Связь между потенциалом и вектором напряженности электростатического поля

Лекция № 4

Содержание лекции:

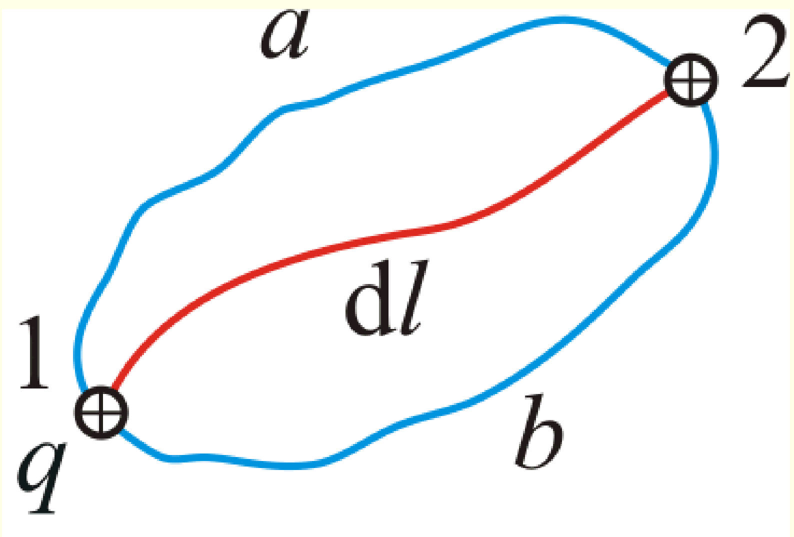
- ***Циркуляция вектора напряженности электростатического поля***
- ***Связь между потенциалом и вектором напряженности электростатического поля***
- ***Ротор вектора электростатического поля***
- ***Уравнения Лапласа и Пуассона***

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

Электростатическое поле образованное системой неподвижных зарядов – поле центральных сил т.е., консервативное.

Элементарная работа сил поля по перемещению пробного заряда из т.1 в т.2 будет равна

$$dA = q\vec{E}\,d\vec{l}$$



А вся работа равна: $$A = q\int_1^2 \vec{E}\,d\vec{l}$$

Такой интеграл по замкнутому контуру называют ***циркуляцией вектора*** $\vec{E}$.

Утверждение, что циркуляция вектора $\vec{E}$ в электростатическом поле равна нулю

$$\boxed{\oint \vec{E}\,d\vec{l} = 0}$$

называют теоремой о циркуляции вектора $\vec{E}$

Из независимости линейного интеграла от пути между двумя точками следует, что

$$\int_1^2 Edl = -\int_2^1 Edl \,, \quad \text{тогда} \quad q\oint \vec{E}\,d\vec{l} = q\int_1^2 \vec{E}\,d\vec{l} - q\int_2^1 \vec{E}\,d\vec{l} = 0$$

Поле, обладающее такими свойствами, называется ***потенциальным***

Вывод: ***линии электростатического поля не могут быть замкнутыми.***

Линии электростатического поля начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных (или уходят в бесконечность).

Связь между потенциалом и напряженностью

Потенциал – это скалярная энергетическая характеристика электростатического поля.

Напряженность – векторная силовая характеристика электростатического поля.

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{и} \quad A_{12} = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{l} = \int_1^2 q\, \vec{E}\, d\vec{l}$$

т.о., $$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{l}$$

Если перемещение $d\vec{l}$ параллельно оси x, то

$$d\vec{l} = \vec{i}\,dx$$

$$-d\varphi = \vec{E}\,d\vec{l} = \vec{E}\vec{i}\,dx = E_x dx \Rightarrow E_x = -\frac{d\varphi}{dx}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Величина, стоящая в скобках есть ***градиент потенциала*** φ

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \qquad \vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$$

gradφ – это вектор показывающий направление ***наискорейшего возрастания потенциала***

Связь вектора напряженности и потенциала:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

