad j = \dfrac{I}{S}$.

Интегрируем по длине проводника от сечения 1 до некоторого сечения 2:

$$\int_1^2 \frac{\rho I}{S} dl = \int_1^2 E dl + \int_1^2 E_{ст} dl,$$
$$\frac{I\rho}{S} l_{21} = \int_1^2 E dl + \int_1^2 E_{ст} dl. \qquad (4.22)$$

$\int_1^2 E dl = \varphi_1 - \varphi_2$ – работа, совершаемая кулоновскими силами по перемещению единичного положительного заряда q_{0+} из точки 1 в точку 2.

$\int_1^2 E_{ст} dl = \mathcal{E}$ – работа, совершаемая сторонними силами по перемещению единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2.

Работа, совершаемая кулоновскими и сторонними силами по перемещению единичного положительного заряда – *падение напряжения (напряжение).* Так как точки 1, 2 были выбраны произвольно, то полученные соотношения справедливы для любых двух точек электрической цепи:

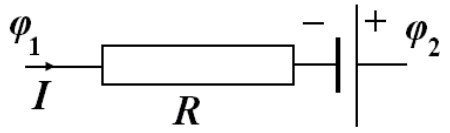


Рис.4.8

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}}{R} \qquad (4.23)$$

– закон Ома для неоднородного участка цепи.

Если источник э.д.с. включен таким образом, что в направлении протекания тока он повышает потенциал электрической цепи, то он берется с плюсом + $\mathcal{E}$, в противном случае со знаком – $\mathcal{E}$.

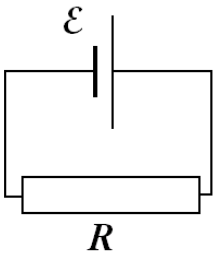


Рис.4.9

Если цепь *замкнутая* (рис. 4.9), то $\varphi_1 = \varphi_2$. Следовательно, закон Ома для замкнутой цепи имеет вид:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{полн}}; \qquad R_{полн} = r_{внутр.ист.т.} + R_{внеш.цепи}. \qquad (4.24)$$

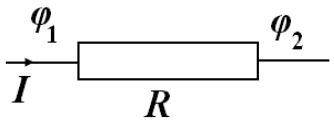
4.8. Работа и мощность электрического тока. Закон Джоуля-Ленца

При соударении свободных электронов с ионами кристаллической решетки они передают ионам избыток кинетической энергии, которую приобретают за время ускоренного движения в электрическом поле. В результате этих соударений амплитуда колебаний ионов около узлов кристаллической решетки увеличивается (тепловое движение ионов становится более интенсивным). Следовательно, проводник нагревается: температура – мера интенсивности хаотического движения атомов и молекул. Выделившееся тепло Q численно равно работе A электрического тока.

Мощность электрического тока:

$$P = \frac{A}{t}. \qquad (4.25)$$

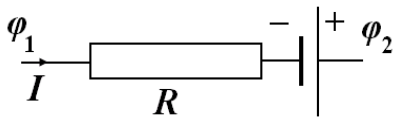
Рассмотрим однородный участок цепи:



$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2)I \cdot t = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t.$$

$$P = IU \qquad (4.26)$$

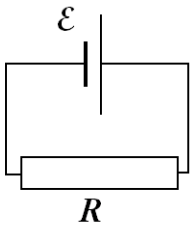
Рассмотрим неоднородный участок цепи:



$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}) = (\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E})I \cdot t.$$

$$P = (\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E})I. \qquad (4.27)$$

Рассмотрим замкнутую цепь.



$$A = \mathcal{E} I \cdot t.$$

$$P = \mathcal{E} I. \qquad (4.28)$$

К.п.д. источника тока: $\eta = \dfrac{I^2 R}{I\mathcal{E}} = \dfrac{U}{\mathcal{E}}.$ (4.29)

4.9. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

Независимо друг от друга Джоуль и Ленц показали, что при протекании тока в проводнике выделяется количество теплоты. Рассмотрим однородный проводник, к концам которого приложено напряжение U. За время dt через сечение проводника переносится заряд $dq = Idt$. Так как ток представляет собой перемещение заряда dq под действием электрического поля, то работа тока $dA = Udq = IUdt$. Если ток проходит по неподвижному проводнику, то вся работа идет на его нагревание $dA = dQ$. Тогда получим, $dQ = IUdt = I^2 Rdt = \dfrac{U^2}{R}dt$, данное выражение представляет собой закон Джоуля–Ленца.

Удельная тепловая мощность тока – количество тепла, выделившееся в единичном объеме за единицу времени.

$$q = \frac{dQ}{dVdt}. \qquad (4.30)$$

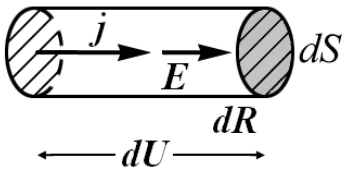


Рис.4.10

Выделим в проводнике элементарный цилиндрический объем (рис.4.10). По закону Джоуля–Ленца в этом объеме выделитсятепло-та:

$$dQ = (dI)^2 dRdt = \frac{(jdS)^2 \rho dl}{dS} dt = j^2 \rho \underbrace{dSdl}_{dV} \cdot dt,$$

используя дифференциальную формулу закона Ома $j = \sigma E$, получим

$$dQ = \sigma^2 E^2 \rho dV \cdot dt,$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho}.$$

$$q = \frac{dQ}{dVdt} = \sigma E^2. \qquad (4.31)$$

Формула (4.31) является обобщенным выражением закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме, пригодным для любого проводника.

4.10. Законы Кирхгофа

Законы Кирхгофа используются для расчета разветвленных цепей постоянного тока. Законы сформулированы немецким физиком Г.Р.Кирхгофом (1824-1887) в 1847 году.

Неразветвленная электрическая цепь – цепь, в которой все элементы цепи соединены последовательно.

Элемент электрической цепи – любое устройство, включенное в электрическую цепь и проводящее электрический ток.

Узел электрической цепи – точка разветвленной цепи, в которой сходится более двух проводников.

Ветвь разветвленной электрической цепи – участок цепи между двумя узлами.

Первый закон Кирхгофа (следствие закона сохранения заряда): алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0. \qquad (4.32)$$

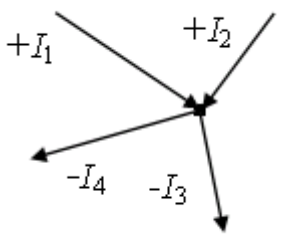


Рис.4.11

Это следует из того, что если бы $\sum_{i=1}^{n} I_i \neq 0$, то в узле происходило бы накапливание или уменьшение заряда, что приводило бы к изменению потенциала узла и, таким образом, измененю текущих в цепи токов. Поэтому, чтобы токи в цепи были постоянными, должно выполняться первое правило Кирхгофа.

Ток, подходящий к узлу – положительный.
Ток, отходящий от узла – отрицательный (рис.4.11). Пример: $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$.

Второй закон Кирхгофа (обобщенный закон Ома): в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов I_i на сопротивление соответствующих участков R_i этого контура равна алгебраической сумме э.д.с. в контуре.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{E}_i. \qquad (4.33)$$

Ток считается положительным, если его направление совпадает с условно выбранным направлением обхода контура.

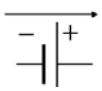


Рис.4.12

Э.д.с. считается положительной, если направление обхода происходит от – к + источника тока, т.е. э.д.с. создает ток, совпадающий с направлением обхода.

Порядок расчета разветвленной цепи:

1. Произвольно выбрать и обозначить на чертеже направление токов во всех участках цепи.
2. Подсчитать число узлов в цепи (m). Записать первый закон Кирхгофа для каждого из (m-1) узлов.
3. Выделить произвольно замкнутые контуры в цепи, произвольно выбрать направления обхода контуров.
4. Записать для контуров второй закон Кирхгофа. Если цепь состоит из p-ветвей и m-узлов, то число независимых уравнений 2-го закона Кирхгофа равно (p-m+1).

4.11. Электрический ток в электролитах

Электролиты – водные растворы солей, кислот, щелочей. Они являются проводниками второго рода.

Расщепление нейтральной молекулы на положительные и отрицательные ионы в результате взаимодействия растворенного вещества с растворителем называется *электролитической диссоциацией*.

Пример: $NaCl \leftrightarrow Na^{+} + Cl^{-}$.

Процесс образования нейтральной молекулы при столкновении положительного и отрицательного ионов называется *рекомбинацией (молизацией)*.

Причины электролитической диссоциации:
- тепловое движение полярных молекул растворенного вещества,

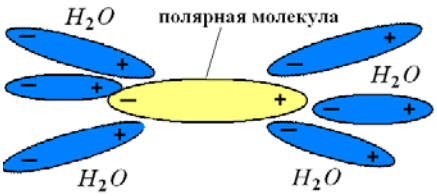


Рис.4.13

- взаимодействие этих молекул с полярными молекулами растворителя (поле молекул H_2O , окружающих полярную молекулу, ослабляет связь между ионами этой молекулы) (рис.4.13).

После разрыва молекулы на ионы диполи растворителя обволакивают их, образуя *сальватную оболочку*, сильно затрудняющую движение ионов (рис.4.14).

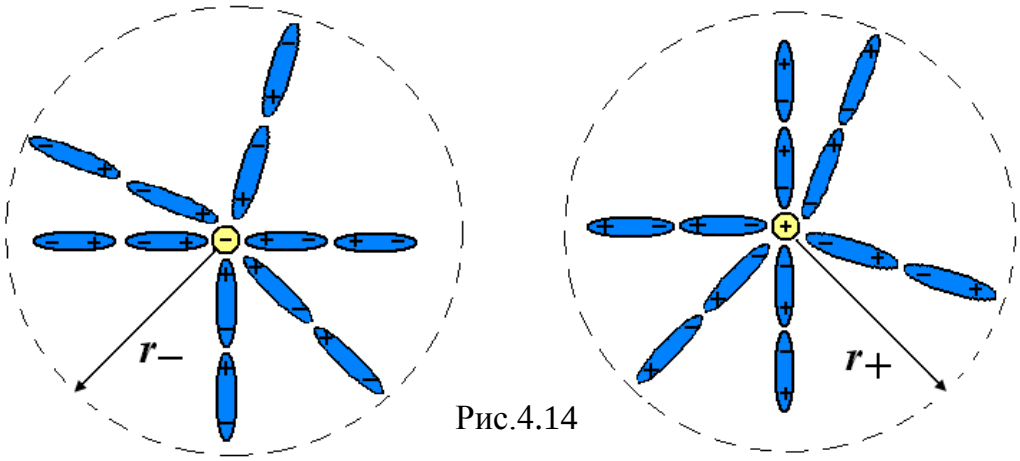


Рис.4.14

Во внешнем электрическом поле происходит упорядоченное движение ионов, т.е. возникает электрический ток.

Электрическое поле создается электродами: положительным анодом и отрицательным катодом. Положительные ионы – *катионы* (ионы металлов и ионы водорода) движутся к катоду. Отрицательные ионы – *анионы* (ионы кислотных остатков и гидроксильной группы) движутся к аноду. Электрический ток в электролитах сопровождается явлением *электролиза* – выделением на электродах составных частей растворенных веществ или других веществ, являющихся результатом вторичных реакций на электродах.

Первый закон Фарадея: масса M вещества, выделившегося на электродах, прямо пропорциональна электрическому заряду Q, прошедшему через электролит.

$$M = kQ = kIt, \tag{4.34}$$

где k – электрохимический эквивалент.

Второй закон Фарадея: электрохимический эквивалент вещества k пропорционален отношению молярной массы A ионов этого вещества к их валентности z.

$$k = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{z}, \tag{4.35}$$

где F = 96486,7 Кл / моль – число Фарадея.

4.12. Закон Ома для электролитов

Плотность тока можно рассчитать используя формулу $j = qnv$; для электролитов формула плотности тока будет иметь следующий вид $j = q_+ n_+ v_+ + q_- n_- v_-$, где q_+, q_- – заряд положительного и отрицательного иона, соответственно, n_+, n_- – концентрация _положительных и отрицательных ионов, соответственно. Заряд положительного и отрицательного иона рассчитывается по формулам $q_+ = z_+ e$ и $q_- = z_- e,$ где z_+, z_- – валентность _положительных и отрицательных ионов, соответственно. Для упрощения расчетов, учитывая, что в электролите происходит диссоциация нейтральной молекулы, примем: $z_+ = z_- = z; n_+ = n_- = n.$ Тогда формула плотности тока будет иметь вид $j = zne(v_+ + v_-).$

Ускорение ионов в электрическом поле происходит до тех пор, пока электрическая сила не станет равной силе трения: $\underbrace{z_+ e}_{q} E - F_{тр} = 0.$

Учитывая закон Стокса: $F_{тр} = 6\pi\eta \cdot r_+ v_+$, где η – коэффициент вязкости среды, r_+ – радиус положительного иона (сальватной оболочки), будем иметь следующее соотношение: $z_+ eE = 6\pi\eta \cdot r_+ v_+$, откуда $v_+ = \frac{z_+ eE}{6\pi\eta r_+} = \frac{z_+ e}{6\pi\eta r_+} E$. Введем $\frac{z_+ e}{6\pi\eta r_+} = u_+$ – подвижность положительных ионов, численно равная скорости положительных ионов

при E = 1 В/м. Тогда $v_+ = u_+ E$. И $\frac{z_- e}{6\pi\eta r_-} = u_-$ – подвижность отрицательных ионов. Тогда $v_- = u_- E$.

С учётом того, что $z_+ e = z_- e = ze,\ n_+ = n_-$, плотность тока будет иметь вид

$$j = zne(u_+ + u_-)E \qquad (4.36)$$

– *закон Ома для электролитов в дифференциальной форме.*
Учитывая, что $\sigma = zne(u_+ + u)$ – удельная проводимость электролита закон Ома для электролитов в дифференциальной форме можем записать в следующем виде:

$$j = \sigma E. \qquad (4.37)$$

При увеличении температуры подвижность ионов растет. Следовательно, сопротивление электролитов уменьшается (отличие от металлов, у которых с ростом температуры сопротивление увеличивается).

4.13. Электрический ток в газах. Проводимость газов

Газ в нормальном состоянии не является проводником, т.к. он состоит из нейтральных молекул. Для создания проводимости газа необходимо нейтральные молекулы расщепить на положительные ионы и электроны. Между вырываемым электроном и атомным остатком (остальной частью атома молекулы) действует сила притяжения, поэтому для расщепления атома (молекулы) необходимо совершить работу, которая называется *работой ионизации*, а сам процесс расщепления – *ионизацией* атома (молекулы). Эта работа рассчитывается по формуле:

$$A_i = e\varphi \quad \text{для} \quad z = 1, \qquad (4.38)$$

φ – потенциал ионизации.

Потенциал ионизации φ – разность потенциалов, которую должен пройти электрон, чтобы приобрести энергию, необходимую для ионизации молекулы.

Как правило, вырванный электрон прилипает к нейтральной молекуле. Следовательно, в проводимости газов одновременно участвуют

положительные, отрицательные ионы и электроны. Если не учитывать проводимость электронов, то по аналогии с электролитами можно записать закон Ома для газов:

$$j = ne(u_+ + u_-)E, \quad z = 1. \qquad (4.39)$$

Ионизация газа вызывается внешним воздействием:

- термическая ионизация – результат столкновения молекул при высоких температурах $(\varepsilon \div kT)$,
- космические лучи,
- радиоактивное $(\alpha-, \beta-, \gamma)$излучение,
- бомбардировка ускоренными электронами и ионами, обладающими энергией, превышающей энергию связи электрона и ядра, – ударная ионизация,
- фотоионизация – ионизация фотонами.

Количественная мера ионизации:

Интенсивность ионизации α - число пар ионов противоположного знака, образовавшихся за единицу времени t в единице объема V.

4.14. Несамостоятельный газовый разряд

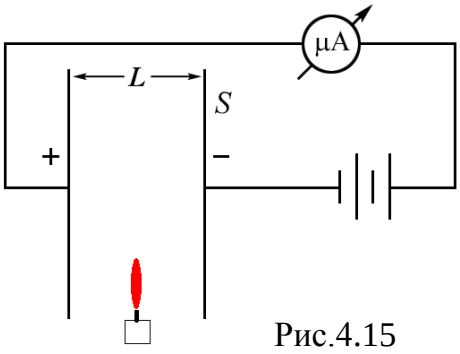


Рис.4.15

Если в газовый промежуток длиной L между двумя пластинами площадью S внести пламя свечи, то во внешней цепи будет протекать ток. Если пламя убрать – ток исчезает.

Газовый разряд – процесс протекания электрического тока через газ.

Несамостоятельный газовый разряд – газовый разряд, вызванный внешними ионизаторами, который прекращается при прекращении действия ионизатора.

Процессы, происходящие при газовом разряде:

1. Ионизация – прибыль ионов.
2. Рекомбинация – убыль ионов.
3. Разрядка ионов на электродах – убыль ионов.

С учетом этих трех процессов записывается уравнение баланса ионов, в котором n – концентрация ионов:

$$\underbrace{SL}_{V}\frac{dn}{dt}=\underbrace{\alpha SL}_{1}-\underbrace{\beta n^2 SL}_{2}-\underbrace{\frac{jS}{e}}_{3}. \qquad (4.40)$$

Рекомбинация ионов (второй процесс – второе слагаемое в правой части уравнения (4.40)) происходит при встрече положительных и отрицательных ионов. Следовательно, вероятность рекомбинации прямо пропорциональна числу как положительных, так и отрицательных ионов, т.е. $\sim n^2$.

β – коэффициент рекомбинации, зависящий от вида газа.

- В установившемся режиме: $n = const$, $dn/dt = 0$.

$$\alpha SL-\beta n^2 SL-\frac{jS}{e}=0. \qquad (4.41)$$

$$\alpha-\beta n^2-\frac{j}{eL}=0. \qquad (4.42)$$

- В слабых полях рекомбинация ионов значительно интенсивнее разрядки ионов на электродах:

$$\beta n^2 >> \frac{j}{eL}. \qquad \alpha-\beta n^2=0. \qquad (4.43)$$

$\Rightarrow \quad n=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$. Подставляем в уравнение(4.42) уравнение для плотности тока:

$$j=ne(u_+ + u_-)E=e\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}(u_+ + u_-)E. \qquad (4.44)$$

– закон Ома при слабых полях выполняется.

