Теорема Гаусса в дифференциальной форме. Потенциал электростатического поля

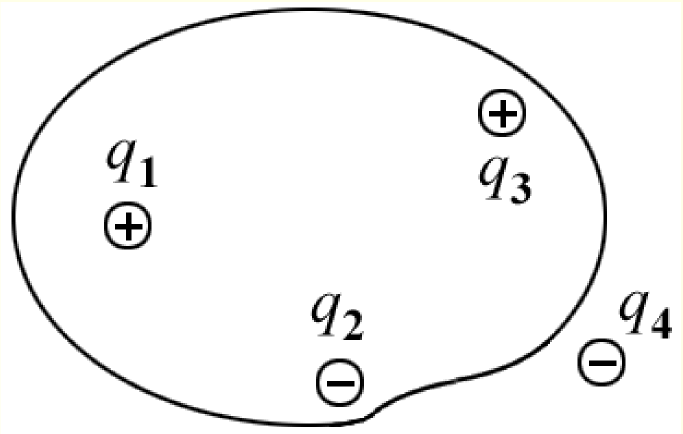
Лекция № 3

Содержание лекции:

- ***Теорема Гаусса (дифференциальная форма)***
- ***Потенциал электростатического поля***

Теорема Гаусса (интегральная форма)

Поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных **внутри этой поверхности**, деленной на ε_0.



$$\oint_{(S)} \left(\vec{E}, \overrightarrow{dS} \right) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

Заряды, находящиеся вне поверхности, влияния не оказывают.

Если электрические заряды распределены в разных местах пространства с некоторой ***объемной плотностью***

$$\rho = \frac{dq}{dV},$$

тогда суммарный заряд объема dV будет равен:

$$\sum q_i = \int \rho dV .$$

Теореме Гаусса:

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_V \rho dV ,}$$

если заряд неравномерно распределен по объему.

Теорема Гаусса (дифференциальная форма)

Пусть заряд распределен в пространстве ΔV, с объемной плотностью $\langle \rho \rangle$. Тогда

$$\oint_S \left(\vec{E}, \overrightarrow{dS} \right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad \oint_S \left(\vec{E}, \overrightarrow{dS} \right) = \frac{\langle \rho \rangle \Delta V}{\varepsilon_0},$$

$$\frac{1}{\Delta V} \oint_S \left(\vec{E}, \overrightarrow{dS} \right) = \frac{\langle \rho \rangle}{\varepsilon_0}$$

Устремим $\Delta V \to 0$, стягивая его к интересующей нас точке, при этом $\langle \rho \rangle$ будет стремиться к ρ в данной точке, т.е.

$$\frac{\langle \rho \rangle}{\varepsilon_0} \to \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Величину, являющуюся пределом отношения

$\oint\limits_S \left(\vec{E}, \overrightarrow{dS}\right)$ к ΔV , при $\Delta V \to 0$, называют

дивергенцией поля E и обозначают $div\, \vec{E}$:

$$\boxed{div\, \vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E}\, d\vec{S}}$$

Т.о., **дивергенция** является **скалярной функцией** координат. В декартовой системе координат

$$div\ \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Т.о., дивергенция поля E связана с плотностью заряда в той же точке уравнением

$$\boxed{div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

- теорема Гаусса в дифференциальной форме

Это уравнение свидетельствует о том, что источником электростатического поля являются свободные электрические заряды.

Введем векторный дифференциальный оператор (Набла):

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\vec{k},$$

где $\vec{i}\,;\ \vec{j}\,;\vec{k}$ – орты осей (единичные векторы).

Сам по себе оператор смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании с векторной или скалярной функцией, на которую символично умножается:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \nabla_{\mathbf{x}} E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

