Закон полного тока

Лекция № 4

Содержание лекции:

- Теорема Остроградского-Гаусса для магнитного поля
- Закон полного тока для магнитного поля в вакууме
- Поле тороида и бесконечно длинного соленоида

Поток вектора магнитной индукции

$$d\Phi_B = B_n dS = BdS\cos(\alpha) = (\vec{B}d\vec{S})$$

$$\boxed{\Phi_B = \int_S B_n dS = \int_S (\vec{B}d\vec{S})}$$

- магнитный поток сквозь произвольную поверхность S.

$$[\Phi_B] = \text{Вб} \quad (\text{Вебер})$$

Теорема Остроградского-Гаусса для магнитного поля

Магнитный поток сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\boxed{\oint_S (\vec{B}\, d\vec{S}) = \oint_S B_n\, dS = 0}$$

Этот результат является математическим выражением того, что в природе нет магнитных «зарядов» – источников магнитного поля, на которых начинались бы или заканчивались линии магнитной индукции.

Теорема свидетельствует о том, что магнитное поле – ***соленоидальное***.

Закон полного тока

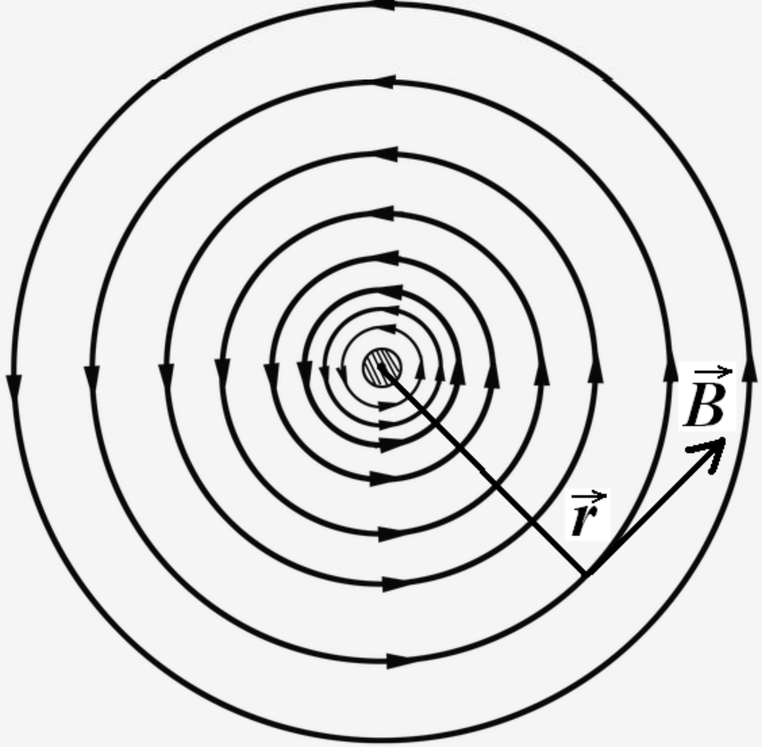
Для электростатического поля:

$$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = \oint_L E_l \, dl = 0,$$

что свидетельствует о его потенциальности.

Циркуляция вектора В вдоль замкнутого контура не равна нулю и зависит от выбора контура.

Такое поле называют ***вихревым полем***.



Рассмотрим магнитное поле бесконечного прямолинейного проводника

$$\oint_L (\vec{B}\, d\vec{l}\,) = \oint_L B dl \cos\alpha$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}, \qquad \cos\alpha = 1$$

Следовательно,

$$\boxed{\oint_L (\vec{B}\, d\vec{l}\,) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\int_0^{2\pi r} dl = \mu_0 I}$$

- циркуляция вектора B по замкнутому контуру

Выводы:

1. Магнитное поле прямолинейного тока – вихревое поле, т.к. в нем циркуляция вектора ***B*** вдоль линии магнитной индукции не равна нулю.

2. Циркуляция вектора ***B*** магнитной индукции поля прямолинейного тока в вакууме одинакова вдоль всех линий магнитной индукции и равна произведению μ_0 на силу тока.