- В сильных полях убыль ионов происходит в основном за счет разрядки ионов на электродах, так как практически все образующиеся ионы достигают электродов, не успев рекомбинировать.

$$\beta n^2 \prec\prec \frac{j}{eL}. \quad \Rightarrow \quad \alpha-\frac{j}{eL}=0.$$

$$\Rightarrow \quad j=\alpha eL. \qquad (4.45)$$

- закон Ома не выполняется.

Кривая зависимости тока I от напряжения между электродами U (вольтамперная характеристика) при несамостоятельном разряде имеет вид (рис.4.16):

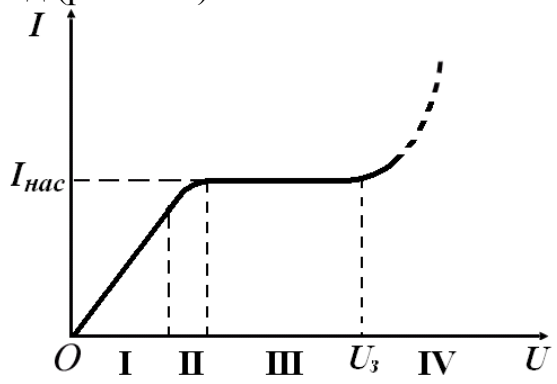


Рис.4.16

I – закон Ома выполняется.

II – концентрация ионов в газе убывает и сила тока растет медленнее.

III – при неизменной интенсивности ионизации все образовавшиеся ионы в сильном электрическом поле достигают электродов, ток выходит на насыщение .

IV – закон Ома не выполняется, происходит электрический пробой газа при напряжении зажигания $U_з$.

Наименьшее напряжение зажигания $U_з$ газового разряда между двумя плоскими электродами есть величина постоянная (характерная для данного сорта газа) при одинаковых значениях произведения Ph, где P – давление газа; h – расстояние между электродами. Этот закон был сформулирован в 1899 г. немецким физиком Ф. Па́шеном (1865–1947). Потенциал зажигания возрастает в области малых и в области больших значений Ph, при $Ph \sim 1$ мм рт.ст.$\div 1$ см потенциал зажигания достигает для большинства газов минимальной величины, обычно порядка сотен вольт (рис.4.17).

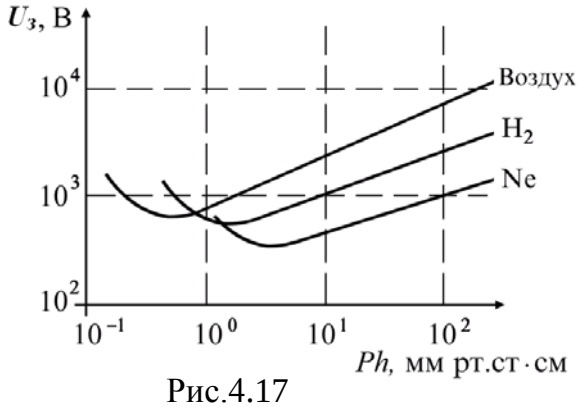


Рис.4.17

4.15. Самостоятельный газовый разряд

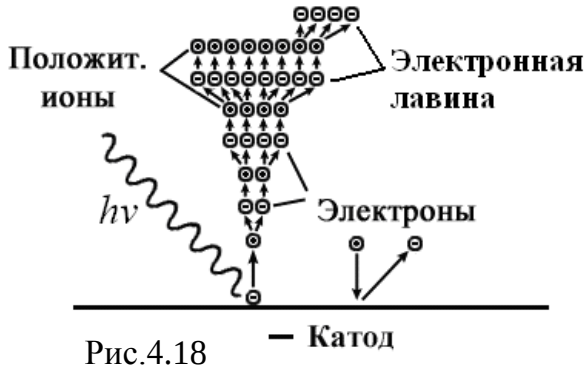


Рис.4.18

Это электрический разряд в газе, который существует после прекращения действия внешнего ионизатора. Для существования такого разряда необходимо, чтобы в газе происходило непрерывное образо-

вание новых пар противоположно заряженных частиц. Основным источником таких частиц является *ударная ионизация* газа – ионизация газа под действием ускоренных электронов или ионов. При больших напряжениях, равных напряжению зажигания $U_з$, электроны, возникшие под действием внешнего ионизатора, сильно ускоряются электрическим полем. Сталкиваясь с нейтральными молекулами газа, они ионизируют их, т.е. образуются вторичные электроны и положительные ионы и так далее. Образуется *электронная лавина* (рис.4.18). Но для возникновения самостоятельного разряда ударной ионизации недостаточно, так как электроны ионизируют молекулы газа, расположенные ближе к аноду. Необходимо, чтобы энергия положительных ионов при ударе о катод была достаточна для выбивания электронов из катода – вторичная электронная эмиссия. В этом случае образуется двухсторонняя лавина. Необходимость во внешнем ионизаторе исчезает. Несамостоятельный разряд переходит в самостоятельный. Этот переход называется *электрическим пробоем* газа. В противном случае, вблизи катода электроны могут возникать только под действием внешних ионизаторов (например, под действием фотонов $h\nu$) и при их отсутствии газовый разряд прекращается. При самостоятельном разряде исходные носители заряда (в отсутствие внешнего ионизатора) образуются при действии радиоактивного излучения Земли и космических лучей.

Процессы, способствующие существованию самостоятельного разряда:

- термоэлектронная эмиссия – испускание электронов нагретыми телами,
- фотоионизация – ионизация молекул фотонами,
- фотоэлектронная эмиссия – испускание электронов под действием фотонов,
- автоэлектронная эмиссия – вырывание электронов из металла электрическим полем.

Типы самостоятельных разрядов.

В зависимости от давления газа, конфигурации электродов, параметров внешней цепи можно выделить 4 типа самостоятельных разрядов:

• *Тлеющий разряд* наблюдается при низком давлении (~ 0,01 мм.рт.ст.), является следствием ударной ионизации и вторичной электронной эмиссии.

• *Коронный разряд* возникает на остриях («огни святого Эльма»).

• *Искровой разряд* является следствием фотоэмиссии и возникновения стримеров.

• *Дуговой разряд* является следствием термоэлектронной эмиссии.

Тлеющий разряд

Возникает при низком давлении. Схема эксперимента – рисунок 4.18. В стеклянную трубку длиной 30-50 см впаяны электроды, к которым прикладывается постоянное напряжение в несколько сотен вольт.

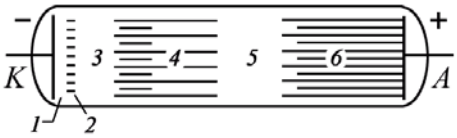


Рис.4.19

• При давлении $P \approx 5{,}3 \div 0{,}7$ кПа наблюдается разряд в виде шнура красного цвета, идущего от катода к аноду. При понижении давления шнур утолщается.

• При $P \approx 13$ Па в разряде появляется несколько областей:

1 – астоново темное пространство, названное в честь Ф. Астона (1877 – 1945), впервые наблюдавшего его, 2 – первое катодное свечение (катодная пленка), 3 – катодное темное пространство, 4 – тлеющее свечение имеет резкую границу со стороны катода, возникает из-за рекомбинации электронов с положительными ионами, 5 – фарадеево темное пространство, 6 – положительный столб.

Во второй области электроны и ионы сильно ускоряются, положительные ионы выбивают электроны из катода – вторичная электронная эмиссия. В четвертой области происходит ударная ионизация электронами молекул газа, в результате чего образуются положительные ионы, которые устремляются к катоду и выбивают из него электроны. Далее процесс повторяется: $e^- \rightarrow +i \rightarrow e^- \rightarrow \ldots$.

• При дальнейшем понижении давления $P \leq 13$ Па свечение газа ослабевает и возникает свечение стенок трубки – ***катодолюминесценция***. Так как молекул остаточного газа мало (n мала), электроны, ускоренные полем, преимущественно ударяются о стеклянные стенки трубки, вызывая их свечение.

Применение: лампы дневного света – в трубке пары ртути; газосветные трубки – неон дает красный свет, аргон – синевато-зеленый.

Искровой разряд

Рис.4.20

Возникает при больших напряжениях электрического поля $\approx 3 \cdot 10^6$ В/м в газе, находящемся под давлением порядка атмосферного. В природе примером искрового разряда явля-

ется молния (рис.4.20). Объяснение искрового разряда дается на основе стримерной теории.

Появлению ярко светящегося канала искры предшествует возникновение слабосветящихся скоплений ионизованного газа – *стримеров*.

Стримеры возникают в результате образования электронных лавин вследствие:

- ударной ионизации,
- фотонной ионизации газа.

Лавины, следуя одна за другой, образуют проводящие каналы из стримеров, следствием чего является образование канала искрового разряда.

Применение: свеча зажигания, искровые разрядники, электроискровая обработка металлов.

Дуговой разряд

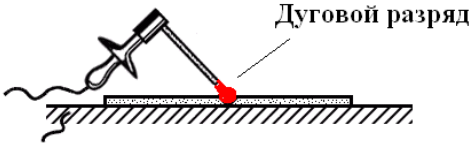


Рис.4.21

Впервые дуговой разряд был получен В.В. Петровым в 1802 г. Возникает после зажигания искрового разряда при уменьшении расстояния между электродами, что приводит к резкому возрастанию тока (до сотен ампер). При этом напряжение на разрядном промежутке падает (~ десятки вольт). Поддерживается за счет высокой температуры катода из-за интенсивной термоэлектронной эмиссии и термической ионизации молекул (рис.4.21).

Применение: электросварка, дуговые электропечи, мощные источники света.

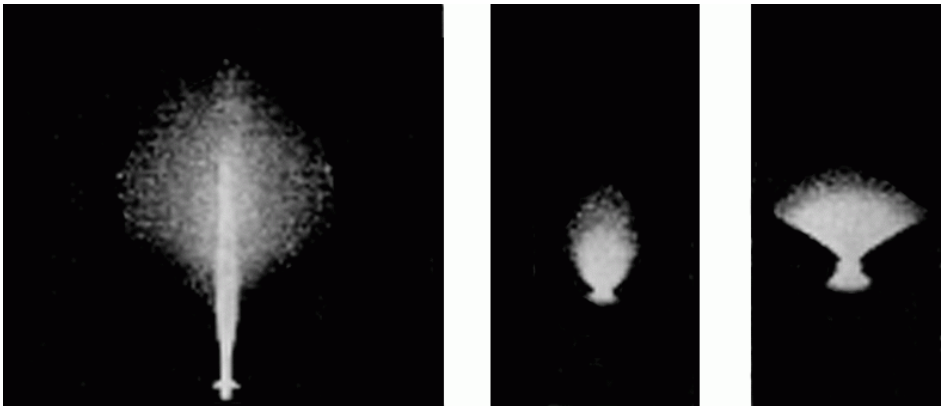
Коронный разряд

Высоковольтный электрический разряд при высоком давлении (~ атмосферном) в сильно неоднородном электрическом поле (вблизи электродов с большой кривизной поверхности – острия, линии электропередач)(рис.4.22). При напряженности электрического поля $E \sim 30$ кВ/см вблизи острия возникает свечение по форме напоминающее корону. В зависимости от знака коронирующего электрода различают отрицательную или положительную корону.

• Коронирует катод – отрицательная корона: электроны выбиваются из катода при его бомбардировке положительными ионами. Электроны вызывают ударную ионизацию молекул газа.

• Коронирует анод – положительная корона: электроны рождаются вследствие фотоионизации газа вблизи анода.

Применение: молниеотводы, электрофильтры, нанесение красок в коронном разряде. Вредное действие: радиопомехи; возникновение на проводах высоковольтных ЛЭП приводит к утечке тока (для снижения утечки высоковольтные провода делают большего диаметра).



а *б* *в*

Рис.4.22

Кистеобразные формы коронного разряда в атмосферном воздухе. Острие с гиперболической вершиной (радиус кривизны 1,5 мм): *а* – потенциал острия +25 кВ, стримерная корона; *б* – потенциал острия –25 кВ, отрицательная корона в импульсном режиме; *в* – потенциал острия –60 кВ, отрицательная корона в непрерывном режиме

Часть III
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Тема 5
5.1. Понятие о магнитном поле

Магнитные свойства постоянных магнитов, их способность притягивать железные предметы были известны еще древним грекам. Земля также является магнитом и явления земного магнетизма были использованы ещѐ древними китайцами 3000 лет тому назад для создания подобия компаса, т.е. свободно вращающейся магнитной стрелки, указывающей ориентацию сторон света. Китайские мореплаватели использова-

ли компас в XI веке, в Европе подобные устройства появились лишь в XII веке.

При рассмотрении электропроводности ограничивались явлениями, происходящими внутри проводников. Опыты показывают (рис.5.1,5.2,5.3), что вокруг проводников с током и постоянных магнитов существует силовое поле, которое оказывает силовое действие на другие проводники с током или постоянные магниты. Это поле было названо *магнитным*. Помещенная в это поле маленькая магнитная стрелка устанавливается в каждой его точке вполне определенным образом, указывая тем самым направ-ление поля. Тот конец стрелки, который в магнитном поле Земли указывает на север, называется *северным*, а противоположный – *южным*.

● Опыт Эрстеда (1820).

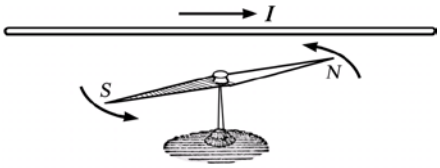


Рис.5.1

Взаимодействие постоянного электрического тока с магнитной стрелкой.

Стрелка стремится расположиться перпендикулярно проводнику с током. При изменении направления тока в проводнике северный конец стрелки поворачивается в другую сторону.

● Опыт Эйхенвальда (1901).

Взаимодействие конвекционного тока (обусловленного движением в пространстве заряженных тел) и магнитной стрелки.

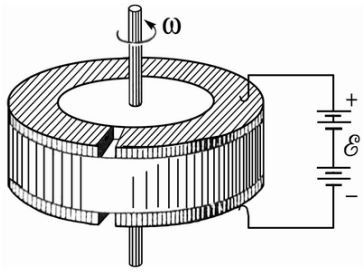


Рис.5.2

Диэлектрический диск по краю имеет металлический ободок с разрезом. Между ободком и корпусом прибора или между двумя ободками, расположенными на верхней и нижней плоскости диска (этот случай изображен на рисунке), создается разность потенциалов $\Delta\varphi$. В любом случае имеется конденсатор с зарядом на обкладке $q = C\Delta\varphi$. Диск вращается, при этом возникает конвекционный ток $I = qn = C\Delta\varphi n$, где n – число оборотов диска за единицу времени, и магнитная стрелка отклоняется.

● Опыт Иоффе (1911).

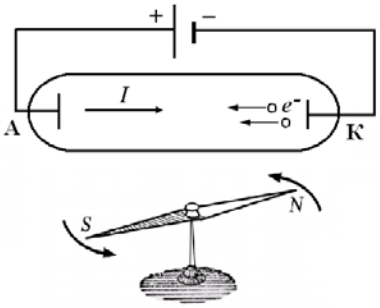


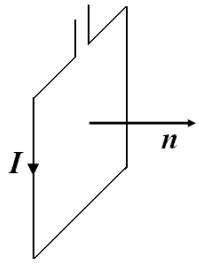
Рис.5.3

Взаимодействие движущихся заряженных частиц (электронов) и магнитной стрелки.
Эксперименты показывают:

- Движущиеся относительно системы отсчета заряды (токи) создают магнитное поле.
- Магнитное поле действует на движущиеся заряды, а на неподвижные не действует.

5.2. Вектор магнитной индукции – силовая характеристика магнитного поля

Силовое действие магнитное поле оказывает на:
1) Элемент тока: $F \sim I \cdot dl$. Элемент тока $I \cdot dl$ выделить невозможно.
2) Магнитную стрелку. С помощью магнитной стрелки можно установить ориентационное действие магнитного поля, но численный расчет её магнитных свойств затруднителен.
3) Рамку или контур с током.



Ориентация рамки в пространстве определяется направлением положительной нормали, определяемой по правилу буравчика: если направление вращения правого винта совпадает с направлением тока, то поступательное движение винта совпадает с положительным направлением нормали.

Если по рамке, помещенной во внешнее магнитное поле, пропускается ток, то она поворачивается и устанавливается в положение равновесия (рис.5.4).

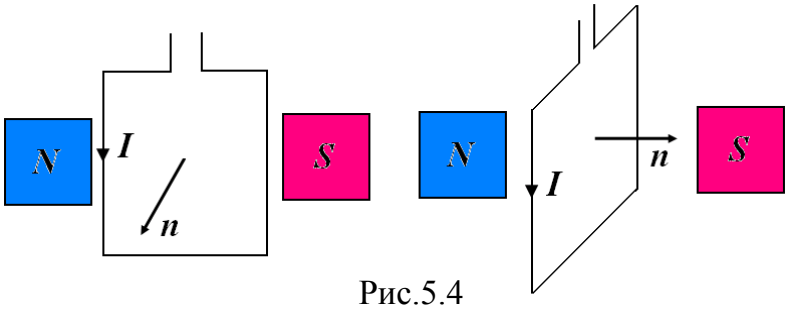


Рис.5.4

Максимальный вращающий момент M_{max} достигается, если угол между начальным и равновесным положениями нормали к рамке равен 90°.
Магнитный момент рамки: $P_m = I \cdot S$. Так как рамка характеризуется ориентацией в пространстве, то *магнитный момент* – величина векторная: $\vec{P}_m = P_m \vec{n} = IS\vec{n}$.

Опыты показывают, что для данной точки пространства отношение $M_{\max}$ и P_m величина постоянная

$$\frac{M_{\max}}{P_m} = \frac{M_{\max}}{IS} = B - \textit{магнитная индукция}.$$

Так как в разных местах магнитного поля рамка ориентируется различным образом, то магнитную индукцию $\vec{B}$ рассматривают как векторную величину.

В системе СИ магнитная индукция B измеряется в теслах: $\left[1Тл = \frac{1H \cdot 1м}{1A \cdot 1м^2}\right]$.

Магнитная индукция $\vec{B}$ в данной точке однородного магнитного поля $(\vec{B} = const)$ определяется максимальным вращающим моментом, действующим на рамку с единичным магнитным моментом P_m = 1 $A{\cdot}м^2$, когда нормаль к рамке перпендикулярна направлению поля (вектору $\vec{B}$).

5.3. Силовые линии магнитного поля

Линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора магнитной индукции $\vec{B}$, называются *силовыми линиями* магнитного поля (рис.5.5).

● Прямой ток.
Направление силовых линий определяется правилом буравчика.