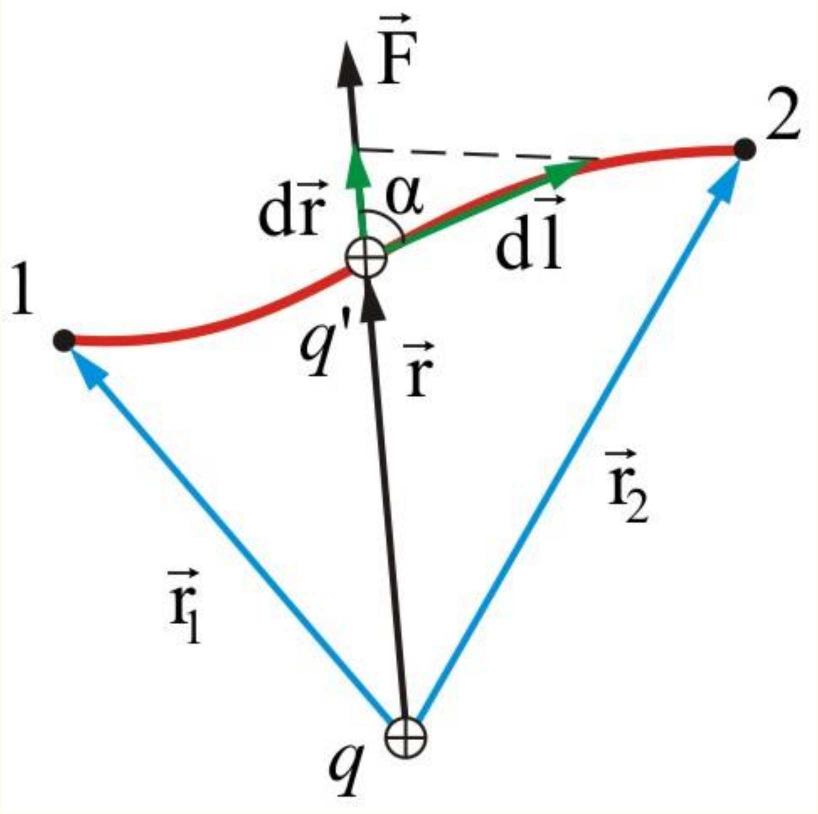
- теорема Гаусса в дифференциальной форме

В точках поля, где $divE > 0$ – имеются положительные заряды - ***источники*** поля;

В точках где $divE < 0$ – имеются ***стоки*** - отрицательные заряды.

Силовые линии выходят из источников и заканчиваются в стоках.

Потенциал электростатического поля



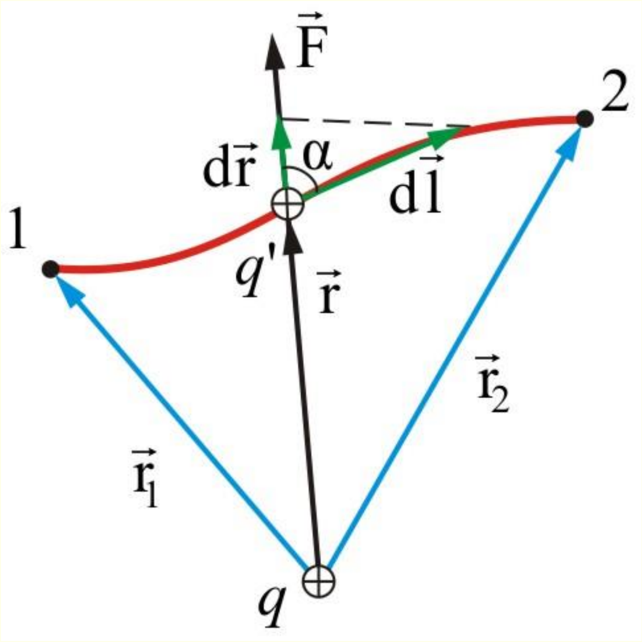
Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом *q*.

В любой точке этого поля на пробный точечный заряд *q*' действует сила F

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

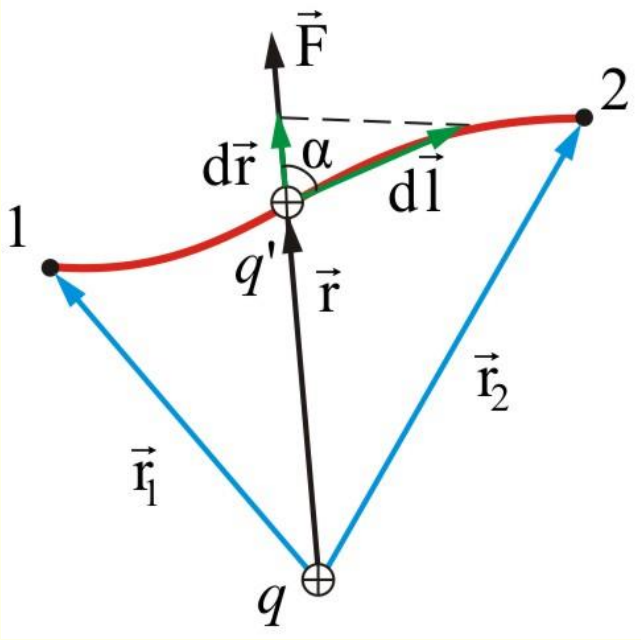
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = F(r)\frac{\vec{r}}{r},$$

где $F(r)$ – модуль вектора силы , $\frac{\vec{r}}{r}$ – единичный вектор, определяющий положение заряда q относительно q', ε_0 – электрическая постоянная.