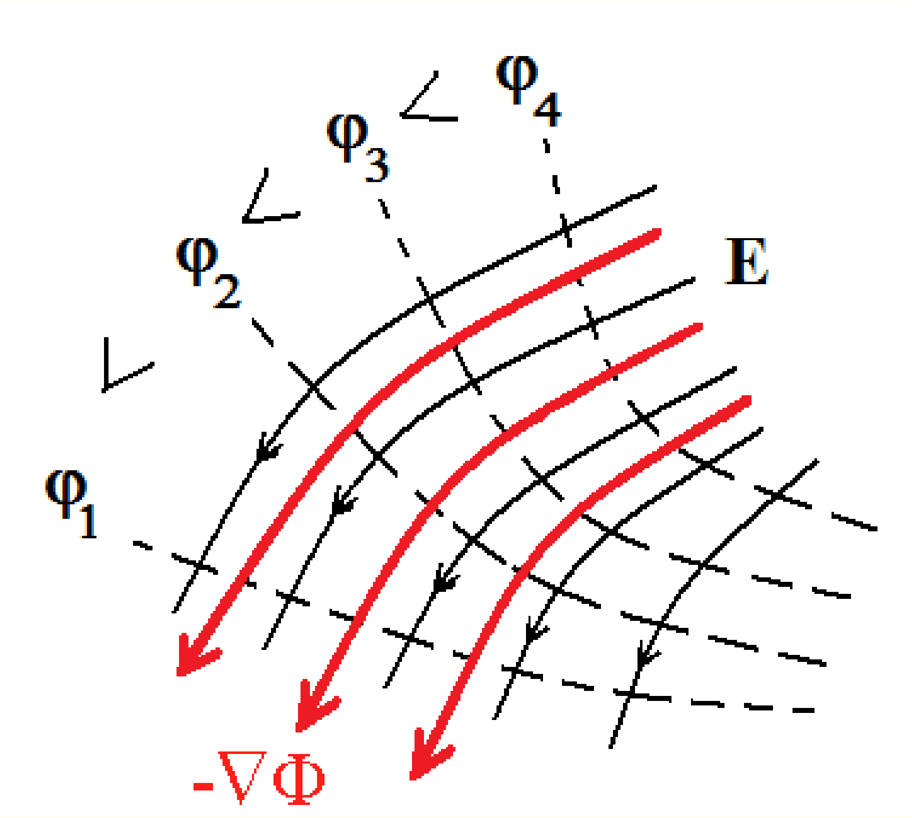
Знак минус говорит о том, что вектор *E* направлен в сторону уменьшения потенциала электрического поля.

Компоненты вектора $\operatorname{grad}\varphi$ определяют скорость пространственного изменения потенциала: *x*-компонента $\partial\varphi/\partial x$ показывает, как быстро φ изменяется в направлении *x*, $\partial\varphi/\partial y$ – в направлении *y*, $\partial\varphi/\partial z$ – в направлении оси *z*.

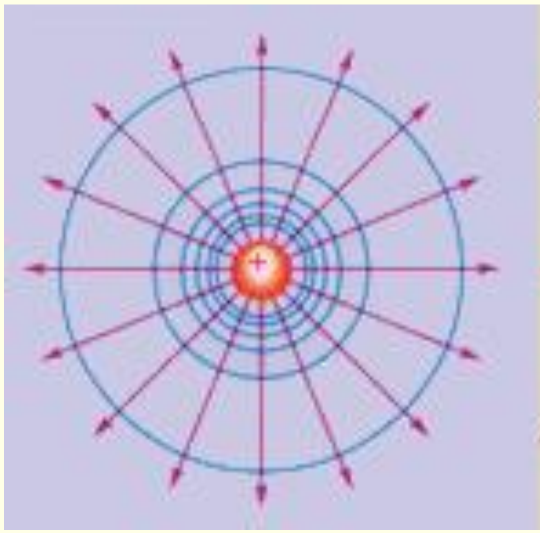
Линии напряженности направлены в сторону убывания потенциала и всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