● Круговой ток.

● Соленоид – система витков, имеющих ось симметрии.

● Постоянный магнит.

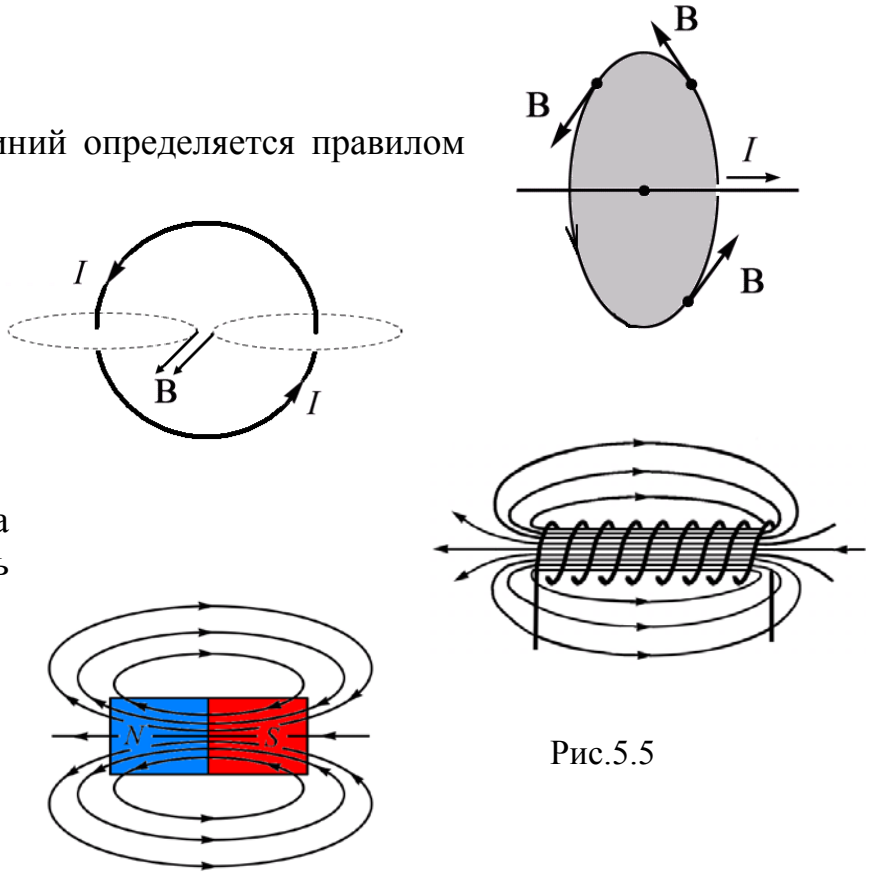


Рис.5.5

Силовые линии магнитного поля замкнуты и не пересекаются. Следовательно, магнитное поле – *вихревое*. Аналогия между магнитным полем постоянного (полосового) магнита и магнитным полем соленоида позволила Амперу высказать гипотезу о том, что магнитные свойства постоянных магнитов обусловлены существованием в них молекулярных токов (*микротоков)*.

5.4. Закон Гаусса для магнитного поля в дифференциальной и интегральной форме

Силовые линии магнитного поля замкнуты, следовательно, дивергенция вектора $\vec{B}$ равна нулю:

$div\vec{B} = 0$ – закон Гаусса для вектора $\vec{B}$ в дифференциальной форме.

(Для электрического поля: $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.)

Рассмотрим элементарный поток вектора индукции $\vec{B}$ магнитного поля через элемент площадки $d\vec{S}$ (рис.5.6): $d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Полный поток будет равен $\Phi_B = \int\limits_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

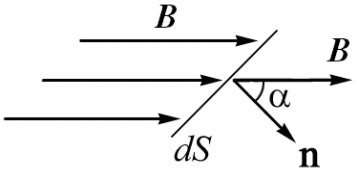


Рис.5.6

В СИ: $[\Phi_B]$ = вебер (Вб).

По теореме Остроградского-Гаусса: $\oint\limits_S \vec{B}d\vec{S} = \int\limits_V divBdV$, $div\vec{B} = 0$.Тогда

$$\oint\limits_S \vec{B}d\vec{S} = 0 \qquad (5.1)$$

– закон Гаусса для вектора $\vec{B}$ в интегральной форме.

Поток вектора $\vec{B}$ через произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

5.5. Закон Био – Савара – Лапласа

В 1820 г. французские физики Жан Батист Био и Феликс Савар, провели исследования магнитных полей токов различной формы. А французский математик Пьер Лаплас обобщил эти исследования. Био и

Савар экспериментально определили, что магнитная индукция зависит от:

1) тока I, протекающего по проводнику,
2) формы и размеров проводника,
3) положения точки относительно проводника,
4) состояния окружающей среды (магнитной проницаемости).

Лаплас учел векторный характер магнитного поля и предположил, что

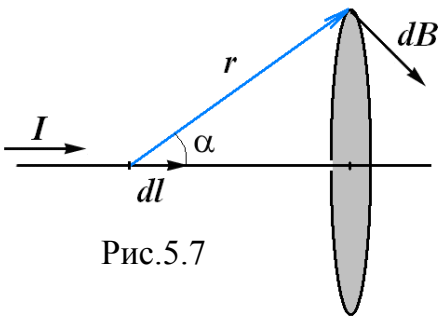


Рис.5.7

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i = \int_l d\vec{B}_i ,$$

где dB_i создается каждым участком длиной dl проводника с током I, т.е. элементарным током $I{\cdot}dl$ (рис.5.7)

$\vec{r}$ – радиус-вектор от элементарного тока до точки, в которой определяется поле.

α – угол между элементарным током $\boldsymbol{I{\cdot}dl}$ и радиус–вектором $\vec{r}$.

Закон Био – Савара – Лапласа: $$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{4\pi r^3}, \qquad (5.2)$$

где $\mu_0 = 4\pi{\cdot}10^{-7}$ [Гн / м; Н/А^2] – магнитная постоянная.

В скалярном виде: $$dB = \frac{\mu\mu_0 I dl \sin\alpha}{4\pi r^2}. \qquad (5.3)$$

Закон Био – Савара – Лапласа для элемента тока, который отдельно от замкнутой цепи выделить нельзя, означает, что , если взять интеграл по замкнутой цепи: $\vec{B} = \int_L \frac{\mu\mu_0 I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{4\pi r^3}$, то получим верный результат, совпадающий с экспериментальным.

Отношение магнитной индукции в среде $B_{среда}$ к магнитной индукции в вакууме B_0 называется *относительной магнитной проницаемостью среды*:

$$\mu = \frac{B_{среда}}{B_0}. \qquad (5.4)$$

Если $\mu < 1$, то среда – диамагнетик,
$\mu > 1$ – парамагнетик,
$\mu >> 1$ – ферромагнетик.

Произведение $\mu\mu_0$ – *абсолютная магнитная проницаемость среды*.

Принцип суперпозиции для магнитного поля: $\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i$.

$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$, где $\vec{H}$ – вектор напряженности магнитного поля, измеряемый в СИ [А / м]. (Для электрического поля: $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$.)

Закон Био – Савара – Лапласа для напряженности магнитного поля:

$$d\vec{H} = \frac{I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{4\pi r^3}. \qquad (5.5)$$

5.6. Применение закона Био – Савара – Лапласа для расчета магнитных полей

Применим закон Био–Савара–Лапласа для расчета магнитных полей простейших токов.

● Магнитное поле прямолинейного проводника с током.

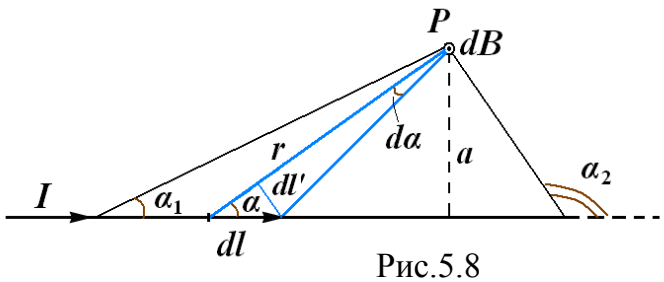


Рис.5.8

Найдем поле в точке *P*, расположенной на расстоянии *a* от проводника конечной длины с током *I* (рис.5.8). Элементарный ток ***I·dl*** в точке с радиус вектором $\vec{r}$ создает магнитное поле в вакууме

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{4\pi r^3}. \qquad (5.6)$$

Все элементарные токи создают в точке *P* магнитное поле одного направления и величиной $dB = \frac{\mu_0 I\, dl \sin\alpha}{4\pi r^2}$. (5.7)

Так как $d\alpha$ мал, то dl' совпадает с длиной дуги окружности радиуса r и центром в точке P. → $dl' = r\,d\alpha$; $dl = \dfrac{rd\alpha}{\sin\alpha}$. $a = r\sin\alpha$. $dl = \dfrac{ad\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Учитывая это представим (5.7) в виде:

$$dB = \frac{\mu_0 I \dfrac{ad\alpha}{\sin^2\alpha}}{4\pi \dfrac{a^2}{\sin^2\alpha}} \sin\alpha = \frac{\mu_0 I \sin\alpha d\alpha}{4\pi a}. \qquad (5.8)$$

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I \sin\alpha d\alpha}{4\pi a} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \qquad (5.9)$$

Если *проводник бесконечной длины*, тогда $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 180^0$.

$$B = \frac{2\mu_0 I}{4\pi a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. \qquad (5.10)$$

● Магнитное поле в центре кругового тока.

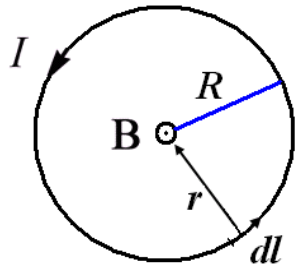


Рис.5.9

Все элементарные токи $I\cdot\mathbf{dl}$ создают в центре кругового тока (рис.5.9) вектор магнитной индукции $d\mathbf{B}$ одного направления.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{4\pi r^3}.$$

С учётом того, что $r = R$, $\alpha = 90^0$, выражение для расчёта вектора магнитной индукции можно представить

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin\alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}.$$

Проинтегрировав получим

$$B = \oint_l \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}. \qquad (5.11)$$

● Поле соленоида.

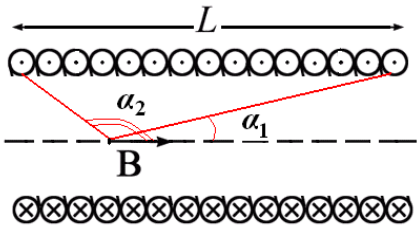


Рис.5.10

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2} nI\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right), \qquad (5.12)$$

где $n = N / L$ – число витков на единицу длины соленоида.

Если соленоид имеет бесконечную длину, то $B = \mu\mu_0 nI$

● Магнитное поле движущегося заряда.

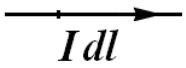


Рис.5.11

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0\left[I d\vec{l}, \vec{r}\right]}{4\pi r^3}. \qquad (5.13)$$

$dN = nSdl$ – число заряженных частиц в элементе тока $I\cdot\mathbf{dl}$, где n – концентрация частиц.

Перенесем знак вектора с $\mathbf{dl}$ на v

$$\left.\begin{aligned} I &= jS, \\ j &= qnv. \end{aligned}\right\} \text{Тгда } Id\vec{l} = qnvSd\vec{l} = qn\vec{v}Sdl = q\vec{v}ndV = q\vec{v}dN. \qquad (5.14)$$

Учитывая (5.14), представим (5.13) в виде:

$$d\vec{B}_N = \frac{\mu_0 q dN\left[\vec{v}, \vec{r}\right]}{4\pi r^3} \text{ – поле, созданное } dN \text{ частицами.} \qquad (5.15)$$

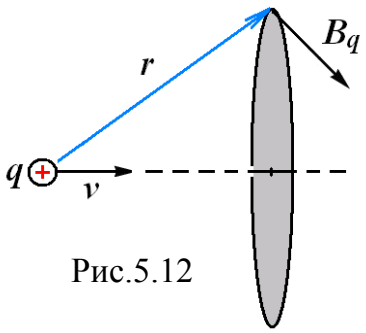


Рис.5.12

Поле, созданное одной движущейся заряженной частицей:

$$B_q = \frac{d\vec{B}_N}{dN} = \frac{\mu_0 q\left[\vec{v}, \vec{r}\right]}{4\pi r^3}. \qquad (5.16)$$

Направление силовых линий магнитного поля, создаваемого движущимся положительным зарядом, определяется правилом буравчика (рис.5.12).

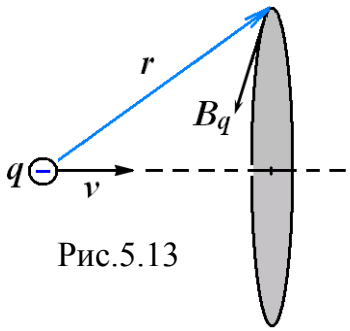


Рис.5.13

Поле, создаваемое движущимся отрицательным зарядом, имеет противоположное направление (рис.5.13).

5.7.Закон полного тока

Закон полного тока это аналог закона Гаусса в электростатике, так как с его помощью можно рассчитать магнитное поле тел, обладающих геометрической симметрией.

Закон полного тока в интегральной форме

Пусть имеем бесконечно длинный проводник с током I (рис.5.14).

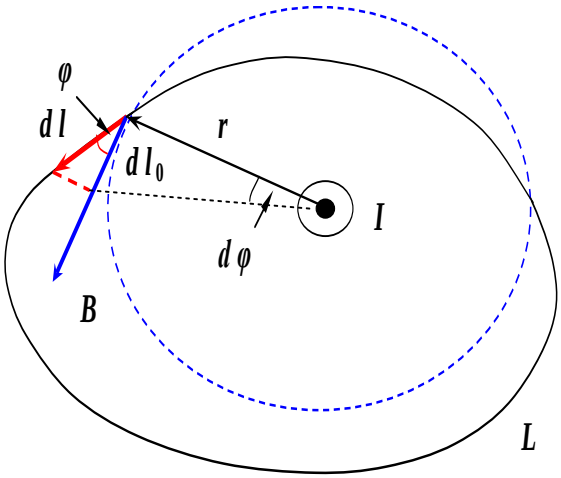


Рис.5.14

L – замкнутый контур произвольной формы, вектор магнитной индукции $\vec{B} \perp \vec{r}$ – радиус-вектору, dl – элемент произвольного контура L, dl_0 – элемент силовой линии прямого бесконечного тока (окружности).

φ – угол между dl и dl_0 или $\varphi = \angle \vec{B}, d\vec{l}$.

$dl_0 = dl\cos\varphi$ - проекция dl на B.

Циркуляция вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру L:

$$\left.\begin{aligned} &\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L Bdl\cos\varphi = \oint_L Bdl_0. \\ &B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \\ &dl_0 = rd\varphi. \end{aligned}\right\} \oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} rd\varphi = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi r}\int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I.$$

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}d\vec{S}. \qquad (5.17)$$

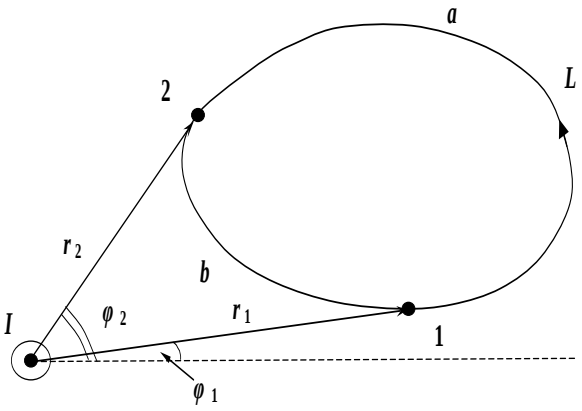
Из формулы (5.17) следует, что:

- магнитное поле прямолинейного тока – вихревое, т.к. $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} \neq 0$. (Электрическое поле – потенциальное, $\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = 0$.) Следовательно, магнитное поле не является потенциальным,
- циркуляция вектора $\vec{B}$ прямолинейного тока одинакова вдоль всех линий магнитной индукции и равна произведению $\mu_0 I$.

Если магнитное поле создано системой токов, то по принципу суперпозиции:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i, \qquad \oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i.$$

Ток не пронизывает контур.



$$\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \oint\limits_{1a2} \vec{B}d\vec{l} + \oint\limits_{2b1} \vec{B}d\vec{l} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi_2\right) = 0. \qquad (5.18)$$

Рис.5.15

Циркуляция вектора $\vec{B}$ прямолинейного тока вдоль замкнутого контура, не охватывающего этот проводник, равна нулю.

Циркуляция вектора магнитной индукции по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, пронизывающих этот контур.

5.8.Применение закона полного тока для вычисления простейших полей

Закон полного тока, как и закон Гаусса, применим для расчета полей проводников, обладающих геометрической симметрией.

● Поле бесконечного прямого тока.

В качестве контура выберем окружность радиуса r перпендикулярную току и имеющую центр на оси тока (рис.5.16).

В этом случае контур совпадает с силовой линией вектора магнитной индукции $\vec{B}$ и из соображений симметрии во всех точках, лежащих на одинаковом расстоянии от проводника, модуль вектора $\vec{B}$ одинаков.

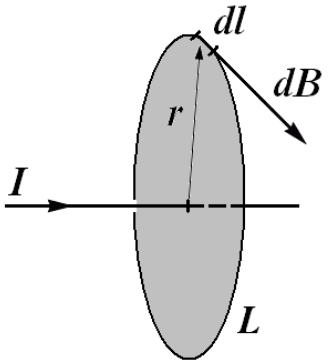


Рис.5.16

Закон полного тока: $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I.$

$$\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \oint\limits_L Bdl\cos\left(\angle\vec{B}, d\vec{l}\right) = B\oint\limits_L dl = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I.$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \qquad (5.19)$$

● Магнитное поле длинного соленоида (рис.5.17).

l – длина соленоида.

N – число витков.

$l >> d$; в этом случае эксперимент показывает, что $B_{\text{внутри}} = const$, а вне соленоида поле мало.

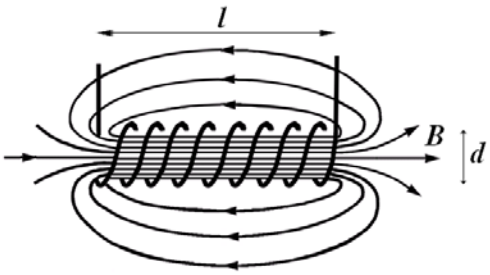


Рис.5.17

Поэтому считаем, что магнитное поле сосредоточено внутри соленоида, а полем вне соленоида пренебрегаем $B_{\text{вне соленоида}} = 0$.