Любое стационарное поле центральных сил является консервативным, т.е. работа сил этого поля не зависит от формы пути, а только от положения конечной и начальной точек.

Вычислим работу, которую совершает электростатическое поле, созданное зарядом q по перемещению заряда q' из точки 1 в точку 2.

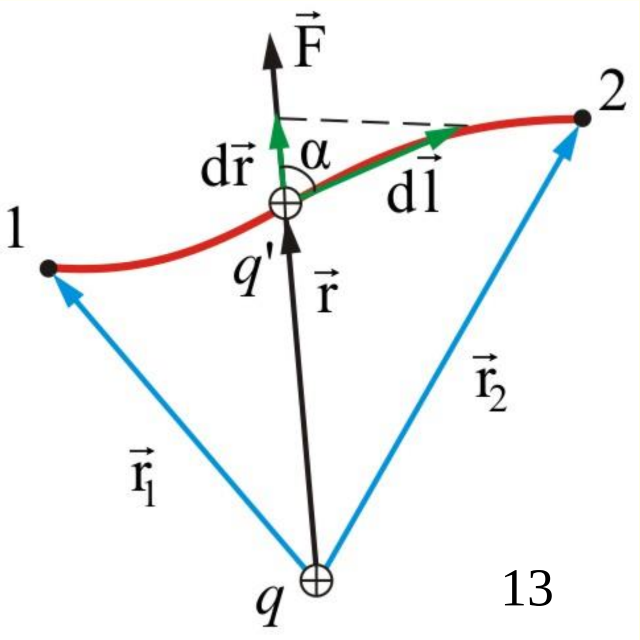


Работа на пути d*l* равна:

$$\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}l\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\mathrm{d}l\cos\alpha,$$

где d*r* – приращение радиус-вектора при перемещении на d*l*; $\mathrm{d}r = \mathrm{d}l\cos\alpha$,

$$\mathrm{d}A = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r.$$



Полная работа при перемещении из точки 1 в точку 2 равна интегралу:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= q'\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r_2}\right)$$

Величина, равная

$$\boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r} + const = \varphi(r)}$$

- ***потенциал поля точечного заряда q***

Потенциал поля точечного заряда выбирается таким образом, чтобы $\varphi(r = \infty) = 0$,

следовательно,

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.}$$

Тогда $$A = q'(\varphi_1 - \varphi_2) = -q'\Delta\varphi$$

- работа электрического поля при перемещении на конечный отрезок точечного заряда равна произведению величины перемещаемого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках. **Работа не зависит от пути перехода!** (**электростатическое поле <u>консервативно</u>**)

По определению

$$A_{12} = W_1 - W_2$$ - убыль потенциальной энергии

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q q'}{r}$$ - потенциальная энергия заряда q' в поле заряда q

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{q q'}{r_1} - \frac{q q'}{r_2}\right)$$

$$\varphi = \frac{W}{q'}$$

- **<u>потенциал</u>** численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля единичный положительный заряд.

Другое определение потенциала:

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q'} \quad \text{или} \quad A_\infty = q'\varphi$$

- ***потенциал численно равен работе, которая совершается полем при перемещении единичного положительного заряда из данной точки поля на бесконечность*** **(** $r \to \infty, \ W \to 0$ **).**

Для системы зарядов:

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}}$$

- потенциал поля, созданного системой зарядов, равен ***алгебраической*** сумме потенциалов, созданных каждым из зарядов в отдельности.

[φ] = В: один **вольт** – это разность потенциалов между такими точками, когда при перемещении заряда в 1 Кл электрическое поле совершает работу в 1 Дж.

Количество энергии, сообщаемой электрону при перемещении в электрическом поле между точками с разностью потенциалов 1 В – электронвольт:

$$1\ эВ = e\Delta\varphi = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ Кл \cdot 1\ В = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ Дж.$$