Если магнитное поле создается системой из n проводников с токами $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n$:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i$$

Циркуляция вектора **B** вдоль произвольного замкнутого контура L, проведенного в поле, равна:

$$\oint_L (\vec{B}\,d\vec{l}\,) = \oint_L \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \right) d\vec{l} = \oint_L \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{B}_i\,d\vec{l}\,\right) = \sum_{i=1}^{n} \oint_L \vec{B}_i\,d\vec{l}$$

Получаем, в соответствии с выражениями для циркуляции вектора **B**:

$$\oint_L \vec{B}_i d\vec{l} = \begin{cases} \mu_0 I_i & \text{, если контур L охватывает ток } I_i \\ 0 & \text{, если контур L не охватывает ток } I_i \end{cases}$$

Следовательно,

$$\boxed{\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 \sum_{j=1}^{k} I_j}$$

k – число проводников с током, ***охватываемых*** контуром.

Каждый ток учитывается столько раз, сколько раз он охватывается контуром.

► Ток берется со знаком «+», если его направление образует с направлением обхода по контуру правовинтовую систему.

► Ток противоположного направления считается отрицательным.

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме

Циркуляция вдоль замкнутого контура вектора индукции магнитного поля в вакууме равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром.

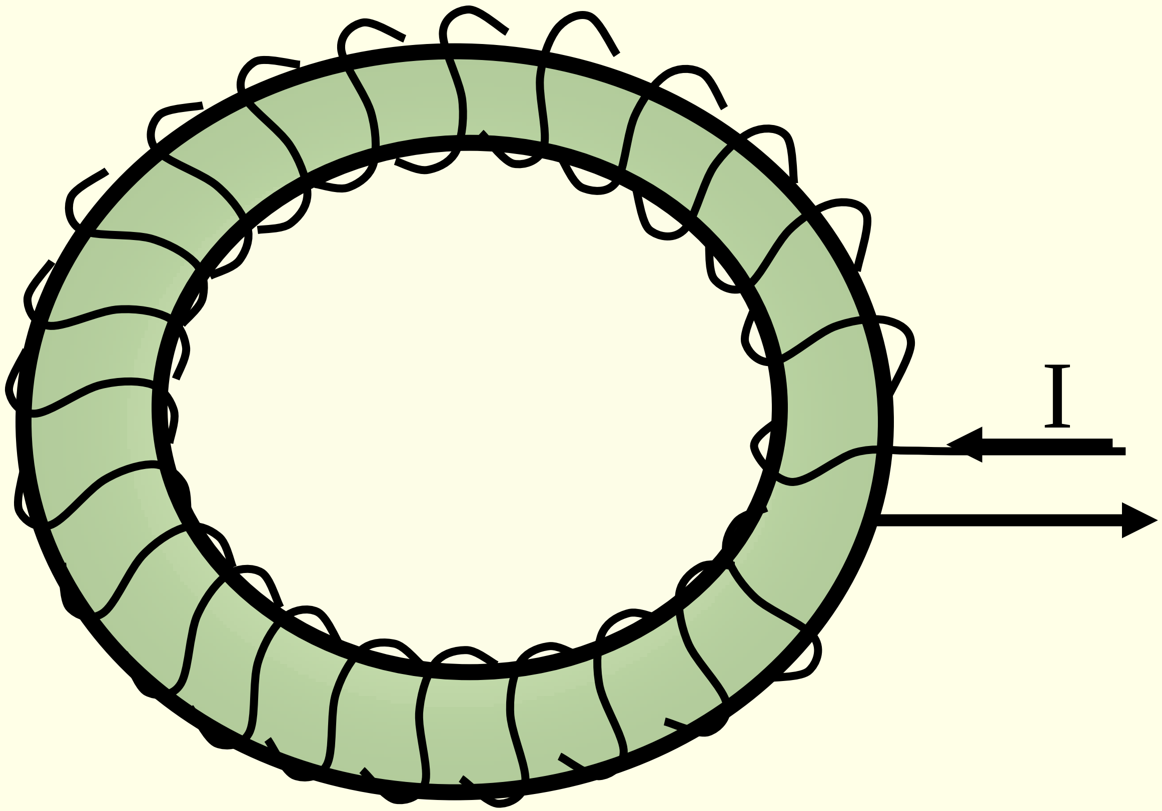
$$\oint_L (\vec{B}\,d\vec{l}\,) = \mu_0 \sum_{j=1}^{k} I_j$$