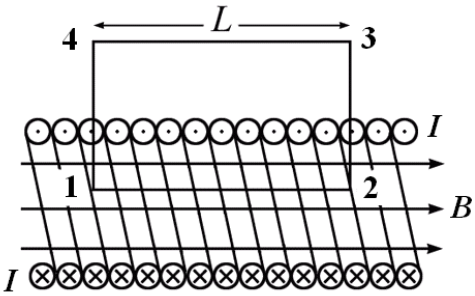


Рис.5.18

Возьмем замкнутый прямоугольный контур 1-2-3-4 (рис.5.18).

$$\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \int\limits_1^2 \underbrace{\vec{B}d\vec{l}}_{\vec{B}\uparrow\uparrow d\vec{l}} + \int\limits_2^3 \underbrace{\vec{B}d\vec{l}}_{\vec{B}\perp d\vec{l}} + \int\limits_3^4 \underbrace{\vec{B}d\vec{l}}_{B=0} + \int\limits_4^1 \underbrace{\vec{B}d\vec{l}}_{\vec{B}\perp d\vec{l}} = BL.$$

Закон полного тока: $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 N_L I.$

$$BL = \mu_0 N_L I. \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 N_L I}{L} = \mu_0 n I, \qquad (5.20)$$

n – число витков соленоида на единицу длины.

● Магнитное поле тороида.

Тороид – кольцевая катушка, витки которой намотаны на сердечник, имеющий форму тора (рис.5.19).

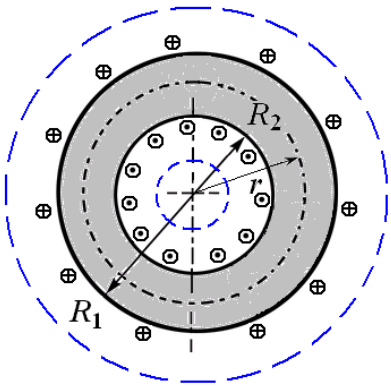


Рис.5.19

N – число витков тора,
R_1 – внешний радиус тора,
R_2 – внутренний радиус тора,
r – радиус произвольной окружности.

Так как поле тороида радиально симметрично, то на одинаковом расстоянии от его оси модуль вектора магнитной индукции $B = const$.

Рассмотрим ряд случаев:

• $r < R_2$: $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \oint\limits_L Bdl\cos\left(\angle\vec{B}, d\vec{l}\right) = \mu_0 I = 0$, т.к. окружность радиуса r не охватывает токи ($I = 0$).
$B = 0$, поле внутри тороида равно нулю.

• $r > R_1$: $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum\limits_{i=1}^{n} I_i = \mu_0\left(N \cdot I - N \cdot I\right) = 0$, $B = 0$, поле вне тороида равно нулю.

• $R_2 < r < R_1$: $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = B\oint\limits_L dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$. $\Rightarrow$ $B = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$.

Поле изменяется от $B_1 = \dfrac{\mu_0 N}{2\pi R_1} I$ до $B_2 = \dfrac{\mu_0 N}{2\pi R_2} I$ $\Rightarrow$

$$B_{cp} = \frac{\mu_0 N}{2\pi R_{cp}} I = \mu_0 nI,$$

n – число витков на единицу длины средней линии тороида.

5.9. Закон полного тока в дифференциальной форме

$rot\vec{A}$– циркуляция вектора $\vec{A}$ по контуру L, который охватывает площадь $S \to 0$ и ориентирован таким образом, чтобы эта циркуляция была максимальной (*max*).

$$\lim_{S\to 0}\frac{\oint_L \vec{A}d\vec{l}}{S}=\frac{d\oint_L \vec{A}d\vec{l}}{dS}=rot_n\vec{A}$$ – проекция вектора $rot\ \vec{A}$ на положительную нормаль $\vec{n}$ к площадке dS, охватываемой контуром L (S стремится к точке).

lim – величина скалярная и зависит от ориентации контура L в поле вектора $\vec{A}$.

Направление $rot\ \vec{A}$ совпадает с направлением вектора $\vec{n}$, когда lim принимает максимальное значение.

Циркуляция вектора характеризует свойства силового поля, усредненные по поверхности, охватываемой контуром L.

Физический смысл $rot\vec{A}$- циркуляция вектора $\vec{A}$через единичную площадку, ориентированную так, чтобы эта циркуляция была наибольшей.

$rot\vec{A}$ характеризует свойства поля в точке $S\to 0$.

$$rot\vec{A}\equiv\left[\nabla\vec{A}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{j}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\cdot\vec{k}.$$

Теорема Стокса: зная $rot\vec{A}$ в каждой точке некоторой поверхности S, можно вычислить циркуляцию этого вектора $\vec{A}$ по контуру L, ограничивающему S

$$\oint_L \vec{A}d\vec{l}=\int_S rot\vec{A}d\vec{S}.$$

Тогда $\oint_L \vec{B}d\vec{l}=\int_S rot\vec{B}d\vec{S}.$

Закон полного тока в интегральной форме: $\oint_L \vec{B}d\vec{l}=\mu_0\int_S \vec{j}d\vec{S}.$

$$\int_S rot\vec{B}d\vec{S}=\mu_0\int_S \vec{j}d\vec{S}.$$

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j}; \qquad rot\vec{H} = \vec{j}. \qquad (5.21)$$

5.10. Действие магнитного поля на проводники и контур с током. Закон Ампера

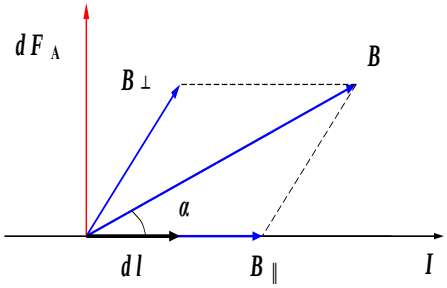


Рис.5.20

Элементарная сила $d\vec{F}$, действующая на малый элемент длины dl проводника с током, находящийся в магнитном поле индукцией $\vec{B}$, прямо пропорциональна силе тока I в проводнике и векторному произведению $\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$. $d\vec{F}_A = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$ (5.22)

Сила Ампера, действующая в магнитном поле на проводник с током конечной длины:

$$\vec{F}_A = \int_l I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right], \quad F_A = IBl\sin\alpha, \qquad (5.23)$$

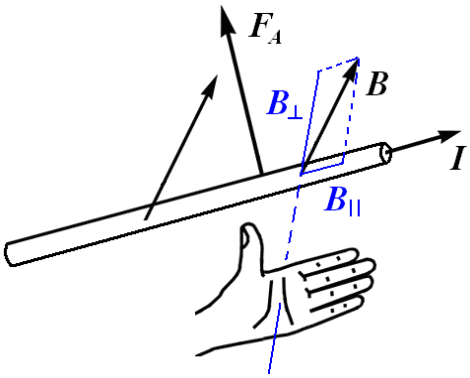


Рис.5.21

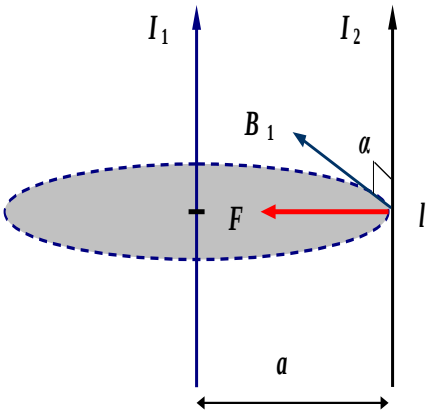
где α – угол между вектором $\vec{B}$ и вектором $d\vec{l}$, направление которого совпадает с направлением тока I.

Направление силы Ампера определяется *правилом левой руки*: если ладонь левой руки расположить таким образом, что $B\perp$ входит в ладонь, четыре выпрямленных пальца направлены по току, то большой палец, отогнутый на 90^0, указывает направление $\vec{F}_A$.

5.11. Взаимодействие параллельных токов. Основная электрическая единица СИ – Ампер

Применим закон Ампера для вычисления взаимодействия двух находящихся в вакууме параллельных бесконечно длинных прямых

Рис.5.22



токов. Параллельные токи одного направления притягиваются.

Поле бесконечного проводника:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi a} 2I_1. \\ \alpha &= 90^0, \\ F &= I_2 B_1 l \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} F &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{a} \cdot l, \\ I_1 &= I_2 = I, \qquad \mu = 1. \end{aligned}$$

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I^2}{a} l. \qquad (5.24)$$

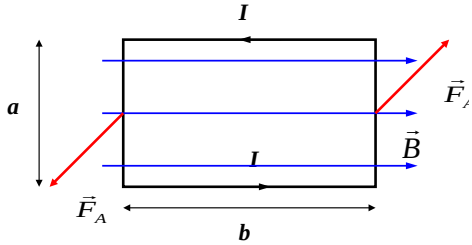
1 *Ампер* (А) – это сила такого постоянного тока, при прохождении которого по двум прямолинейным бесконечно длинным проводникам, находящихся в вакууме на расстоянии 1 метр друг от друга, сила их взаимодействия составляет $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Этот опыт является фундаментальным и позволяет выделить силы взаимодействия проводников в «чистом» виде.

Кулоновские силы в этом случае равны нулю, так как незаряженный проводник с током электронейтрален ($\rho_- = \rho_+$).

5.12. Действие магнитного поля на контур с током

● Прямолинейный контур в магнитном поле.



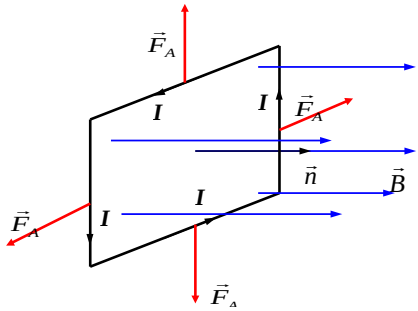


Рис.5.23

Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ находится в плоскости контура.

$F_A = IaB\sin\alpha,$

$\alpha = 90^0.$

$M = F_A \cdot b = IabB = ISB = p_m B.$

$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}].$

Контур поворачивается таким образом, что его положительная нормаль $\vec{n}$ совпадает с вектором $\vec{B}$ и останавливается в положении равновесия.

Равнодействующая всех сил, действующих на контур, равна нулю.

● Контур произвольной формы.

Выделяем участок высотой dh. Рассмотрим силы, действующие на каждую сторону трапеции.

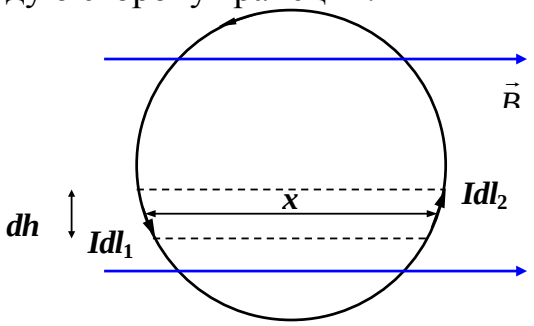
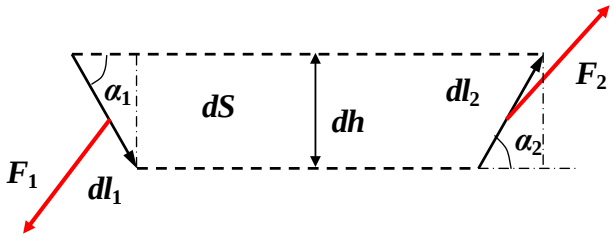


Рис.5.24



$$d\vec{F}_1 = I\left[d\vec{l}_1, \vec{B}\right], \qquad dF_1 = Idl_1 B\sin\alpha_1 = IBdh.$$

$$d\vec{F}_2 = I\left[d\vec{l}_2, \vec{B}\right], \qquad dF_2 = Idl_2 B\sin\alpha_2 = IBdh.$$

На элемент контура действует пара сил:

$$dM = dF \cdot x = IBdh \cdot x = IBdS, \qquad M = \int_S IBdS = p_m B, \qquad \vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right].$$

● Между нормалью $\vec{n}$ к контуру и вектором $\vec{B}$ угол α ($\angle\vec{B}, \vec{n} = \alpha$).

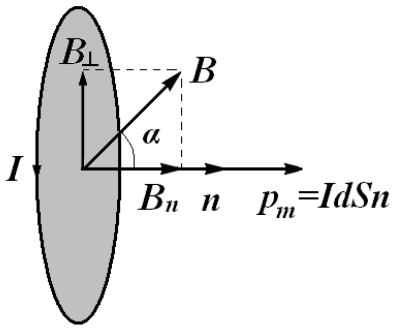


Рис.5.25

Вектор $\vec{B}$ разложим на два вектора

• B_n: $\angle\vec{B}_n, \vec{n} = 0 \Rightarrow \qquad \vec{M}_n = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right] = 0.$

• $B\perp$: $B_\perp = B\sin\alpha, \qquad M_\perp = p_m B\sin\alpha.$

В общем виде

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right]. \qquad (5.25)$$

5.13. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

Рассчитаем работу по перемещению проводника с током в магнитном поле.

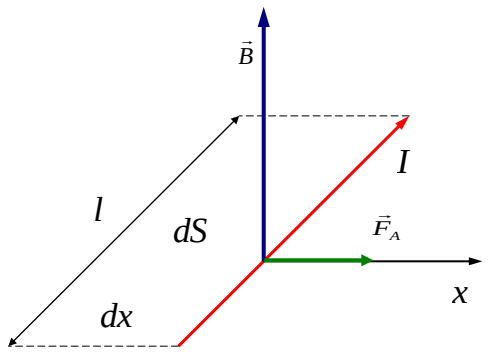


Рис.5.26

Угол между $\angle\vec{B},\vec{I} = 90^0$.

На проводник с током I в магнитном поле с индукцией B действует сила Ампера:

$F_A = IBl$.

При перемещении проводника под действием этой силы на расстояние dx совершается работа:

$$dA = F_A dx = IB\underbrace{l dx}_{dS} = I\underbrace{BdS}_{d\Phi} = Id\Phi. \qquad (5.26)$$

$d\Phi = \int\limits_S \vec{B}d\vec{S}$ – магнитный поток сквозь поверхность dS, которую очерчивает проводник при своем движении.

• Если $I = const$: $A = I\cdot\Delta\Phi$. (5.27)

• Если $B = const$: $A = \int\limits_S Id\Phi$. (5.28)

Соотношение, полученное нами для простейшего случая, остается справедливым для контура любой формы в произвольном магнитном поле.

Принцип действия электроизмерительных приборов

Действие магнитного поля на рамку с током используется в электроизмерительных приборах.

В зависимости от того, каким образом в приборах создается магнитное поле, они делятся на:

- *магнитоэлектрические* (рамка с током помещена в магнитное поле сильного подковообразного магнита, применяются для измерения постоянного тока),
- *электродинамические* (магнитное поле создается соленоидом, применяются для измерения постоянного и переменного токов).

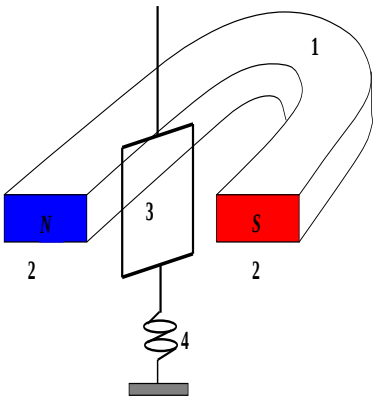


Рис.5.27

Принципиальная схема магнитоэлектрического электроизмерительного прибора.
1 – магнит,
2 – полюсные наконечники, магнитная индукция между ними B,
3 – рамка с током I, содержащая N витков, площадь рамки S,
4 – возвращающий механизм.

На рамку действует вращающий момент $M = ISNB$.
Под действием вращающего момента M рамка поворачивается на угол φ. В пределах упругой деформации: $\varphi = \alpha M$, где α – модуль закручивания. Получаем: $\varphi = \underbrace{\alpha SBN}_{\beta} I = \beta I$, β – постоянная прибора, определяемая при градуировке.

5.14. Действие магнитного поля на заряженные частицы. Сила Лоренца

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле, обусловлена действием сил на отдельные движущиеся заряды, а уже от них действие передается проводнику, по которому они перемещаются. Сила Лоренца действует на заряженные частицы, движущиеся в магнитном поле.

Закон Ампера: на элемент dl проводника с током I действует сила

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]. \qquad (5.29)$$

На одну заряженную частицу в элементе тока Idl действует сила Лоренца:

$$F_Л = \frac{dF}{dN}, \qquad (5.30)$$

где dN – число частиц в объеме проводника длиной dl.
Число частиц в объеме проводника длиной dl рассчитаем по формуле: $dN = ndV = nSdl$. Вспомним, что сила тока равна $I = jS$, а плотность тока - $j = qnv$. Тогда получим, что $Idl = jSdl = qnvSdl$. Подставив в выражение для силы, получим:

$$d\vec{F} = \left[\underbrace{Id\vec{l}}, \vec{B}\right] = \left[qn\vec{v}Sdl, \vec{B}\right] = qn\underbrace{\underbrace{Sdl}_{dV}}_{dN}\left[\vec{v}, \vec{B}\right],$$ после преобразований -

$$\vec{F}_Л = \frac{dF}{dN} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right] \qquad (5.30)$$

в скалярной форме: $F_Л = |q|vB\sin\alpha.$ (5.31)

Так как $\vec{F}_Л \perp \vec{v}$, следовательно сила Лоренца работу не совершает, не изменяет кинетическую энергию, а изменяет только направление движения заряженной частицы. Если есть и электрическое поле, то на заряд действуют две силы и результирующая сила равна

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$$ - формула Лоренца. (5.32)

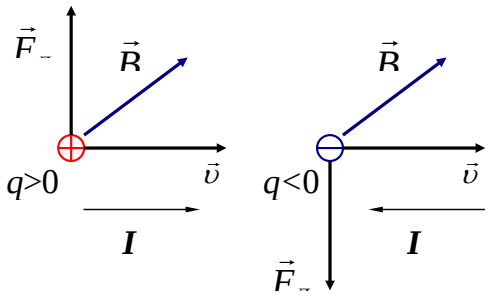
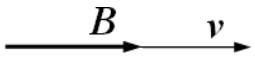


Рис.5.28

Сила Лоренца, действующая в магнитном поле на движущиеся в одном направлении положительные и отрицательные заряды, имеет противоположное направление.