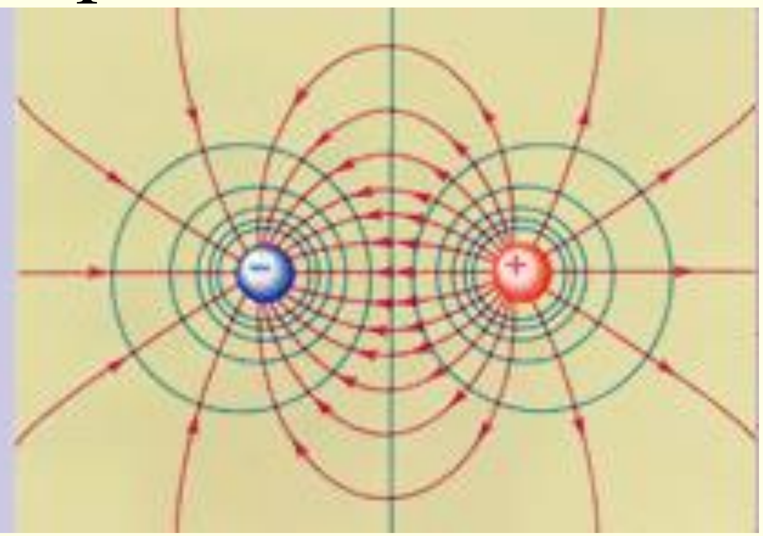
Геометрическое место точек постоянного потенциала называется поверхностью равного потенциала или **эквипотенциальной поверхностью**.

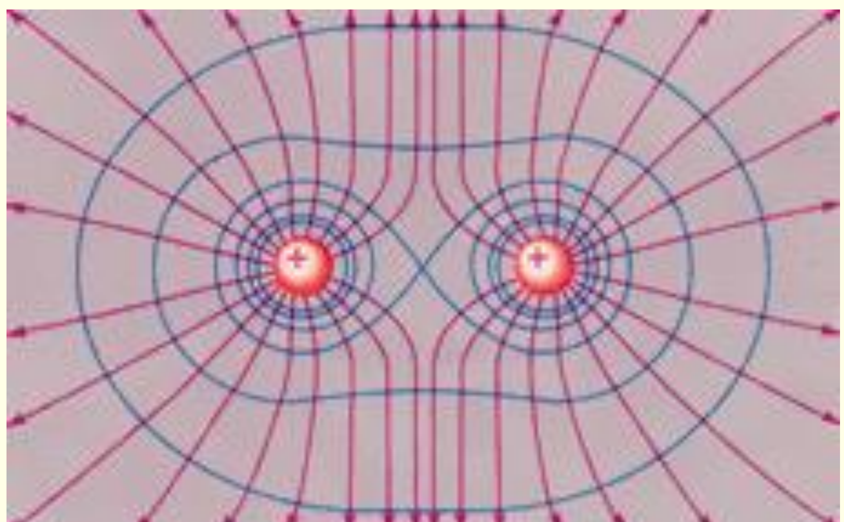
$$\varphi(x, y, z) = const \quad .$$

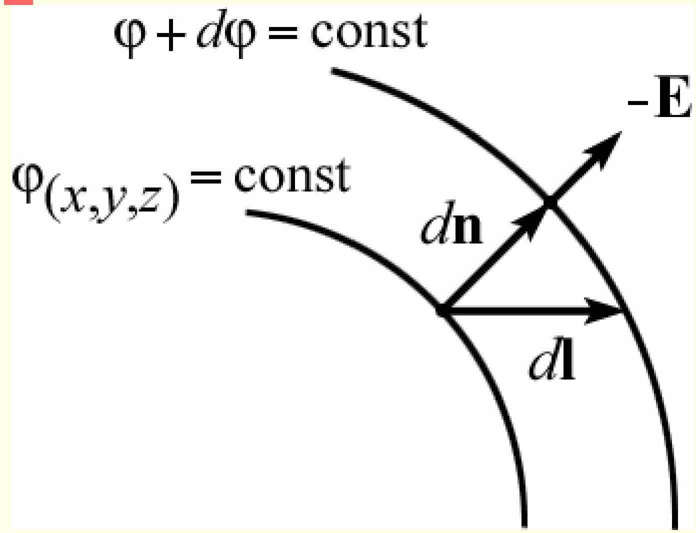


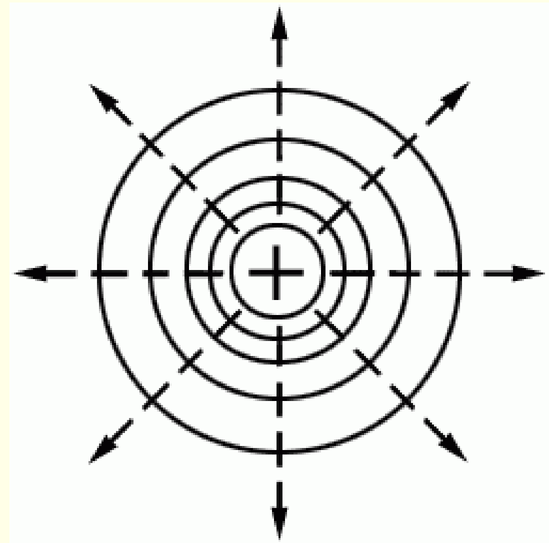
Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности











Через равные приращения потенциала Δφ чертят эквипотенциальные поверхности, а затем для полноты картины проводят силовые линии, перпендикулярные эквипотенциальным поверхностям. Там, где расстояние между эквипотенциальными поверхностями мало, напряженность поля велика и наоборот.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

- оператор набла или оператор Гамильтона

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla \varphi \equiv grad \ \varphi$$

$$\nabla \vec{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\nabla \vec{a} \equiv div \ \vec{a}$$

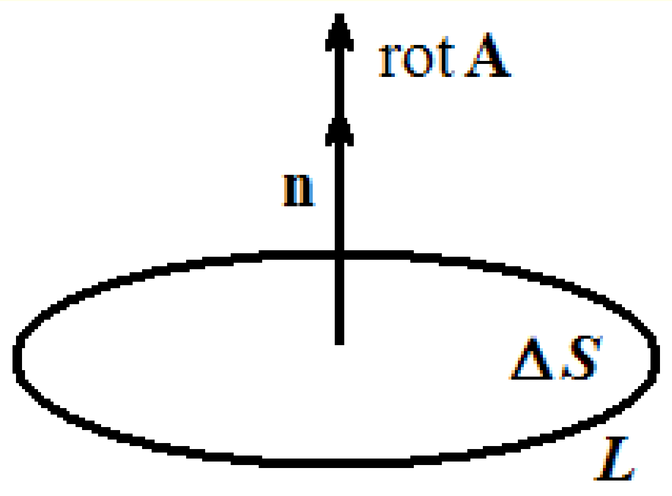
$$\boxed{[\nabla\,,\vec{a}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{[\nabla\,,\vec{a}\,] \equiv rot\ \vec{a}}$$

$$rot\ \ grad\ \ \varphi = [\nabla\,,\nabla\,\varphi\,] = [\nabla\nabla\ \ ]\varphi = 0$$

$$div\ \ rot\ \vec{a} = \nabla\,[\nabla\,\vec{a}\,] = 0$$

Ротор вектора



Ротором называется вектор, проекция которого на направление n определяется формулой:

$$rot\ \vec{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \vec{A}\, d\vec{l}}{\Delta S}$$

Ротор характеризует интенсивность «завихрения» вектора.

Теорема Стокса (связь между контурным и поверхностным интегралами):

$$\boxed{\oint_L \vec{A}\, d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\ \vec{A}\, d\vec{S}}$$

Для электрического поля $\oint\limits_L \vec{E}\, d\vec{l} = \int\limits_S \operatorname{rot} \vec{E}\, d\vec{S}$

Так как $\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0,$

следовательно $\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = 0}$

- дифференциальная формулировка потенциальности электростатического поля.

Таким образом *кулоновское* ***электростатическое поле – безвихревое.***

Уравнения Лапласа и Пуассона

Теорема Гаусса в дифференциальной форме

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Распишем дивергенцию вектора напряженности электрического поля:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = -\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)$$

Откуда $$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}}$$

или $$\boxed{\Delta\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ $$\boxed{\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon_0}$$

- уравнение Пуассона

$\Delta\varphi$ ($\nabla^2\varphi$) – оператор Лапласа (лапласиан)

В области пространства, где заряды отсутствуют

$\rho=0$ $$\boxed{\nabla^2\varphi=0}$$ **- уравнение Лапласа**

Теорема единственности

Определение потенциала сводится к нахождению такой функции φ, которая во всем пространстве между проводниками удовлетворяет уравнениям Лапласа или Пуассона, а на поверхности проводников принимает заданные значения φ_1, φ_2 и т.д.

Это утверждение называют **теоремой единственности.**

С физической точки зрения это утверждение очевидно: если решение не одно, то будет не один потенциальный рельеф. Это не возможно.