$$\boxed{\oint_L (\vec{H}\,d\vec{l}\,) = \sum_{j=1}^{k} I_j}$$

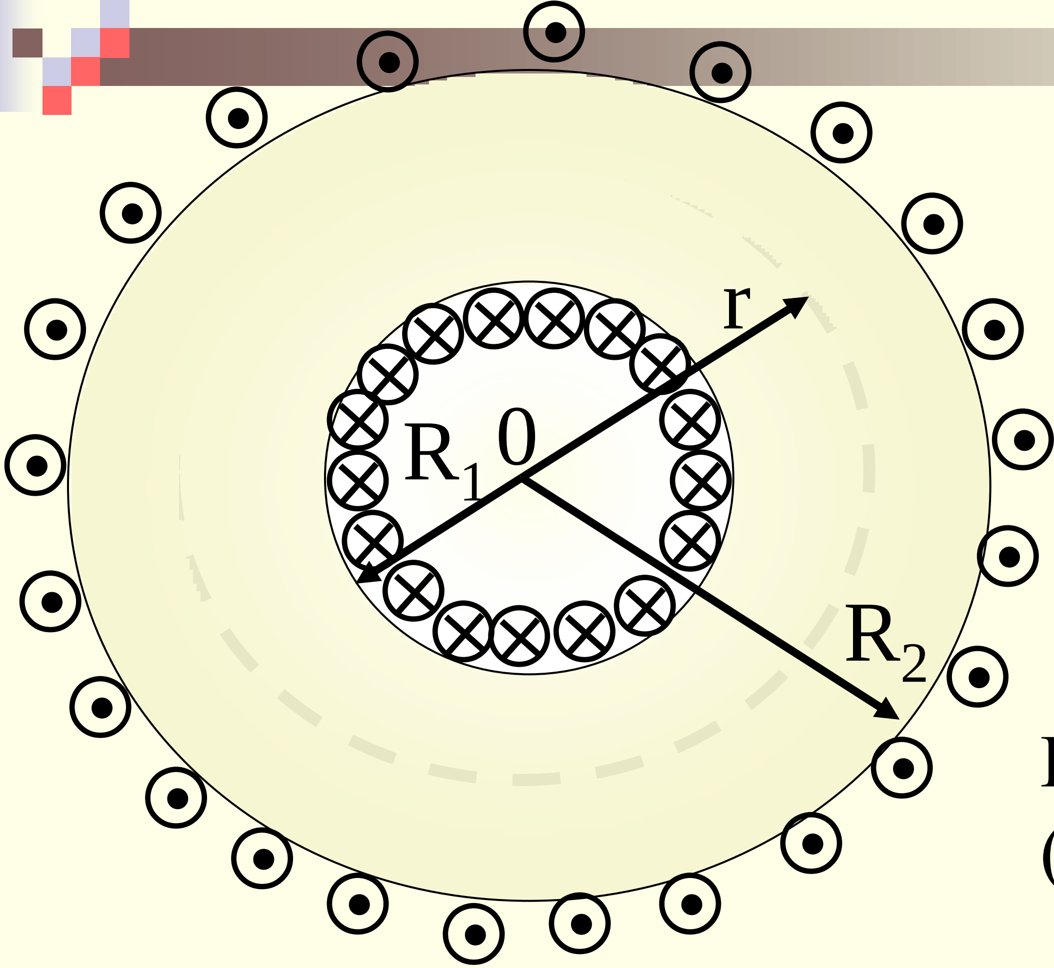
Так как
$$\sum_j^k I_j = \int_S (\vec{j}\,d\vec{S}\,),$$

тогда
$$\oint_L (\vec{H}\,d\vec{l}\,) = \oint_S (\vec{j}\,d\vec{S}\,)$$

Поле тороида.



Тороидом называется кольцевая катушка, витки которой намотаны на сердечник, имеющий форму тора.



Поле внутри тороида (на радиусе r) равно:

$$\oint_L Hdl \cos\left(\vec{H},^\wedge d\vec{l}\right) = H\int_0^{2\pi r} dl = H\,2\pi r$$

$$\text{Если } r < R_1 \;\rightarrow\; \sum I_k = 0 \;\text{ и }\; H = 0.$$

$$\text{Если } r > R_2 \rightarrow 2\sum I_k = 0 \;\text{ и }\; H = 0.$$

Следовательно, ***вне тороида магнитного поля нет***.

С учетом того, что количество витков = N, получим:

$$\boxed{H = \frac{NI}{2\pi r}}$$

Т.о., *H* внутри тороида уменьшается по мере удаления от его центра О.