5.15. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле

- Направление скорости частицы совпадает с напрвлением вектора индукции магнитного поля: $\alpha = 0^0$. $\vec{F}_Л = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right] = 0.$ Траектория движения – прямая линия.



- Между направлением скорости частицы и напрвлением вектора индукции магнитного поля угол $\alpha = 90^0$.

$$F_Л = qvB = ma_ц = \frac{mv^2}{R} \quad \Rightarrow \quad qB = \frac{mv}{R}; \quad v = \frac{qBR}{m}.$$

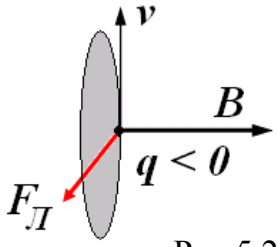


Рис.5.29

$$T = 2\pi\left|\frac{m}{q}\right| \cdot \frac{1}{B} \qquad (5.33)$$

– период обращения частицы не зависит от её скорости *v*. Траектория движения – окружность.

- Между направлением скорости частицы и напрвлением вектора индукции магнитного поля угол который изменяется в пределе $0^0 < \alpha < 90^0$.

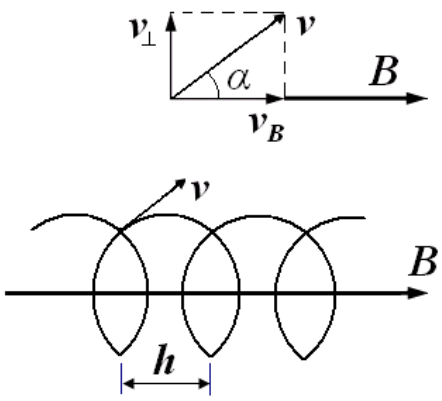


Рис.5.30

$$F_Л = qv_\perp B = \frac{mv_\perp^2}{R} \Rightarrow$$

$$qB = \frac{mv\sin\alpha}{R}; \qquad v\sin\alpha = \frac{qBR}{m}.$$

Окончательно получаем

$$T = \frac{2\pi R}{v\sin\alpha} = \frac{2\pi R \cdot m}{qBR} = 2\pi\left|\frac{m}{q}\right|\frac{1}{B}.$$

Шаг спирали, по которой вращается частица:

$$h = v_B T = \frac{2\pi}{B}\left|\frac{m}{q}\right| v\cos\alpha. \qquad (5.34)$$

Используется для экспериментального определения удельного заряда (*q/m*) и массы частицы – *масс-спектрография.*

5.16. Магнитные силы – релятивистская добавка к кулоновским силам

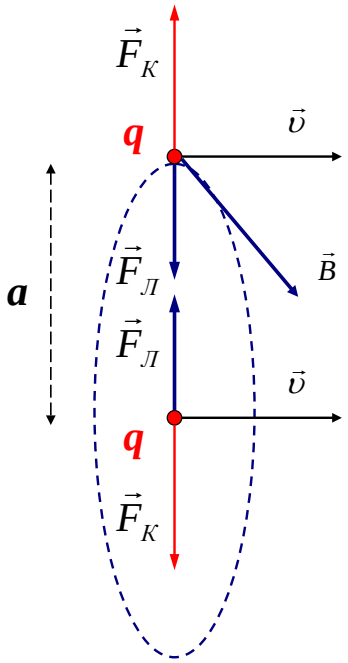


Рис.5.31

Найдем силу магнитного взаимодействия между двумя заряженными частицами q, движущимися в вакууме, и сравним их с кулоновской силой F_K.

$$F_K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}. \qquad (5.35)$$

$$\vec{F}_Л = q\left[\vec{v},\vec{B}\right]; \qquad F_Л = qvB \quad (5.36)$$

v – скорость заряженной частицы q;
B – магнитное поле, создаваемое в точке расположения первой заряженной частицы другой движущейся заряженной частицей.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q\left[\vec{v},\vec{r}\right]}{4\pi r^3}; \qquad \left|\vec{r}\right| = a; \qquad \angle\vec{v},\vec{r} = 90^0. \qquad \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 q v}{4\pi a^2}. \qquad (5.37)$$

Подставим формулу (5.37) в формулу (5.36), получим

$$F_Л = \frac{\mu_0 q^2 v^2}{4\pi a^2}. \qquad (5.38)$$

Найдем отношение силы Лоренца к силе Кулона:

$$\frac{F_Л}{F_K} = \varepsilon_0\mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2}.$$

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 4\pi 10^{-7} \approx \frac{1}{9\cdot 10^{16}}\frac{\text{с}^2}{\text{м}^2}. \qquad (5.39)$$

Модуль силы Лоренца $F_Л$ всегда меньше модуля кулоновской силы F_K. Модуль $F_Л$ стремится к F_K при $v \to c$, поэтому магнитные силы называют релятивистской добавкой к кулоновским силам.

5.17. Эффект Холла

Эффект Холла был открыт опытным путем в 1880 г. Через золотую пластину пропускался ток I; перпендикулярно боковым граням было направлено магнитное поле индукцией $\vec{B}$; между верхними гранями возникала разность потенциалов $\Delta\varphi$, величина которой была пропорциональна I, B и обратно пропорциональна ширине пластины b.
Если $B = 0$, то $\Delta\varphi = 0$.

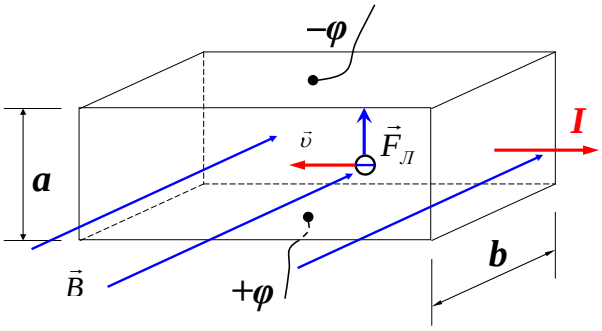


Рис.5.32

Эффект Холла – в металле или полупроводнике с током, помещенном в магнитное поле, перпендикулярное к вектору плотности тока j, возникает поперечное электрическое поле между точками, лежащими на верхней и нижней гранях пластины, с разностью потенциалов $\Delta\varphi$.
Причина – сила Лоренца.

Найдем разность потенциалов $\Delta\varphi$, сделав следующие преобразования:

$$F_Л = qvB = qE \qquad \Rightarrow E = vB$$

$$\Delta\varphi = Ea \qquad \Delta\varphi = vBa$$

$$I = jS = qnvab \qquad \Rightarrow v = \frac{I}{qnab}$$, тогда

$$\Delta\varphi = \frac{IB}{qnb} = \underbrace{\frac{1}{qn}}_{R_H\text{ – постоянная Холла}} \cdot \frac{IB}{b}.$$

В конечном виде, с учётом постоянной Холла, формула для расчёта разности потенциалов будет иметь вид

$$\Delta\varphi = R_H \frac{IB}{b}. \qquad (5.40)$$

С помощью эффекта Холла можно определить тип проводимости полупроводника и концентрацию носителей тока как в проводнике, так и в полупроводнике (если известен заряд носителей). Если $R_H < 0$, проводимость n–типа (электронный полупроводник), если $R_H > 0$, проводимость p–типа (дырочный полупроводник).

5.18. Явление электромагнитной индукции

Электрический ток создает вокруг себя магнитное поле. Следовательно, возможно и обратное явление.

Явление электромагнитной индукции – в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции ($d\Phi_B = \vec{B}d\vec{S}$), пронизывающего поверхность, натянутую на этот контур (рис.5.33), возникает электрический ток, называемый *индукционным* I_i.

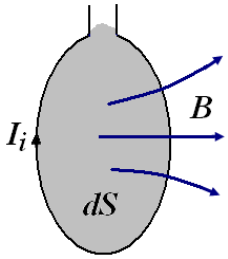


Рис.5.33

Так как в контуре возникает индукционный ток, следовательно, в цепи есть э.д.с. индукции, которая определяется только скоростью изменения магнитного поля

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \qquad (5.41)$$

Знак минус *в законе Фарадея* отражает *правило Ленца*: индукционный ток в контуре имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток.

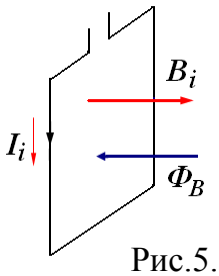


Рис.5.34

- *Увеличение потока* магнитной индукции $\frac{d\Phi_B}{dt} > 0$ вызывает $\mathcal{E}_i < 0$, т.е. поле индукционного поля B_i направлено навстречу внешнему полю, поток которого Φ_B.

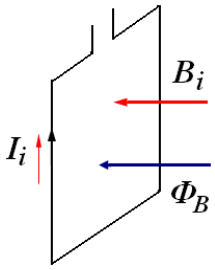


Рис.5.35

- *Уменьшение потока* магнитной индукции $\frac{d\Phi_B}{dt} < 0$ вызывает $\mathcal{E}_i > 0$, т.е. поле индукционного поля B_i совпадает с направлением внешнего поля, поток которого Φ_B.

Закон электромагнитной индукции Фарадея: элек-

тродвижущая сила электромагнитной индукции в замкнутом контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока через поверхность, натянутую на контур (1831 г.)

Закон Фарадея универсален, так как не зависит от способа изменения магнитного поля.

В системе СИ размерность э.д.с. индукции: [$\mathcal{E}_i$] = [Вб/с] = В.

$$\left[\frac{Вб}{с}\right]=\left[\frac{Тл\cdot м^2}{с}\right]=\left[\frac{Н\cdot м^2}{А\cdot м\cdot с}\right]=\left[\frac{Н\cdot м}{А\cdot с}\right]=\left[\frac{Дж}{Кл}\right]=[В].$$

5.19. Вихревое электрическое поле

Неподвижный контур находится в переменном магнитном поле. Сила Лоренца ($\vec{F}_Л = q[\vec{v}\vec{B}]$) на неподвижные заряды не действует. Для объяснения явления электромагнитной индукции необходимо считать, что переменное магнитное поле вызывает появление электрического поля – вихревого электрического поля, под действием которого и возникает индукционный ток в замкнутом проводнике. Переменное магнитное поле возбуждает в пространстве вихревое электрическое поле независимо от наличия проводящего контура. Замкнутый контур лишь позволяет обнаружить по возникновению в нем индукционного тока существование этого электрического поля (гипотеза Максвелла). Уравнение Максвелла:

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_{B_i} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \qquad (5.42)$$

Циркуляция вектора напряженности E_{Bi} индуцированного электрического поля по неподвижному проводящему контуру L равна э.д.с. электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i$. По определению ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_{стор} d\vec{l}. \qquad (5.43)$$

Напряженность результирующего поля: $E = E_{кул} + E_{стор} \quad \Rightarrow E_{стор} = E - E_{кул}$,

где $E_{кул}$ – напряженность электростатического поля,

$E_{стор}$ – напряженность поля сторонних сил. Тогда ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \left(\vec{E} - \vec{E}_{кул}\right) d\vec{l} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} - \underbrace{\oint_L \vec{E}_{кул} d\vec{l}}_{0}.$$

$\oint_L \vec{E}_{кул} d\vec{l} = 0,$ так как электростатическое поле – потенциальное.

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \neq 0. \qquad (5.44)$$

В последнем уравнении берётся частная производная по времени $\frac{\partial}{\partial t}$, так как рассматривается только возникновение э.д.с. индукции $\mathcal{E}_i$ вследствие зависимости магнитной индукции от времени (т.е. имеем неподвижный контур). $\oint_L \vec{E} d\vec{l} \neq 0,$ следовательно, электрическое поле, возбуждаемое переменным магнитным полем, – *вихревое*.

Отличие вихревого электрического поля от электростатического:

1. Силовые линии вихревого электрического поля – замкнуты.
2. Работа по перемещению единичного положительного точечного заряда в вихревом электрическом поле (циркуляция вектора $\vec{E}$) не равна нулю, а равна э.д.с. индукции $\mathcal{E}_i$.

5.20. Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме

Вспомним формулу Стокса: $\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S rot\vec{A} d\vec{S}.$ В нашем случае $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} d\vec{S}.$

Контур не изменяет форму, следовательно, операции дифференцирования и интегрирования можно поменять местами и перейти к частной производной, а именно:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \qquad \Rightarrow \oint_L \vec{E}d\vec{l} = \underbrace{\int_S rot\vec{E}d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}}.$$

Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме будет выглядеть в следующем виде

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \qquad (5.45)$$

5.21. Электронный механизм возникновения э.д.с. индукции

Рассмотрим электронный механизм возникновения э.д.с. индукции. Отрезок проводника движется в постоянном магнитном поле индукцией $\vec{B} = const$.

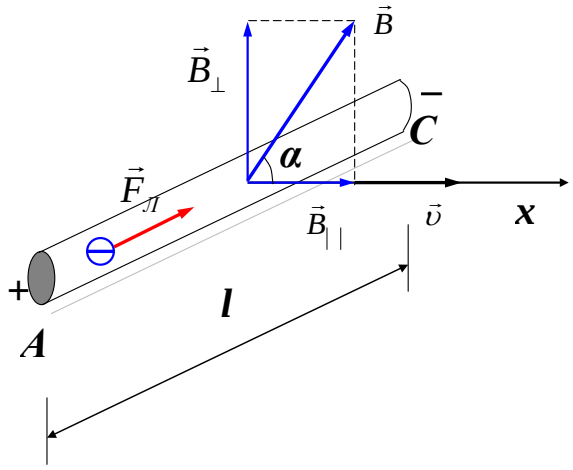


Рис.5.36

На электроны проводимости металла действует сила Лоренца: $F_Л = qvB\sin\alpha$.

Сила, действующая на электрон, отлична от нуля только в самом начале движения проводника, так как упорядоченное движение электронов вдоль проводника от ***A*** к ***C*** вызывает возникновение в проводнике электростатического поля, вектор напряженности которого направлен от ***A*** к ***C*** и препятствующего дальнейшему перераспределению электронов. При равенстве численных значений силы Лоренца и силы электростатического поля перемещение электронов по проводнику прекращается.

$$F_Л = F_{эл.стат.}; \qquad qvB\sin\alpha = qE \Rightarrow \quad E = vB\sin\alpha.$$

$$\Delta\varphi = El = vBl\sin\alpha = vB_{\perp}l.$$

$$\varphi_A - \varphi_C = \Delta\varphi = -\mathcal{E}_i; \qquad v = \frac{dx}{dt}; \;\; ldx = dS$$

$$\mathcal{E}_i = -B_{\perp}\frac{ldx}{dt} = -\frac{BdS}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

$d\Phi_B$ – поток через поверхность, очерчиваемую проводником при движении.

Сила Лоренца является причиной возникновения индукционного тока в проводящем замкнутом контуре, если контур деформируется (изменяется площадь S контура) или вращается , то есть совершает произвольное движение в магнитном поле.

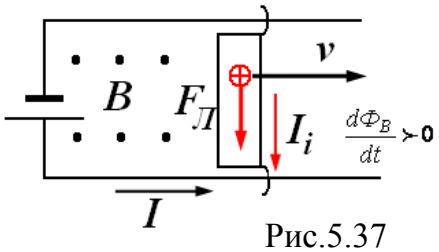


Рис.5.37

Отметим, что оба механизма возбуждения ЭДС индукции не являются по теории относительности независимыми. Пусть, например, контур движется с постоянной скоростью в неоднородном магнитном поле. В системе отсчета, связанной с контуром, сила Лоренца равна нулю, и работает первый механизм, то есть возникает вихревое электрическое поле, вызванное изменением магнитного поля в этой системе отсчета. В лабораторной системе отсчета работает второй механизм: причиной возникновения индукционного тока является сила Лоренца.

5.22. Электромагнитная индукция в технике.

Это явление положено в основу работы *генераторов переменного тока*, в которых в однородном магнитном поле (***B*** = *const*) равномерно (с угловой скоростью ω = *const*) вращается рамка

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \underbrace{BS\omega}_{\mathcal{E}max} Sin\omega t,$$

где S – площадь рамки.

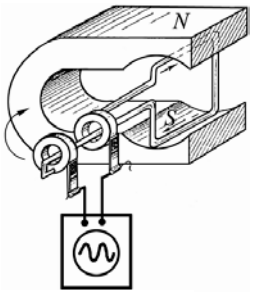


Рис.5.38

Процесс превращения механической энергии в электрическую обратим. Следовательно, если по рамке, помещенной в магнитное поле, пропускать электрический ток, то на рамку действует вращающий момент, и она начинает вращаться – *электродвигатель*.

5.23. Токи Фуко (вихревые токи)

– индукционные токи, возникающие в массивных сплошных *Токи Фуко (вихревые токи)*проводниках, помещенных в переменное магнитное поле.

Массивные проводники – поперечные размеры, которых соизмеримы с длиной проводника. В отличие от линейных проводников в массивных проводниках токи (токи Фуко) замкнуты в объёме, поэтому они называются *вихревыми*. Они подчиняются правилу Ленца, т.е. их магнитное поле направлено таким образом, чтобы противодействовать изменению магнитного потока, индуцирующего вихревые токи.

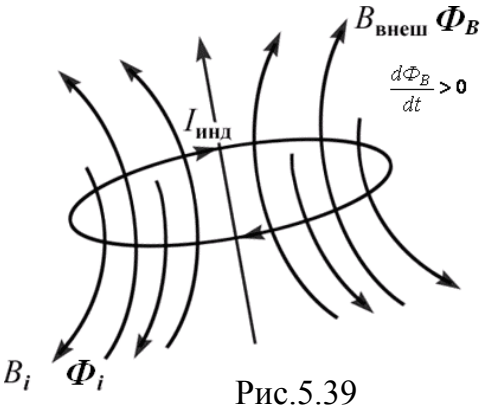


Рис.5.39

Применение.

1. Нагрев – индукционные печи.

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{S}{\rho l}.$$

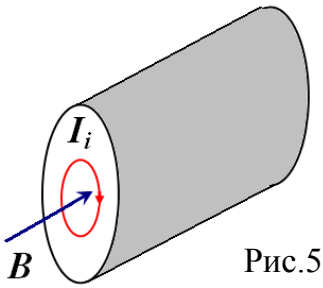


Рис.5.40

2. Торможение подвижных частей – электромагнитные успокоители.

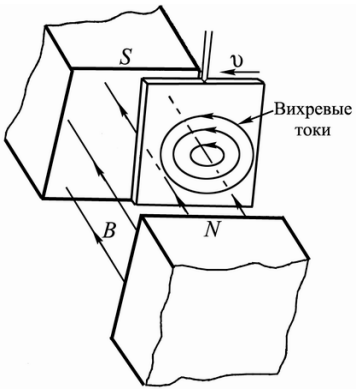
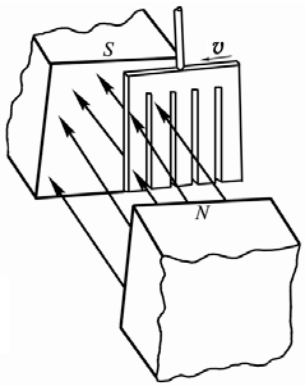


Рис.5.41



Токи Фуко, возбуждаемые в массивных проводниках при движении в магнитном поле, препятствуют изменению потока вектора

Движение медной гребенки в магнитном поле – эффект торможения вихревыми токами за счет уменьшения потоков Φ в каждой части

магнитной индукции. Происходит замедление движения – торможение пластины.

пластины уменьшается. Вихревые токи в каждой части пластины возбуждаются меньшими потоками. Индукционные токи уменьшаются, уменьшается и торможение.

Для уменьшения нагрева деталей, находящихся в переменном магнитном поле, токами Фуко, эти детали (сердечники трансформаторов, якоря генераторов):

1) делают из тонких пластин, отделенных друг от друга слоями изолятора;

2) устанавливают так, чтобы вихревые токи были направлены поперек пластин.

5.24. Явление самоиндукции. Индуктивность

Ток I, текущий в замкнутом контуре, в окружающем пространстве вокруг себя создает магнитное поле $\boldsymbol{B}$.

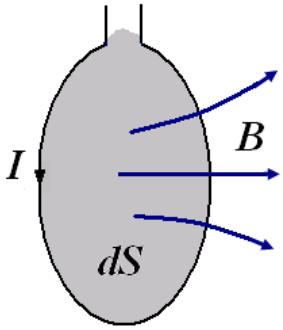


Рис.5.42

Закон Био-Савара-Лапласа: $dB = \dfrac{\mu\mu_0 I dl \sin\alpha}{4\pi r^2}$.

Поток магнитной индукции: $\Phi_B = \oint\limits_S \vec{B} d\vec{S}$.

В СИ: $[\Phi_B]$ = Вб; $[B]$ = Тл.

$\Phi \sim I$. Следовательно, $\Phi = L \cdot I$,

где коэффициент пропорциональности L называется *индуктивностью контура*. При изменении тока I в контуре изменяется создаваемое им магнитное поле и магнитный поток сквозь контур, изменяется во времени. Следовательно, в контуре индуцируется э.д.с.

$$\mathcal{E}_S = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (5.46)$$

Этот процесс называется *самоиндукцией*.

В системе СИ индуктивность измеряется в генри: $[L]$ = Гн = Вб/А = В·с/А.

• Э.д.с. индукции $\mathcal{E}_i$ создается внешним магнитным полем.

• Э.д.с. самоиндукции $\mathcal{E}_S$ создается при изменении собственного магнитного поля.

В общем случае индуктивность контура L зависит от
1) геометрической формы контура и его размеров,
2) магнитной проницаемости среды, в которой находится контур.

В электростатике аналогом индуктивности является электроемкость C уединенного проводника, которая зависит от формы, размеров, диэлектрической проницаемости ε среды.

Закон Фарадея для самоиндукции:

$$\mathcal{E}_S = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I \underbrace{\frac{dL}{dt}}_{\substack{0,\,если \\ L=const}} \right) = -L\frac{dI}{dt}. \qquad (5.47)$$

Здесь $L = const$, если магнитная проницаемость μ среды и геометрические размеры контура постоянны. Знак «минус» в законе Фарадея в соответствии с правилом Ленца означает, что наличие индуктивности L приводит к замедлению изменения тока I в контуре.

• Если ток I возрастает, то $dI/dt > 0$ и, соответственно, $\mathcal{E}_S < 0$, т.е. ток самоиндукции I_S направлен навстречу току I внешнего источника и замедляет его нарастание.

• Если ток I убывает, то $dI/dt < 0$ и, соответственно, $\mathcal{E}_S > 0$, т.е. ток самоиндукции I_S имеет то же направление, что и убывающий ток I внешнего источника и замедляет его убывание.

Таким образом, если контур обладает определенной индуктивностью L, то любое изменение тока I тормозится тем сильнее, чем больше L контура, т.е. контур обладает *электрической инертностью*.

Индуктивность соленоида

На примере длинного соленоида покажем, что индуктивность L зависит только от геометрических размеров контура и магнитной проницаемости μ среды.

$$L = \frac{\Phi_N}{I} = \frac{N\Phi}{I}, \qquad (5.48)$$

где Φ_N – поток магнитной индукции через N витков, $\Phi = BS$ - магнитный поток сквозь площадку S, ограниченную одним витком. Поле соленоида:

$$B = \mu\mu_0 nI = \mu\mu_0 \frac{N}{l} I, \qquad (5.49)$$

где l – длина соленоида, $n = N / l$ – число витков на единицу длины соленоида.

С учетом (5.49) уравнение (5.48) представим в виде:

$$L = \frac{N\mu\mu_0 NIS}{lI} = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l} = \frac{\mu\mu_0 N^2 Sl}{l^2} = \mu\mu_0 n^2 V. \qquad (5.50)$$

5.25. Экстратоки замыкания и размыкания

По правилу Ленца при включении и выключении тока в цепи, содержащей индуктивность L, возникает ток самоиндукции I_S, направленный так, чтобы препятствовать изменению тока I в цепи.

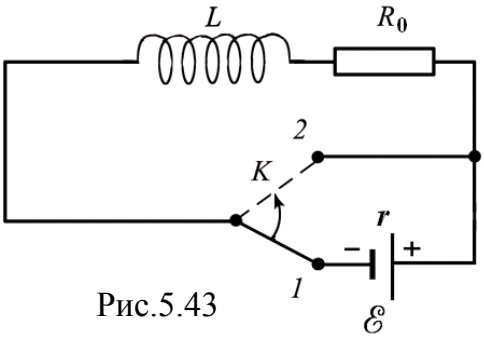


Рис.5.43

Ключ K в положении *1*:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad R = R_0 + r.$$

Ключ K в положении *2 (размыкание цепи)* :

Возникает э.д.с. самоиндукции $\mathcal{E}_S$ и обусловленный ею ток

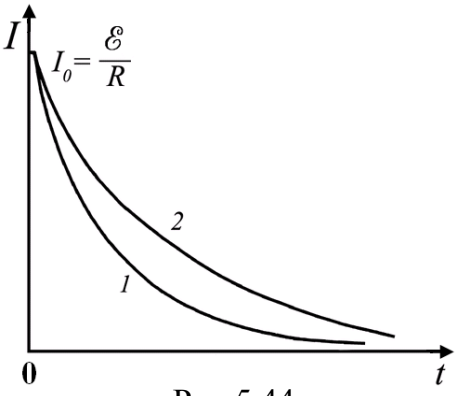


Рис.5.44

$$I_S = \frac{\mathcal{E}_S}{R} = -\frac{1}{R} L \frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt \quad \Rightarrow$$

$$\ln I \Big|_{I_0}^{I} = -\frac{R}{L} t \quad \Rightarrow I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

$\tau = \dfrac{L}{R}$ - постоянная, называемая *временем релаксации* – время, в течение которого сила тока I уменьшается в e раз:

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (5.51)$$

Чем больше L, тем больше τ, и тем медленнее уменьшается ток I. На рисунке $\tau_2 > \tau_1$.

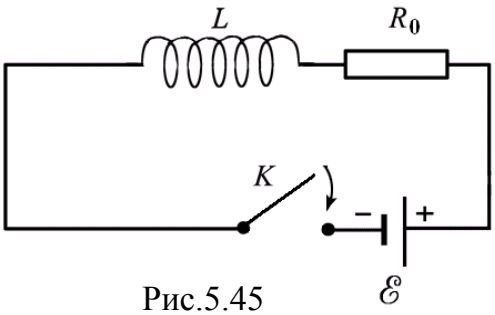


Рис.5.45

При *замыкании цепи* помимо внешней э.д.с. $\mathcal{E}$ возникает э.д.с. самоиндукции $\mathcal{E}_S$.

Следовательно, ток в цепи будет равен

$$\left.\begin{array}{l} I = \dfrac{\mathcal{E}+\mathcal{E}_s}{R} = \dfrac{\mathcal{E} - L\dfrac{dI}{dt}}{R} = \underbrace{I_0}_{\mathcal{E}/R} - \dfrac{L}{R}\dfrac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \dfrac{dI}{I-I_0} = -\dfrac{R}{L}dt \\ \textit{Замена переменных}: \quad I - \underbrace{I_0}_{const} = \underbrace{a}_{переменная} \Rightarrow dI = da \end{array}\right\} \quad \int_{a_0}^{a}\frac{da}{a} = \int_0^t -\frac{1}{\tau}dt \quad \Rightarrow$$

В момент замыкания $t = 0$ сила тока $I = 0$, переменная $a_0 = -I_0$, в момент времени t сила тока I, переменная $a = I - I_0$

$$\ln a\Big|_{a_0}^{a} = -\frac{t}{\tau}\Big|_0^t \quad \Rightarrow \ln(I - I_0)\Big|_0^I = -\frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \ln\frac{I-I_0}{-I_0} = -\frac{t}{\tau}.$$

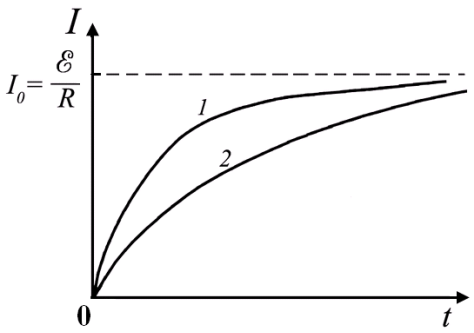


Рис.5.46

$$\frac{I-I_0}{-I_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}; \qquad I - I_0 = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}};$$

$$I = I_0 - I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \qquad (5.52)$$

I_0 – установившийся ток ($I_0 = \mathcal{E}/R$).

Установление тока происходит тем быстрее, чем меньше индуктивность цепи L и больше её сопротивление R ($\tau = \dfrac{L}{R}$).

На рисунке $\tau_2 > \tau_1$.

Поскольку сопротивление батареи r обычно мало, то можно считать, что $R \approx R_0$, где R_0 – сопротивление цепи без учета сопротивления источника ЭДС. Установившийся ток $I_0 = \mathcal{E}/R_0$.

При *отключении источника* э.д.с. *(размыкание цепи)* ток изменяется по закону

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\mathcal{E}}{R_0} e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (5.53)$$

Величина э.д.с. самоиндукции равна

$$\mathcal{E}_S = -L\frac{dI}{dt} = \frac{R}{R_0}\mathcal{E} e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (5.54)$$

Если цепь переключается на очень большое внешнее сопротивление R, например, происходит разрыв цепи ($R >> R_0$), то $\mathcal{E}_S$ может стать огромным и образуется вольтова дуга между разомкнутыми концами выключателя. В цепи, обладающей большой индуктивностью, $\mathcal{E}_S$ может оказаться больше э.д.с. источника $\mathcal{E}$, включенного в цепь, что может привести к пробою изоляции и выходу из строя оборудования. Поэтому сопротивление в контур *надо вводить постепенно*, уменьшая величину отношения dI/dt.

5.26. Взаимная индукция

Рассмотрим два контура.

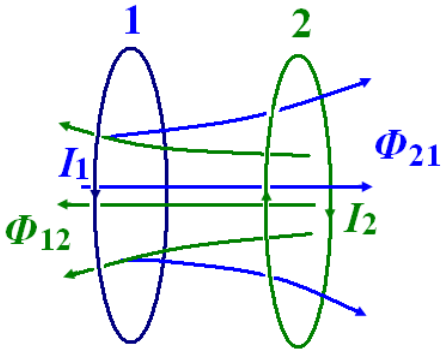


Рис.5.47

По первому контуру течет ток I_1, магнитный поток, образованный контуром 1, пронизывает контур 2:

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1,$$

L_{21} – коэффициент пропорциональности.

Если I_1 изменяется, то в контуре 2 индуцируется э.д.с., которая в соответствии с законом Фарадея равна

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}.$$

Аналогично, если в контуре 2 изменяется I_2, то в первом контуре изменение магнитного потока $\Phi_{12} = L_{12} I_2$ индуцирует э.д.с.:

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}.$$

Явление возникновения э.д.с. в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется *взаимной индукцией*. Коэффициенты $L_{12} = L_{21}$ – *взаимная индуктивность* контуров зависит от:

1. геометрической формы,
2. размеров,
3. взаимного расположения,
4. магнитной проницаемости среды μ.

Для двух катушек на общем тороидальном сердечнике

$$L_{12} = L_{21} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2 S}{l},$$

N_1, N_2 – число витков первого и второго контура, соответствен,
l – длина сердечника (тороида) по средней линии,
S – сечение сердечника.

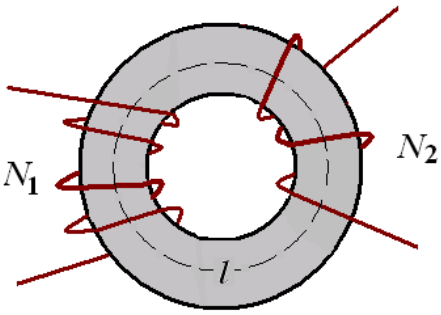


Рис.5.48

На явлении взаимной индукции основан принцип действия трансформатора. *Трансформатор* – устройство, состоящее из двух и более катушек, намотанных на один общий сердечник. Служит для повышения или понижения напряжения переменного тока:

$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} = K$ – коэффициент трансформации.

$K > 1$ – повышающий трансформатор.
$K < 1$ – понижающий трансформатор.

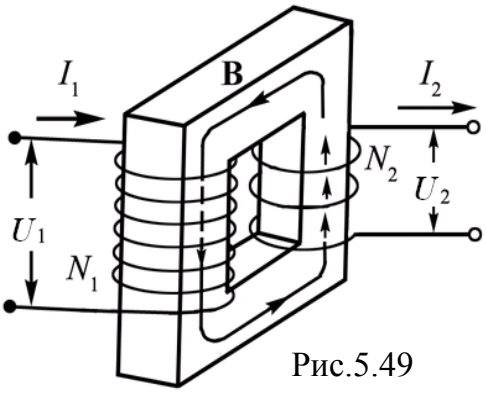


Рис.5.49

Конструктивно трансформаторы выполняют так, чтобы магнитное поле почти полностью было сосредоточено в сердечнике.

В большинстве трансформаторов вторичная обмотка наматывается поверх первичной обмотки.
Автотрансформатор – трансформатор, состоящий из одной обмотки.

Повышающий: 1-2 U подводится,
1-3 U снимается.
Понижающий: 1-3 U подводится,
1-2 U снимается.

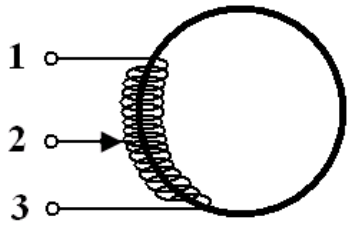
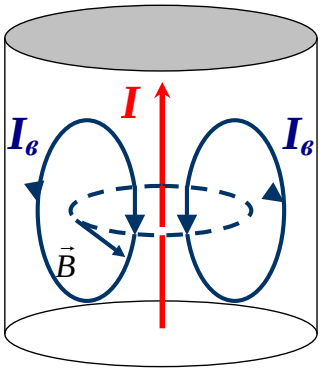


Рис.5.50

Скин–эффект

При прохождении переменного тока по проводнику внутри проводника магнитное поле изменяется. Изменяющееся во времени магнитное поле порождает в проводнике *вихревые токи самоиндукции*.



$dI/dt > 0$
Рис.5.51

Плоскости вихревых токов в случае цилиндрического проводника проходят через ось проводника.
По правилу Ленца, вихревые токи препятствуют изменению основного тока внутри проводника и способствуют его изменению вблизи поверхности.
Следовательно, для переменного тока сопротивление внутри проводника больше сопротивления на поверхности ($R_{внутри} > R_{поверх}$).
По этой причине плотность переменного тока неодинакова по сечению: j_{max} на поверхности,
j_{min} внутри на оси.

Это явление называется *скин–эффектом*. Следствием скин–эффекта является то, что ВЧ - токи текут по тонкому поверхностному слою, поэтому проводники для ВЧ - токов них делают полыми, а часть внешней поверхности покрывают серебром. Применение: метод поверхностной закалки металлов, у которых при нагреве токами высокой частоты происходит разогрев только поверхностного слоя.

5.27. Энергия магнитного поля. Объемная плотность энергии магнитного поля

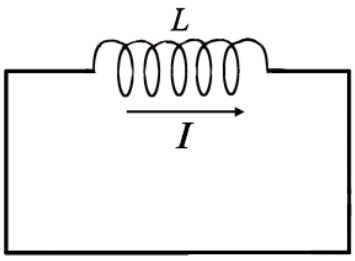


Рис.5.52

Энергия магнитного поля равна работе, которая затрачивается током на создание этого поля. Контур индуктивностью L, по которому течет ток I. Работа, обусловленная индукционными явлениями

$$dA = \mathcal{E}_s \underbrace{Idt}_{dq} = -L\frac{dI}{dt}Idt = -LIdI.$$

Работа dA затрачивается на изменение магнитного потока на величину $d\Phi$. Работа по созданию магнитного потока Φ:

$$A = W = \int dA = \int_0^I LIdI = \frac{LI^2}{2}. \qquad (5.55)$$

Объемная плотность энергии: $$\omega_H = \frac{W}{V}. \qquad (5.56)$$

Найдем ω_H на пример длинного соленоида, магнитное поле которого однородно и сосредоточено внутри.

$$\left.\begin{aligned} &L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l}. \\ &B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l} \quad \Rightarrow I = \frac{Bl}{\mu\mu_0 N} \\ &B = \mu\mu_0 H. \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l}\frac{B^2 l^2}{\mu^2 \mu_0{}^2 N^2} = \\ &= \frac{B^2}{2\mu\mu_0}\cdot V = \frac{BH}{2}\cdot V. \end{aligned}$$

Следовательно, энергия распределена в соленоиде с постоянной объемной плотностью

$$\omega_H = \frac{W}{V} = \frac{BH}{2}. \qquad (5.57)$$

Для электрического поля

$$\omega_E = \frac{ED}{2}. \qquad (5.58)$$

Тема 6
МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

6.1.Магнитное поле в веществе

Экспериментальные результаты показывают, что магнитное поле в веществе зависит от свойств вещества (μ).