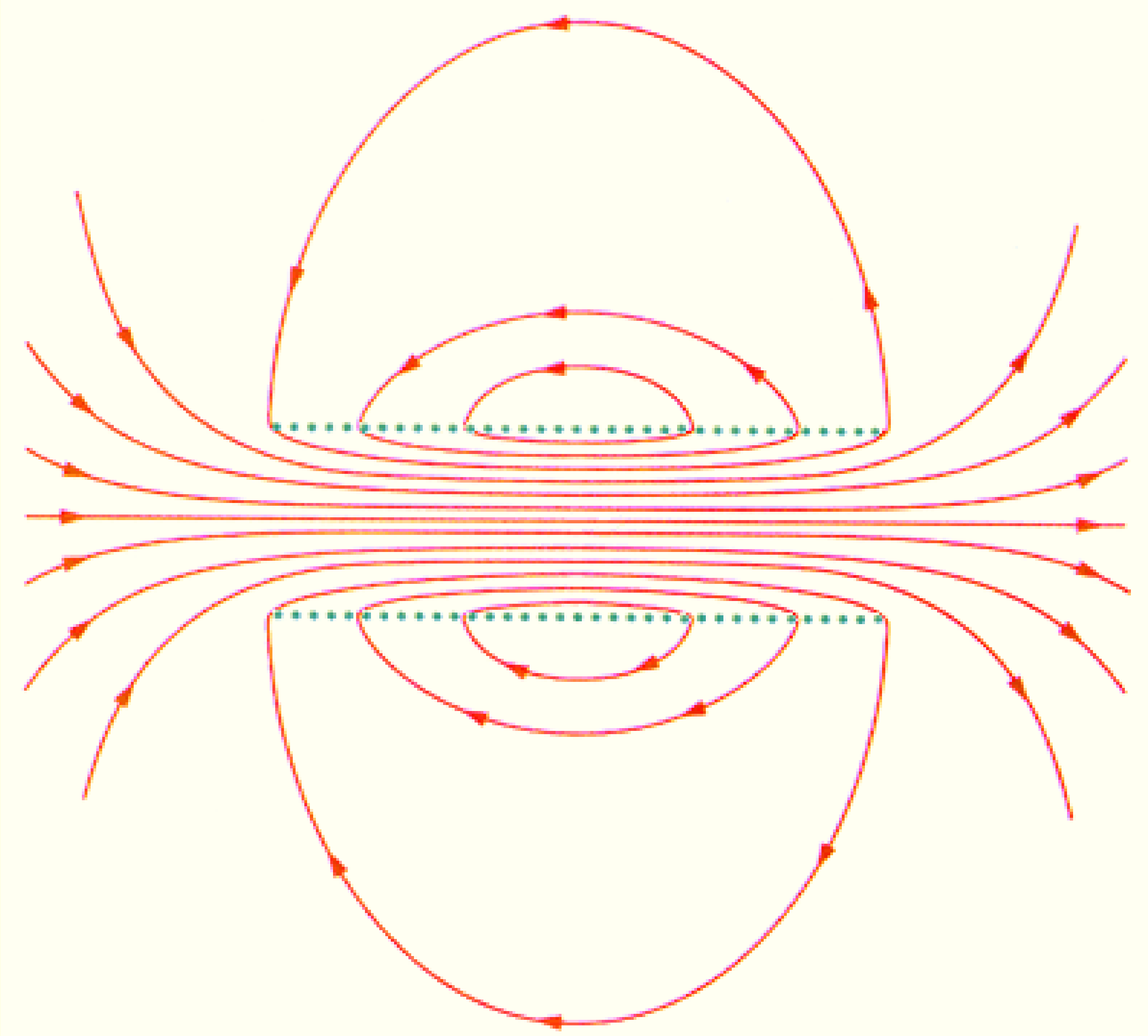
H *на осевой линии тороида*

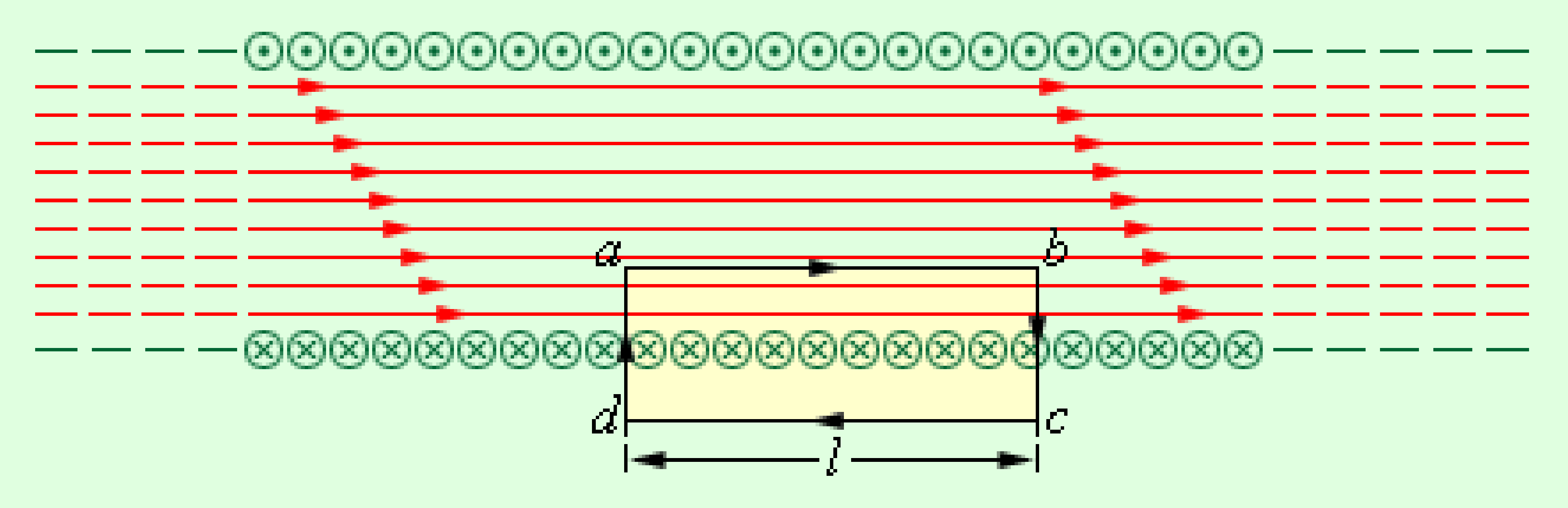
$$r = R_{ср} = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

$$\boxed{H_{ср} = \frac{NI}{2\pi R_{ср}} = nI}$$

Здесь: n - число витков на единицу длины средней линии тороида.

Если неограниченно увеличивать радиус тороида, получим ***бесконечно длинный соленоид***.





$$Bl = \mu\mu_0 Inl \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \mu\mu_0 In}$$

Сравним: $B = \mu\mu_0 nI = \mu\mu_0 H$

Дифференциальная формулировка ЗПТ

Покажем, что ЗПТ справедлив не только для ∞ прямолинейного проводника с током, а для произвольного тока.

$$\oint (\vec{B}\,d\vec{l}\,) = \mu_0 I \qquad I = \int_S (\vec{j}\,d\vec{S}\,)$$

где: $\boldsymbol{j}$ – объёмная плотность тока.

Тогда:

$$\oint_L (\vec{B}\,d\vec{l}\,) = \mu_0 \oint_S (\vec{j}\,d\vec{S}\,)$$

Левую часть преобразуем (по формуле Стокса):

$$\int_S rot\,\vec{A}\,d\vec{S} = \oint_L \vec{A}\,d\vec{l}$$

$$\int_L \vec{B}\,d\vec{l} = \oint_S rot\,\vec{B}\,d\vec{S}$$

$$\int_S rot\,\vec{B}\,d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j}\,d\vec{S}, \qquad \text{или} \qquad \int_S \left[rot\,\vec{B} - \mu_0 \vec{j}\right] d\vec{S} = 0$$

Равенство нулю должно выполняться при любом S, поэтому подинтегральное выражение равно нулю.

Дифференциальная форма закона полного тока имеет дифференциальный характер и справедливо для произвольного поля:

$$\boxed{rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}}$$

$$\boxed{\left[\nabla\,\vec{B}\right] = \mu_0\,\vec{j}}$$

Векторные поля у которых rot ≠ 0 называют вихревыми

Магнитное поле ***вихревое*** во всех точках пространства, где текут токи и ***безвихревое***, где токов нет.