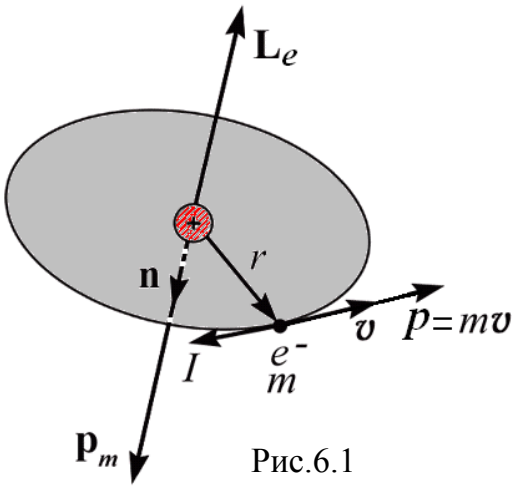


Рис.6.1

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \qquad (6.1)$$

$\vec{B}$ – вектор индукции магнитного поля [Тл],

$\vec{H}$, – вектор напряженности магнитного поля [А/м],

μ_0 – магнитная константа, равная $4\pi\cdot10^{-7}$ [Н/А^2; Гн/м],

μ – магнитная проницаемость вещества.

Для качественного объяснения этого явления считаем, что электрон движется в вакууме по круговой орбите. Движение электрона по орбите вокруг ядра рассматривается как круговой ток

$$I = \frac{q}{t} = \frac{e}{T} = e\cdot f, \qquad (6.2)$$

где f - частота вращения электрона по орбите.

● Круговой ток характеризуется *орбитальным магнитным моментом*

$$\vec{p}_m = IS\vec{n} = ef\vec{S}, \quad \vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{n}. \qquad (6.3)$$

S – площадь орбиты, $\vec{n}$ – положительная нормаль к S, направление которой определяется правилом буравчика.

● Движущийся по круговой орбите электрон обладает *орбитальным механическим моментом* импульса

$$L_e = \underbrace{mv}_{p}r = \begin{pmatrix} v = \dfrac{2\pi r}{T} = 2\pi r\cdot f; \\ S = \pi r^2 \end{pmatrix} = 2mfS. \qquad (6.4)$$

$$\vec{L}_e = [\vec{r}, \vec{p}] \quad \Rightarrow \vec{p}_m \uparrow\downarrow \vec{L}_e$$ – направлены в разные стороны.

Из уравнений следует

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m}\vec{L}_e, \qquad (6.5)$$

$g = -\dfrac{e}{2m}$ – *гиромагнитное отношение орбитальных магнитного и механического моментов*.

● В квантовой механике показано, что кроме орбитальных моментов $\boldsymbol{p_m}$, $\boldsymbol{L_e}$ электрон обладает *собственным механическим моментом* импульса $\boldsymbol{L_{es}}$, называемым *спином*.

● Спину электрона соответствует *спиновый (собственный) магнитный момент*

$$\vec{p}_{ms} = g_s \vec{L}_{es}, \qquad (6.6)$$

$g_s = -\dfrac{e}{m}$ – *гиромагнитное отношение спиновых моментов*. $\Rightarrow \vec{p}_{ms} \uparrow\downarrow \vec{L}_{es}$.

Магнитный момент электрона складывается из орбитального магнитного момента p_m и спинового магнитного момента p_{ms}

$$\vec{p}_{e^-} = \vec{p}_m + \vec{p}_{ms}. \qquad (6.7)$$

Магнитный момент атома складывается из магнитных моментов входящих в атом электронов и магнитного момента ядра $\boldsymbol{p_я}$, который складывается из магнитных моментов протонов и нейтронов

$$\vec{p}_я = \vec{p}_{протонов} + \vec{p}_{нейтронов} << \vec{p}_{e^-} \quad \Rightarrow \vec{p}_я - пренебрегаем. \quad \Rightarrow$$

$$\vec{p}_{ат} = \vec{p}_я + \sum \vec{p}_{e^-} = \sum \vec{p}_m + \sum \vec{p}_{ms}. \qquad (6.8)$$

6.2.Диамагнетики. Парамагнетики

Все известные вещества под действием магнитного поля способны приобретать магнитный момент (намагничиваться). В связи с этим их называют *магнетиками.*

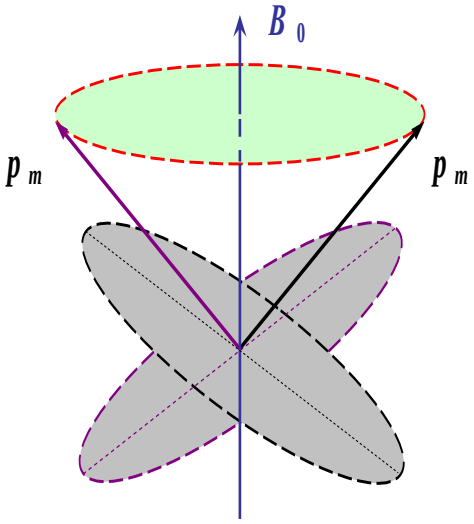


Рис.6.2

Пусть орбита электрона, движущегося в атоме по круговой орбите, ориентирована относительно вектора магнитной индукции B_0 так, что магнитный момент p_m составляет с вектором B_0 угол α.

Магнитное поле B_0 действует на магнитный момент электрона таким образом, что происходит вращение орбиты электрона и вектора p_m вокруг B_0 с некоторой угловой скоростью ω.

Такое движение называется *прецессией*.

Следовательно, электронная орбита атома под действием магнитного поля $\boldsymbol{B_0}$ совершает прецессионное движение, что эквивалентно появлению кругового тока, который индуцирует дополнительное магнитное поле. Индуцированные магнитные поля всех атомов (молекул) складываются и образуют *собственное магнитное поле* вещества. *По правилу Ленца* собственное магнитное поле вещества направлено противоположно внешнему полю и ослабляет его. Эффект ослабления внешнего магнитного поля магнитным полем, индуцированным в атоме, называется *диамагнитным*, а вещества, в которых он наблюдается – *диамагнетиками* (*Bi, Ag, Au, Cu, органические вещества*). В отсутствие внешнего магнитного поля диамагнетики *немагнитны*, т.к. магнитные моменты электронов взаимно компенсируются и

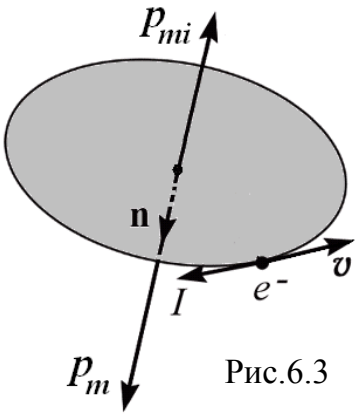


Рис.6.3

$$\vec{p}_{am} = 0 \qquad \Rightarrow \sum \vec{p}_{am} = 0.$$

Диамагнитный эффект объясняется действием внешнего магнитного поля на электроны атомов вещества, поэтому присущ всем веществам.
Но существуют и *парамагнетики* – вещества (*Pt, Al*), намагничивающиеся во внешнем магнитном поле B_0 по направлению B_0.

• *В отсутствие внешнего магнитного поля* у парамагнетиков магнитные моменты электронов взаимно не компенсируются, поэтому

$$\vec{p}_{атомов(молекул)} \neq 0, \qquad но \qquad \sum \vec{p}_{ат} = 0,$$

т.к. из-за теплового движения атомов (молекул) магнитные моменты атомов (молекул) ориентированы хаотично. Поэтому в отсутствие внешнего магнитного поля парамагнетики *немагнитны*.

• *Во внешнем магнитном поле* у парамагнетика магнитные моменты атомов ориентируются по полю, следовательно, парамагнетик *намагничивается*, т.е. создает свое дополнительное магнитное поле, которое по направлению совпадает с внешним магнитным полем и усиливает его – это *парамагнитный эффект*. Диамагнитный эффект возникает и в парамагнетиках, но он гораздо слабее парамагнитного эффекта. Электрическое поле: ориентационная (дипольная) поляризация.

6.3.Намагниченность

Намагниченность – магнитный момент единицы объема магнетика

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{\sum \vec{p}_{ат}}{V}, \qquad \left[\frac{А \cdot м^2}{м^3} = \frac{А}{м}\right] \qquad (6.9)$$

где $\vec{P}_m = \sum \vec{p}_{ат}$ – магнитный момент магнетика, $p_{ат}$ – магнитный момент отдельных атомов (молекул).

Магнитное поле в веществе:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{микроI}, \qquad (6.10)$$

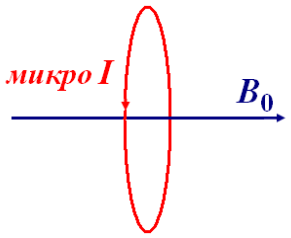


Рис.6.4

где B_0 – внешнее магнитное поле (создается током в вакууме), $B_{микроI}$ – поле, создаваемое микротоками (молекулярными токами) в веществе.
$S_{микроI} \perp B_0$.

У диамагнетиков магнитный момент микротоков $\vec{p}_m \uparrow\downarrow \vec{B}_0$. У парамагнетиков $\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{B}_0$.

Рассмотрим сечение цилиндрического магнетика перпендикулярное внешнему магнитному полю B_0 (рис.6.5).

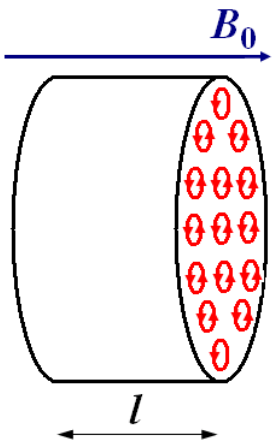


Рис.6.5

Внутри магнетика микротоки соседних атомов направлены навстречу друг другу. Поэтому они взаимно компенсируются. Нескомпенсированными остаются микротоки, выходящие на боковую поверхность. Следовательно, микроток на боковой поверхности магнетика подобен току в соленоиде.

$$B_{микроI} = B_{соленоида} = \frac{\mu_0 I_{микро} N}{l} = \frac{\mu_0 I_{микро}}{l}$$

$N = 1,$

l – *длина соленоида.*

$\frac{I_{микро}}{l}$ – ток (микроток), приходящийся на единицу длины цилиндрического магнетика (линейная плотность).

Магнитный момент микротока:

$$p_m = IS = \frac{I_{микро} Sl}{l} = \frac{I_{микро} V}{l} = \frac{B_{микроI} V}{\mu_0} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} B_{микроI} &= \frac{\mu_0 p_m}{V} = \mu_0 J. \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}_{микроI}. \end{aligned}\right\}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{J}\right). \qquad (6.11)$$

В слабых полях намагниченность $J = \chi H$, χ - *магнитная восприимчивость вещества* (безразмерная величина).

• *Диамагнетики*: $\chi < 0$, по правилу Ленца поле микротоков противоположно внешнему полю B_0.

• *Парамагнетики*: $\chi > 0$, поле микротоков совпадает с внешним полем B_0 (рис.6.6)

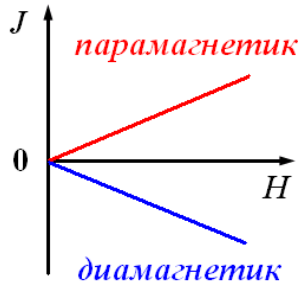


Рис.6.6

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{J} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\chi\vec{H} = \mu_0\underbrace{(1+\chi)}_{\mu}H = (1+\chi)\vec{B}_0, \qquad (6.12)$$

μ – магнитная проницаемость вещества.

• *Диамагнетики*: $\mu < 1$.

• *Парамагнетики*: $\mu > 1$.

6.4.Закон полного тока для магнитного поля в веществе

Закон полного тока для магнитного поля в веществе является обобщением закона: $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\left(\sum I + \sum I_{микро}\right)$, где ΣI – алгебраическая сумма макротоков (токов проводимости), $\Sigma I_{микро}$ – алгебраическая сумма молекулярных токов (микротоков). Циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнотому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости и молекулярных токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную. Вектор B, таким образом характеризует результирующее поле, созданное как макроскопическими токами в проводниках, так и микроскопическими токами в магнетиках, поэтому линии вектора магнитной индукции не имеют источников и являются замкнутыми. Алгебраическая сумма молекулярных токов равна циркуляции намагниченности. А именно, $\sum I_{микро} = \oint\limits_L \vec{J}d\vec{l}$.

Тогда закон полного тока для магнитного поля в веществе можно записать также в виде $\oint\limits_L \underbrace{\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}\right)}_{H} d\vec{l} = \sum I$, где I, алгебраическая сумма токов проводимости. Выражение, стоящее в скобках есть не что иное, как введенный ранее вектор напряженности магнитного поля. Итак, циркуляция вектора H по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром:

$$\oint\limits_L \vec{H}d\vec{l} = \sum I. \qquad (6.13)$$

Выражение (6.13) представляет собой теорему о циркуляции вектора *H*.

6.5.Ферромагнетики

Помимо рассмотренных двух классов веществ, существуют *сильномагнитные* вещества, обладающие спонтанной намагниченностью, т.е. намагниченностью без внешнего магнитного поля (*Fe, Co, Ni*).

• Функциональная зависимость $J = f(H)$ - нелинейная с насыщением (рис.6.7). Насыщение возникает, когда все молекулярные магнитные моменты сориентируются по внешнему магнитному полю.

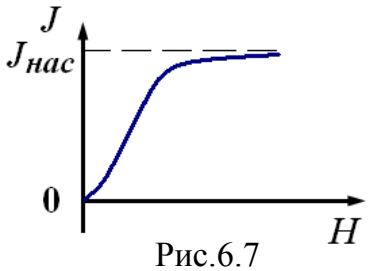


Рис.6.7

• У ферромагнетиков большое значение магнитной проницаемости $\mu >> 1$.

• Нелинейная зависимость магнитной проницаемости μ от величины внешнего магнитного поля ***H***: $\mu = f(H)$. В слабых полях μ растет с ростом ***H***, достигает максимума, затем начинает уменьшаться и в сильных полях стремится к 1. $\mu = f(H)$ - *кривая Столетова* (рис.6.8).

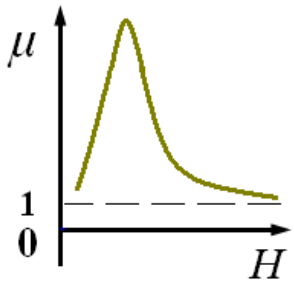


Рис.6.8

• Ферромагнетики характеризуются *точкой Кюри* – при определенной температуре теряют свои магнитные свойства.

Большая величина намагниченности ферромагнетиков объясняется сильным взаимодействием *спиновых магнитных моментов* электронов ($\boldsymbol{p}_{ms}$), в результате которого происходит *упорядочение* ориентации $\boldsymbol{p}_{ms}$ атомов в решетке. Весь ферромагнетик разбивается на области самопроизвольной намагниченности до полного насыщения намагниченности ***J*** в них. Эти области называются доменами (рис.6.9). Их линейные размеры порядка 10^{-2} см.

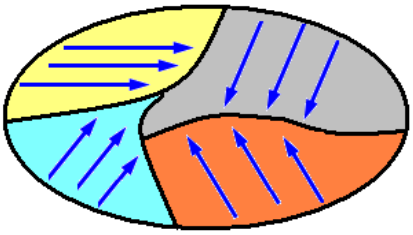


Рис.6.9

▪ В отсутствие внешнего магнитного поля намагниченность доменов ***J*** направлена хаотично, поэтому

$$\vec{J}_{ферромагнетика} = \sum \vec{J}_{доменов} = 0.$$

▪ При внесении ферромагнетика во внешнее магнитное поле происходит 1) изменение направлений спонтанной намагниченности отдельных доменов и всего магнетика в целом в результате поворота векторов магнитного момента $\boldsymbol{p}_m$ внутри доменов по полю,

2) смещение границ доменов, что приводит к росту объема доменов, у которых намагниченность ориентирована наиболее близко к направлению внешнего магнитного поля, за счет соседних доменов. В результате этого:

1. Намагниченность ферромагнетика растет от 0 до насыщения $\boldsymbol{B}_{нас}$.

2. При уменьшении внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}$ до нуля ферромагнетик остается намагниченным – $\boldsymbol{B}_{ост.\ намагниченность}$. Это происходит, потому что тепловое движение не способно быстро дезориентировать магнитные моменты таких крупных образований как домены.

С наличием $\boldsymbol{B}_{ост.}$ связано существование *постоянных магнитов*.

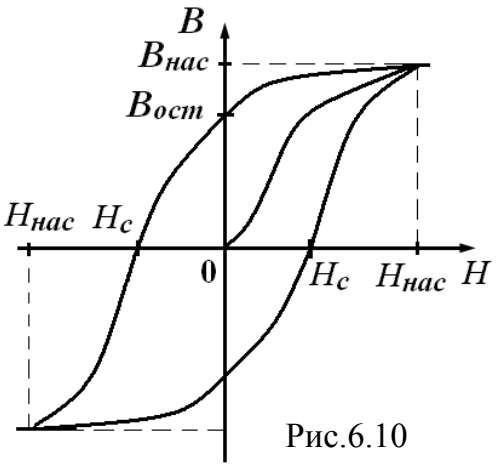


Рис.6.10

3. Для того чтобы размагнитить ферромагнетик необходимо поместить его в поле противоположной полярности. Намагниченность обращается в нуль под действием поля $\boldsymbol{H}_c$ – называемого *коэрцетивной силой*. Если $\boldsymbol{H}_c$ – *мала*, магнетик *магнитомягкий*, если $\boldsymbol{H}_c$ – *велика*, магнетик *жесткий*.

4. При дальнейшем увеличении напряженности противоположного поля ферромагнетик перемагничивается и при $\boldsymbol{H}_{нас}$ достигает насыщения. Затем ферромагнетик можно опять размагнитить, т.о. при действии на ферромагнетик переменного магнитного поля его намагниченность $\boldsymbol{J}$ и индукция $\boldsymbol{B}$ изменяются в соответствии с замкнутой кривой – *петля гистерезиса*. Площадь петли пропорциональна работе, совершенной при перемагничивании. Эта работа определяет потери энергии на гистерезис $\oint HdB$. Так как во внешнем магнитном поле внутри ферромагнетика происходит перестройка его структуры (смещение и поворот границ доменов), следовательно, это приводит к изменению его размеров.

Явление магнитострикции – изменение формы и объёма ферромагнетика при его намагничивании. Обратный эффект – изменение намагниченности при деформации ферромагнетика.

Тема 7
УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

7.1. Электромагнитная теория Максвелла (60-е годы 19 века)

Теория Максвелла это последовательная теория единого электромагнитного поля, создаваемого произвольной системой зарядов и токов. В ней решается *основная задача электродинамики*: по заданному распределению зарядов и токов отыскиваются основные характеристики создаваемых ими электрических и магнитных полей. Это *феноменологическая теория*, т.е. она не рассматривает механизмы явлений, происходящих в среде и вызывающих появление полей. Электрические и магнитные свойства среды характеризуются: ε – относительной диэлектрической проницаемостью, μ – относительной магнитной проницаемостью,σ – удельной электрической проводимостью.

В теории Максвелла рассматриваются *макроскопические поля*, которые:

- создаются макроскопическими зарядами и токами, сосредоточенными в объемах много больших, чем объем атомов и молекул,
- расстояние от источников полей до рассматриваемой точки пространства много больше размеров атомов и молекул,
- период изменения переменных электрических и магнитных полей много больше периода внутримолекулярных процессов.

Макроскопические заряды и токи являются совокупностью *микроскопических зарядов и токов*, которые создают свои *микрополя*, непрерывно изменяющиеся во времени в каждой точке пространства.

Макроскопические поля являются усредненными микрополями

• по интервалам времени много большим, чем периоды внутриатомных процессов и

• по объемам много большим, чем объем атомов и молекул.

Теория Максвелла – теория *близкодействия*, т.е. электромагнитное взаимодействие происходит с конечной скоростью, равной скорости света *c*. Вся совокупность законов электромагнетизма может быть представлена в виде системы уравнений, известной как система уравнений Максвелла.

7.2. Основные положения теории Максвелла

1.Переменное магнитное поле порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле.

2. Переменное электрическое поле порождает в окружающем пространстве магнитное поле.

Вихревое электрическое поле

Из закона Фарадея следует, что любое изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции приводит к возникновению электро-

движущей силы индукции и вследствии этого появляется индукционный ток. Следовательно, возникновение э.д.с. электромагнитной индукции возможно и в неподвижном контуре, находящемсяв переменном магнитном поле. Циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному замкнутому контуру L взятой с обратным знаком равна скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность натянутую на контур.

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \qquad (7.1)$$
$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Фарадей обнаружил, что переменное магнитное сквозь замкнутый проводящий контур, приводит к возникновению в нем индукционного тока. Максвелл предположил, что уравнение (7.1) справедливо не только для проводящего контура, но и для любого замкнутого контура в пространстве. Следовательно, контур служит индикатором вихревого электрического поля, которое существует независимо от того находится в этом поле проводящий контур или нет.

Ток смещения

Согласно закону полного тока для магнитного поля в веществе: $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum I + \sum I_{микро} \right)$, где ΣI – алгебраическая сумма макротоков (токов проводимости), $\Sigma I_{микро}$ – алгебраическая сумма молекулярных токов (микротоков), циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнотому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости и молекулярных токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную. Электрический ток порождает магнитное поле. Максвелл предположил, что переменное электрическое поле подобно электрическому току порождает магнитное поле, и ввел понятие *ток смещения*. Постулируется: линии тока проводимости на границах обкладок конденсатора переходят в линии тока смещения. Распишем, используя физические формулы:

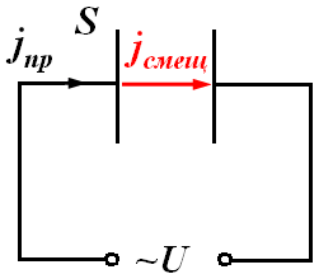


Рис.7.1

$$j_{пр} = j_{см} \quad (7.1)$$

$$j_{пр} = \frac{I}{S} \qquad (7.2)$$

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad (7.3)$$

Уравнение (7.3) показывает, как увеличивается заряд q на обкладках конденсатора C. Заряд на обкладках конденсатора

$$q = \sigma S. \qquad (7.4)$$

Следовательно, ток в цепи $I = S\dfrac{d\sigma}{dt}$. (7.5)

С учетом уравнений (7.1), (7.2) получаем: $j_{см} = \dfrac{I}{S} = \dfrac{d\sigma}{dt}$.

Поле между обкладок конденсатора $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, $D = \varepsilon_0 E = \sigma$

$$j_{см} = \frac{dD}{dt}. \qquad (7.6)$$

$$\vec{j}_{см} = \frac{d\vec{D}}{dt}.$$

Вектор электрического смещения $\vec{D} = \vec{D}(S,t)$.

Если обкладки неподвижны и не деформируются, то от полной производной в уравнении (7.6) можно перейти к частной производной по времени:

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (7.7)$$

• Конденсатор заряжается (рис.7.2).
Электрическое поле возрастает,
вектор $\vec{D}$ увеличивается, $\vec{j}_{см} \uparrow\uparrow \vec{D}$.

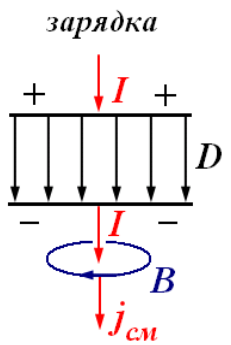


Рис.7.2

• Конденсатор разряжается (рис.7.3).
Электрическое поле убывает,
вектор $\vec{D}$ уменьшается, $\vec{j}_{см} \uparrow\downarrow \vec{D}$.

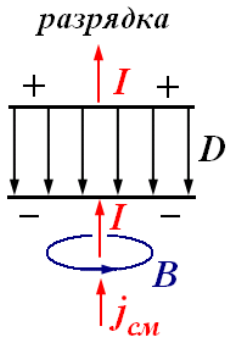


Рис.7.3

$$I_{смещ} = \int_S \vec{j}_{смещ} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}.$$

$$j_{полн} = j_{пр} + j_{см} = j + \frac{\partial D}{\partial t}. \qquad \Rightarrow$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \qquad (7.8)$$

Циркуляция вектора H *напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру* L *равна алгебраической сумме макротоков и тока смещения сквозь поверхность, натянутую на этот контур.*

$$D = \varepsilon_0 E + P \qquad \Rightarrow$$

В диэлектрике: $$j_{см} = \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}}_{\substack{пл.тока \\ смещ.в \\ вакууме}} + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial t}}_{\substack{пл.тока \\ поляризации}} \quad (7.9)$$

Максвелл приписал току смещения только одно общее свойство с током проводимости – *способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле*. Из приведенного выражения можно понять происхождение термина «ток смещения». В среде часть этого тока действительно связана со смещением связанных зарядов $(\frac{\partial P}{\partial t})$. Токи поляризации по своей природе не отличаются от токов проводимости и также возбуждают магнитное поле. Принципальная идея Максвелла состоит в том, что другая « истинная» часть тока смещения$(\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t})$, которая не связана ни с каким движением зарядов, а обусловлена только изменением электрического поля , также возбуждает магнитное поле, что имеет место даже в вакууме.
Ток поляризации связан с потерей энергии на нагревание диэлектрика при его поляризации. Ток смещения в вакууме не приводит к выделению тепла.

7.3. Система уравнений Максвелла в интегральной форме

В основе теории Максвелла лежат четыре уравнения:

$$1.\ \oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \qquad (7.10)$$

$$2.\ \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0. \qquad (7.11)$$

$$3.\ \oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \qquad (7.12)$$

$$4.\ \oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV. \qquad (7.13)$$

Поясним все эти уравнения:

1. Циркуляция вектора напряженности E вихревого электрического поля по любому замкнутому контуру равна скорости изменения магнитного потока через площадь контура, взятую с обратным знаком.

Отражает:

- первое положение теории Максвелла,
- закон электромагнитной индукции.

2. Поток вектора индукции B магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Следовательно, силовые линии магнитного поля замкнуты.

3. Циркуляция вектора напряженности H магнитного поля по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, пронизывающих этот контур.

Закон полного тока.

Физический смысл: магнитное поле порождается током проводимости и переменным электрическим полем.

4. Поток вектора электрической индукции D через любую замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Теорема Гаусса для вектора D.

Физический смысл: электрическое поле создается нескомпенсированными электрическими зарядами.

7.4. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Переход от уравнений Максвелла в интегральной форме к уравнениям Максвелла в дифференциальной форме осуществляется на основании

теоремы Остроградского-Гаусса: $\oint\limits_S \vec{A}d\vec{S} = \int\limits_V div\vec{A}dV,$

теоремы Стокса: $\oint\limits_L \vec{A}d\vec{l} = \int\limits_S rot\vec{A}d\vec{S}.$

$$1.\ rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \qquad (7.14)$$

$$2.\ div\vec{B} = 0. \qquad (7.15)$$

$$3.\ rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (7.16)$$

$$4.\ div\vec{D} = \rho. \qquad (7.17)$$

Из уравнений Максвелла следует:

1) Электрическое и магнитное поля взаимосвязаны, т.е. в общем случае электрическое и магнитное поля не могут существовать независимо друг от друга. Следовательно, существует единое *электромагнитное поле*.

2) Уравнения Максвелла являются инвариантными относительно преобразований Лоренца, т.е. их вид не меняется при переходе от одной ИСО к другой.

3) В общем случае уравнения Максвелла не симметричны.

$$rot\vec{E} = \underbrace{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\substack{\text{одно}\\ \text{слагаемое}}}; \qquad rot\vec{H} = \underbrace{\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\substack{\text{два}\\ \text{слагаемых}}}.$$

Уравнения Максвелла содержат плотность электрического заряда и тока. В тоже время магнитные заряды и соответствующие им магнитные токи отсутствуют, хотя теоретического запрета на существование свободных магнитных зарядов нет. В настоящее время не обнаружены.

Но если среда не содержит свободных электрических зарядов ($\rho = 0$) и в ней нет тока проводимости ($j = 0$), следовательно, получаем систему уравнений

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (7.18)$$
$$div\vec{B} = 0; \qquad div\vec{D} = 0.$$

Уравнения становятся симметричными, и в системе (7.18) они отличаются только знаками. Различие в знаках правых частей уравнений Максвелла соответствует закону сохранения энергии и правилу Ленца, что является необходимым условием существования устойчивого электромагнитного поля.

Если бы знаки при $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ и $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ были бы одинаковы, то бесконечно малое увеличение одного из полей привело бы к неограниченному возрастанию обоих полей, и наоборот.

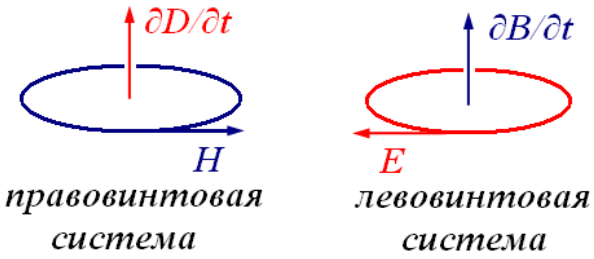


Рис.7.4

4) Возникновение электромагнитной волны.

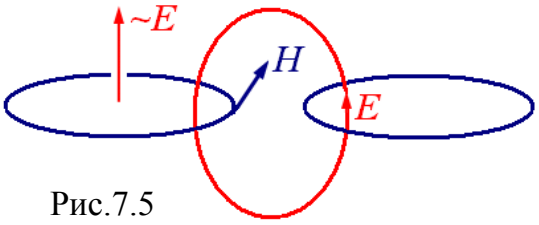


Рис.7.5

7.5. Материальные уравнения Максвелла

Система уравнений Максвелла
- согласуется с уравнениями движения заряженной частицы под действием полной силы Лоренца,
- не учитывает квантовые эффекты.

Для расчета полей в среде система уравнений Максвелла дополняется уравнениями, которые характеризуют электрические и магнитные свойства среды – *материальные уравнения Максвелла*:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E},$$
$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}, \qquad (7.19)$$
$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E}_{кул} + \vec{E}_{ст}\right).$$

В общем случае связь между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$ не линейная.

Система статических уравнений Максвелла

В случае, когда вектора $\vec{D}$ и $\vec{B}$ не зависят от времени, т.е. $\vec{D}$ и $\vec{B}$ = *const*, система уравнений Максвелла принимает вид:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \qquad rot\vec{E} = 0.$$
$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \qquad div\vec{B} = 0.$$
$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \qquad rot\vec{H} = \vec{j}.$$
$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV, \qquad div\vec{D} = \rho.$$

В этом случае электрическое и магнитное поля можно рассматривать независимо друг от друга.

Значение теории Максвелла

1. Показал, что электромагнитное поле – это совокупность взаимосвязанных электрических и магнитных полей.

2. Предсказал существование электромагнитных волн, распространяющихся от точки к точке с конечной скоростью.

3. Показал, что световые волны являются электромагнитными волнами.

4. Связал воедино электричество, магнетизм и оптику.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Часть I. Электростатика	4
Тема 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ	4
1.1. Заряды. Свойства зарядов	4
1.2. Взаимодействие электрических зарядов в вакууме. Закон Кулона	5
1.3. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля	7
1.4. Сложение электростатических полей. Принцип суперпозиции	8
1.5. Применение принципа суперпозиции к расчету полей	9
1.6. Силовые линии напряженности электростатического поля	13
1.7. Поток вектора напряженности	16
1.8. Теорема Остроградского – Гаусса (теорема Гаусса)	17
1.9. Применение теоремы Гаусса к расчету электрических полей	20
1.10. Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса	27
1.11. Работа сил электрического поля. Консервативность электростатических сил	28
1.12. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля	30
1.13. Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля	31
1.14. Диполь в электростатическом поле	34
1.15. Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом	36
1.16. Эквипотенциальные поверхности	38
1.17. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля простейших электростатических полей	40
Тема 2. ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ	48
2.1. Микро- и макрополе	48
2.2. Проводники и диэлектрики	48
2.3. Диполь в электрическом поле	50
2.4. Поляризация диэлектриков	51
2.5. Вектор поляризации. Поляризованность	52
2.6. Связь между вектором поляризации и поверхностной плотностью связанных (поляризационных) зарядов	53
2.7. Закон Гаусса для вектора поляризации *P*	54
2.8. Вектор электростатической индукции. Закон Гаусса для векто-	55

ра электростатической индукции	
2.9. Относительная диэлектрическая проницаемость	56
2.10. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред	58
2.11. Сегнетоэлектрики	60
2.12. Прямой и обратный пьезоэлектрические эффекты	62
2.13. Проводники в электрическом поле. Равновесие зарядов в проводниках	64
2.14. Поле вблизи поверхности заряженного проводника	65
2.15. Электростатическая индукция	67
Тема 3 3.1. Электроемкость проводника. Энергия электрического поля	69
3.2. Взаимная электроемкость. Конденсаторы	71
3.3. Плоский, сферический и цилиндрический конденсаторы	72
3.4. Соединения конденсаторов	74
3.5. Энергия электрического поля	75
ЧАСТЬ II. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	77
Тема 4 4.1.Понятие об электрическом токе	77
4.2. Сила тока. Плотность тока	79
4.3. Уравнение непрерывности	80
4.4. Сторонние силы. Электродвижущая сила. Напряжение	81
4.5. Закон Ома для однородного участка цепи	82
4.6. Закон Ома в дифференциальной форме	83
4.7. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Закон Ома для замкнутой цепи	83
4.8. Работа и мощность электрического тока. Закон Джоуля-Ленца	85
4.9. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме	86
4.10. Законы Кирхгофа	87
4.11. Электрический ток в электролитах	88
4.12. Закон Ома для электролитов	90
4.13. Электрический ток в газах. Проводимость газов	91
4.13. Электрический ток в газах. Проводимость газов	92
4.15. Самостоятельный газовый разряд	95
ЧАСТЬ III. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ	99
Тема 5. 5.1. Понятие о магнитном поле	99
5.2. Вектор магнитной индукции –силовая характеристика магнитного поля	100
5.3. Силовые линии магнитного поля	101
5.4. Закон Гаусса для магнитного поля в дифференциальной и ин-	102

тегральной форме	
5.5. Закон Био – Савара – Лапласа	103
5.6. Применение закона Био – Савара – Лапласа для расчета магнитных полей	104
5.7.Закон полного тока	107
5.8.Применение закона полного тока для вычисления простейших полей	109
5.9. Закон полного тока в дифференциальной форме	111
5.10. Действие магнитного поля на проводники и контур с током. Закон Ампера	112
5.11. Взаимодействие параллельных токов. Основная электрическая единица СИ – Ампер	113
5.12. Действие магнитного поля на контур с током	113
5.13. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле	115
5.14. Действие магнитного поля на заряженные частицы. Сила Лоренца	116
5.15. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле	117
5.16. Магнитные силы – релятивистская добавка к кулоновским силам	119
5.17. Эффект Холла	120
5.18. Явление электромагнитной индукции	121
5.19. Вихревое электрическое поле	122
5.20. Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме	123
5.21. Электронный механизм возникновения э.д.с. индукции	123
5.22. Электромагнитная индукция в технике	124
5.23. Токи Фуко (вихревые токи)	125
5.24. Явление самоиндукции. Индуктивность	127
5.25. Экстратоки замыкания и размыкания	129
5.26. Взаимная индукция	131
5.27. Энергия магнитного поля. Объемная плотность энергии магнитного поля	134
Тема 6 МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА	135
6.1.Магнитное поле в веществе	135
6.2.Диамагнетики. Парамагнетики	137
6.3.Намагниченность	138
6.4.Закон полного тока для магнитного поля в веществе	140
6.5.Ферромагнетики	141

Тема 7. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА	142
7.1. Электромагнитная теория Максвелла (60-е годы 19 века)	142
7.2. Основные положения теории Максвелла	143
7.3. Система уравнений Максвелла в интегральной форме	147
7.4. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	148
7.5. Материальные уравнения Максвелла	149

Учебное издание

КРАВЧЕНКО Надежда Степановна
ЛИСИЧКО Елена Владимировна
ТВЕРДОХЛЕБОВ Сергей Иванович

ФИЗИКА 2

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор

Редактор *А.А. Цыганкова*
Верстка *Л.А. Егорова*

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати Формат 60×84/16.
Бумага «Снегурочка». Печать Xerox.
Усл. печ. л. 13,49. Уч.-изд. л. 12,21.
Заказ . Тираж экз.

Национальный исследовательский
Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru