Теорема Гаусса и её применение

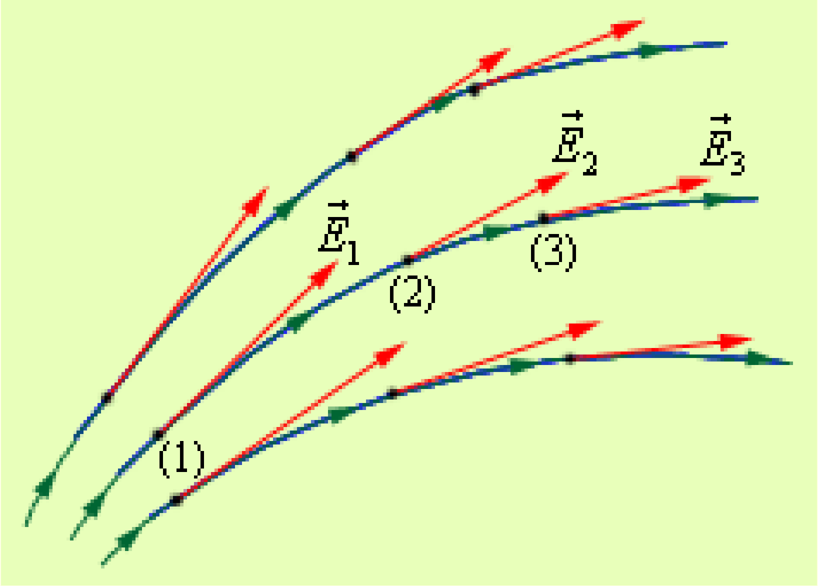
Лекция № 2

Содержание лекции:

- ***Силовые линии***
- ***Поток вектора напряженности электрического поля***
- ***Теорема Гаусса (интегральная форма)***
- ***Применение теоремы Гаусса***

Силовые линии

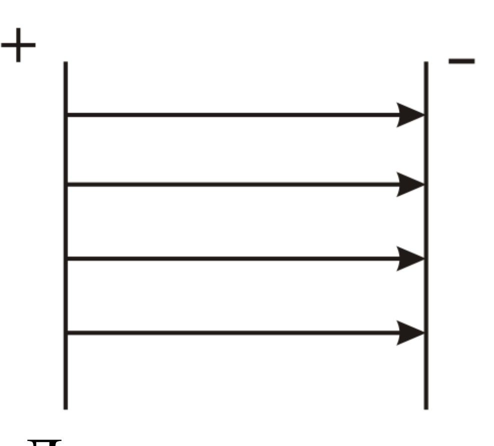
Для наглядного изображения электрических полей используют понятие силовых линий.



Силовая линия – это такая линия, направление касательной к которой в каждой точке, через которую она проходит, совпадает с направлением вектора напряженности поля в той же точке.

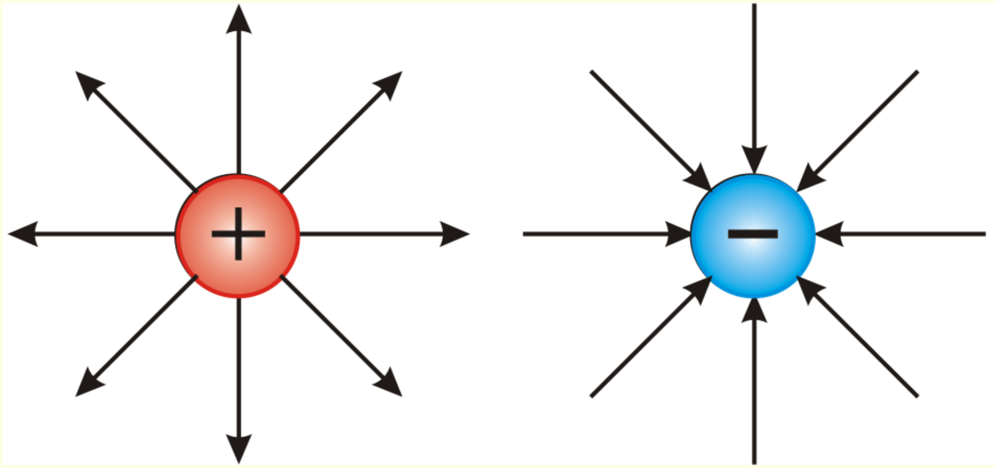
За положительное направление силовой линии принято считать направление самого вектора напряженности.

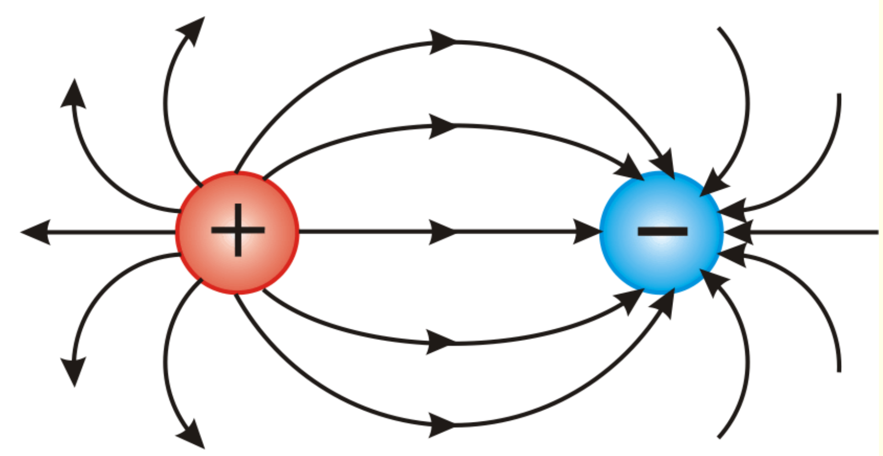
По густоте силовых линий можно судить о величине напряженности электрического поля.



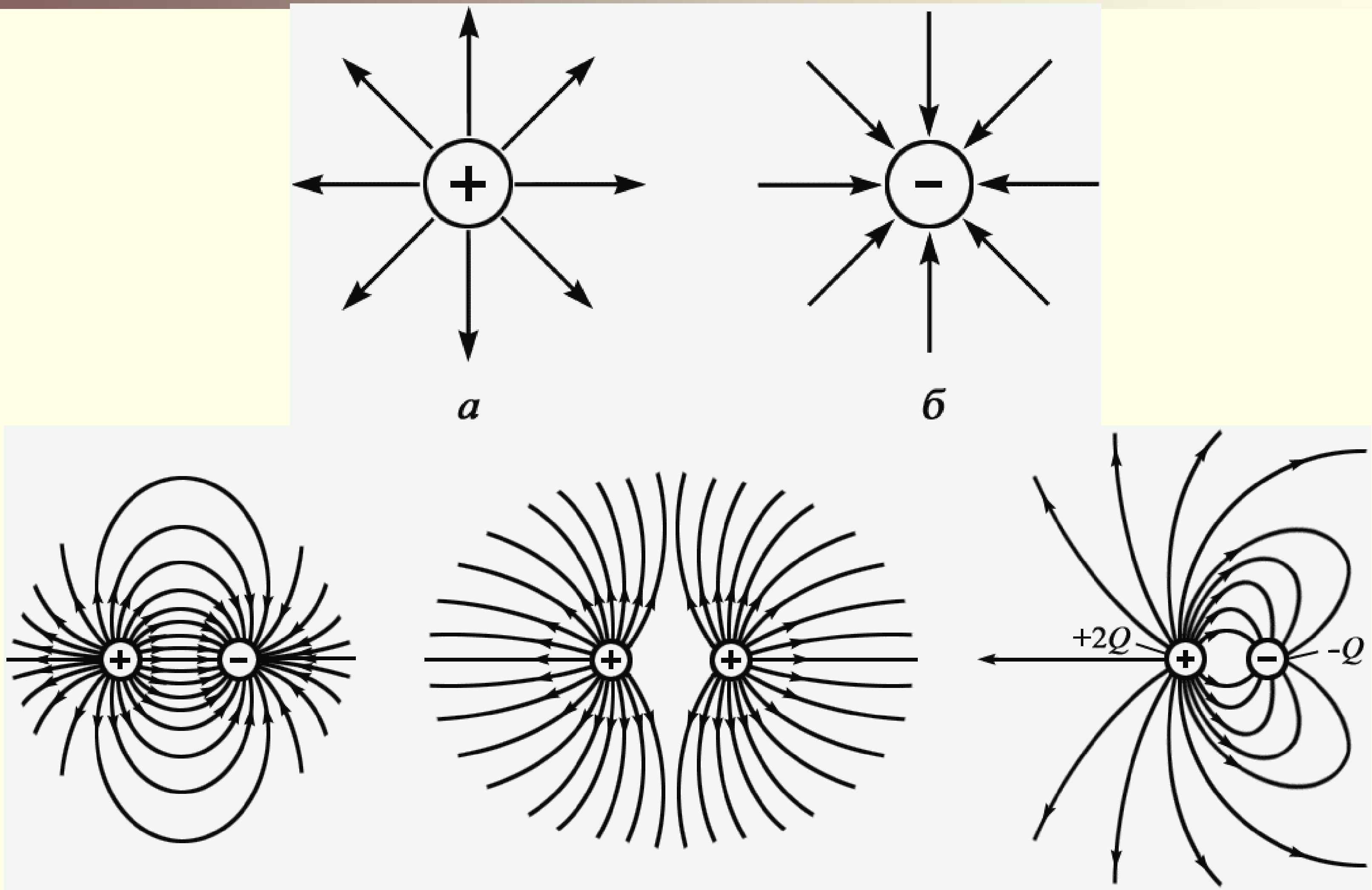
Однородное электростатическое поле изображается параллельными силовыми линиями на равном расстоянии друг от друга (такое поле существует, например, между пластинами конденсатора)

Линии напряженности точечного заряда исходят из положительного заряда и уходят в бесконечность; и из бесконечности входят в отрицательный заряд.



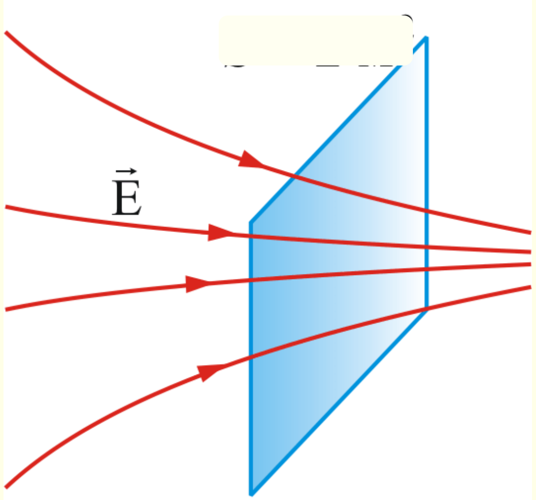


Для системы зарядов силовые линии направлены от положительного заряда к отрицательному



Силовые линии точечного заряда: *а* – положительного; *б* – отрицательного заряда. Диаграммы силовых линий: *в* – два заряда противоположного знака (диполь); *г* – два заряда одного знака; *д* – два заряда, один из которых –*Q*, а другой +2*Q*

Густота силовых линий должна быть такой, чтобы единичную площадку, нормальную к вектору напряженности пересекало такое их число, которое равно модулю вектора напряженности $\left|\vec{E}\right|$, т.е.

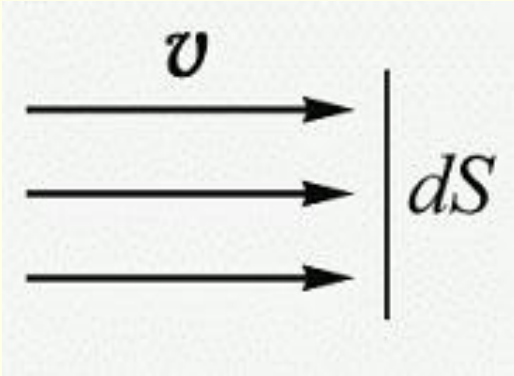


$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\text{число линий}}{\text{площадь } S}.$$

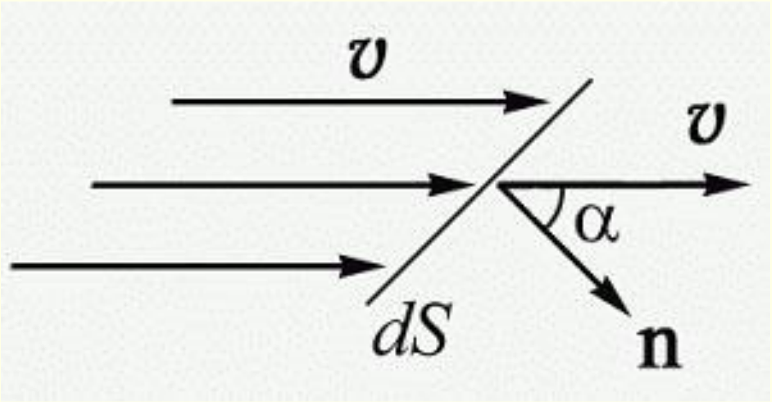
Поток вектора напряженности

Введем понятие потока вектора:
количество (объем) жидкости, протекающей за время dt через площадку dS, перпендикулярную вектору скорости $\vec{\upsilon}$:

$$dV = \upsilon \cdot dS \cdot dt$$



Если площадка расположена под углом α к вектору скорости $\vec{v}$:



$$dV = v_{\perp} \cdot dS \cdot dt =$$

$$= v\,dS\cos(\vec{v},\vec{n})\,dt = (\vec{v},\vec{n}\,dS)\,dt =$$

$$= (\vec{v},\overrightarrow{dS})\,dt$$

Количество (объем) жидкости, протекающей **в единицу времени** через площадку dS

$$\frac{dV}{dt} = \left(\vec{v}, \overrightarrow{dS}\right)$$

Если поверхность S не бесконечно мала:

$$\boxed{\Phi = \int\limits_{(S)} \left(\vec{v}, \overrightarrow{dS}\right)}$$

- поток вектора $\boldsymbol{v}$ через поверхность S

Поток вектора напряженности электрического поля:

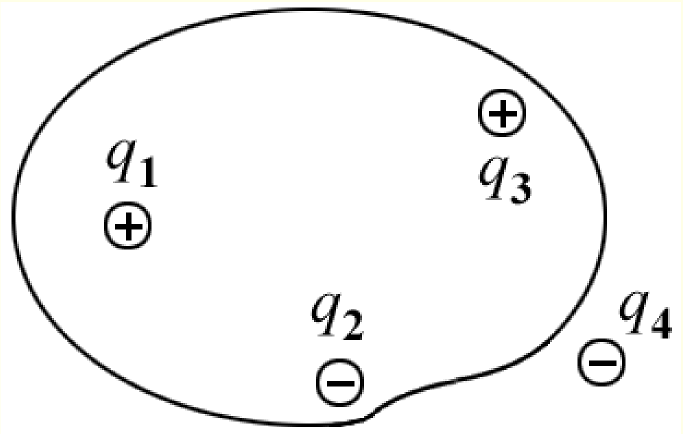
$$\Phi = \int\limits_{(S)} \left(\vec{E}, d\vec{S} \right)$$

- численно равен числу силовых линий, пересекающих поверхность S (**постоянен для любой замкнутой поверхности**)

Так как напряженность поля, созданного в любой точке пространства, зависит от величины заряда, создающего это поле, то поток вектора напряженности электростатического поля через любую площадку, находящуюся в этом поле также зависит от величины заряда.

Теорема Остроградского – Гаусса (теорема Гаусса)

Поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на ε_0.



$$\oint_{(S)} \left(\vec{E}, \overrightarrow{dS}\right) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

Заряды, находящиеся вне поверхности, влияния не оказывают.

Михаил Васильевич Остроградский

(1801-1862)

Российский математик и механик украинского происхождения, признанный лидер математиков Российской империи середины XIX века. Основные работы относятся к прикладным аспектам математического анализа, механики, теории магнетизма, теории вероятностей. Он внёс также вклад в алгебру и теорию чисел.

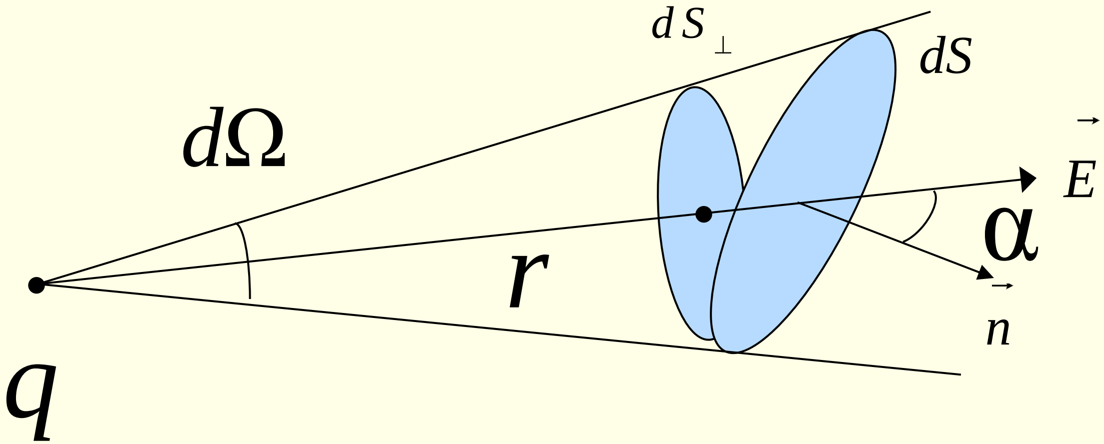
Карл Фридрих Гаусс

(1777–1855)

Немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков». С именем Гаусса связаны фундаментальные исследования почти во всех основных областях математики.

Докажем теорему. Элементарный поток вектора напряженности через площадку *dS* определится соотношением

$$d\Phi_E = EdS\cos\alpha = \frac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0}dS\cos\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$



$$\boxed{d\Omega = \frac{dS}{r^2}\cos\alpha}$$

dΩ – ***телесный угол***, *под которым из точки нахождения заряда видна площадка dS.*

Вычислим поток вектора напряженности через замкнутую поверхность S от точечного заряда q, находящегося внутри этой поверхности.

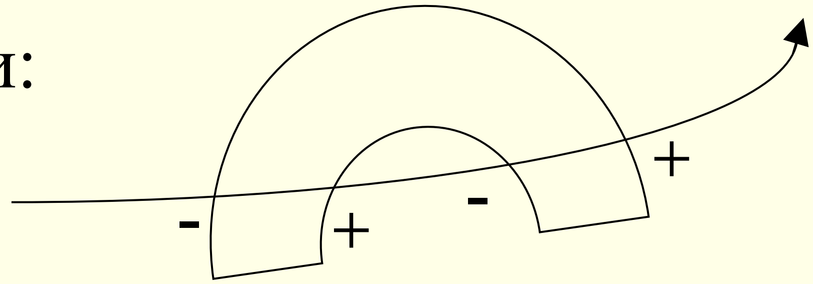
$$\Phi_E = \oint_S d\Phi_E = \oint_{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

Так как $\oint d\Omega = 4\pi$, то $\Phi_E = \oint_{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Как видно, поток вектора напряженности выходящий из поверхности не зависит от формы поверхности, охватывающей заряд и пропорционален величине заряда.

Если заряд находится вне замкнутой поверхности, то каждая силовая линия входит и выходит одинаковое количество раз, т.е. **поток вектора напряженности электрического поля** **равен нулю**.

Графически:



$$\Phi = \sum_i \Phi_i$$

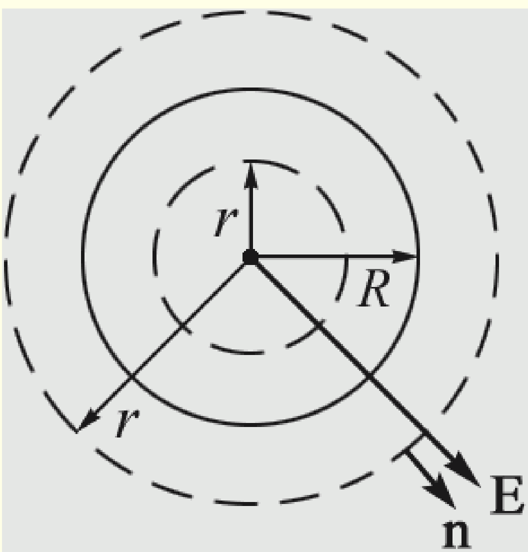
- ***потоки векторов E_i*** через одну и ту же поверхность складываются ***алгебраически***.

Примеры применения теоремы Гаусса для вычисления электростатических полей

Поле равномерно заряженного шара:

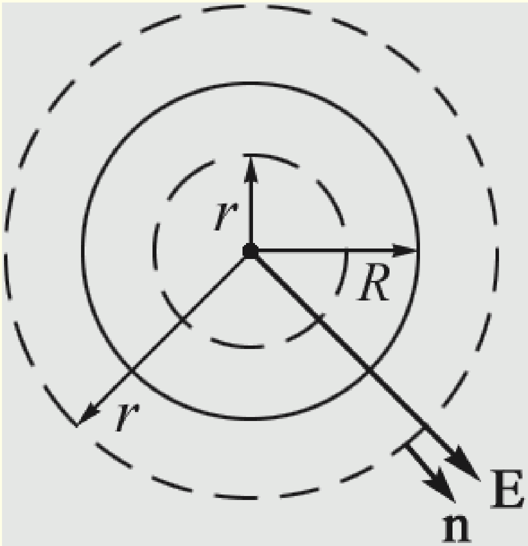
а) внутри шара:

$$\Phi = \oint_{(S)} \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$



$$\frac{\sum q}{\varepsilon_0} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{1}{\varepsilon_0}$$

- заряд «внутреннего» шара радиуса *r* (деленный на ε_0)



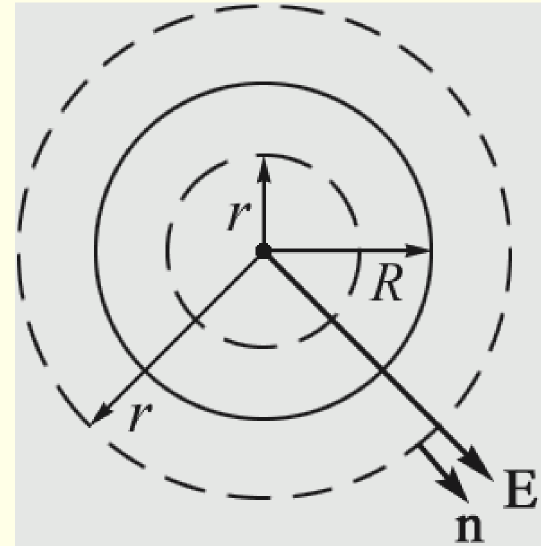
$$\oint\limits_{(S)} \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = E \oint\limits_{(S)} dS = E \cdot 4\pi r^2$$

По теореме Гаусса

$$\boxed{E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$$

б) вне шара:

$$\frac{\sum q}{\varepsilon_0} = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{1}{\varepsilon_0}$$

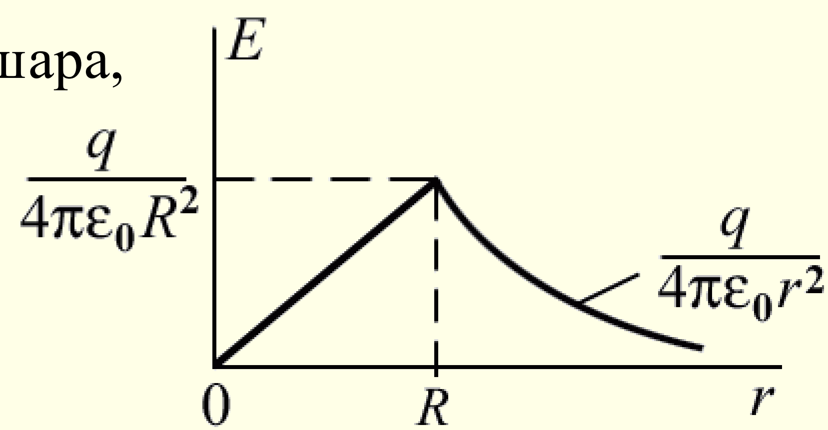


$$\oint_{(s)} \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = E \oint_{(s)} dS = E \cdot 4\pi r^2$$

По теореме Гаусса

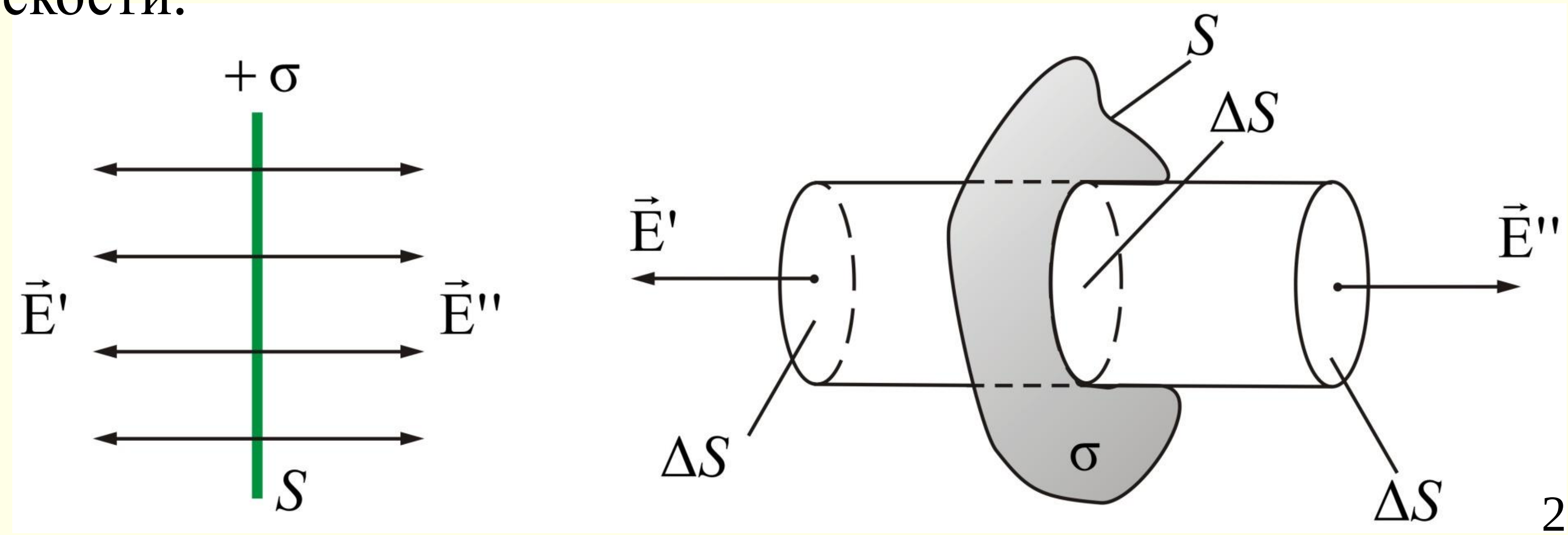
$$\boxed{E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}}$$

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{q_{\text{шара}}}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{r}{R^3}, & r < R - \text{внутри шара}, \\ \dfrac{q_{\text{шара}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r \geq R - \text{вне шара}. \end{cases}$$



Поле бесконечной однородно заряженной плоскости :

Пусть σ во всех точках плоскости *S* одинакова. Заряд *q* – положительный. Напряженность $\vec{E}$ во всех точках будет иметь направление, перпендикулярное плоскости *S* . В симметричных, относительно плоскости точках, напряженность будет одинакова по величине и противоположна по направлению. Представим себе цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости, и основаниями Δ*S*, расположенными симметрично относительно плоскости.

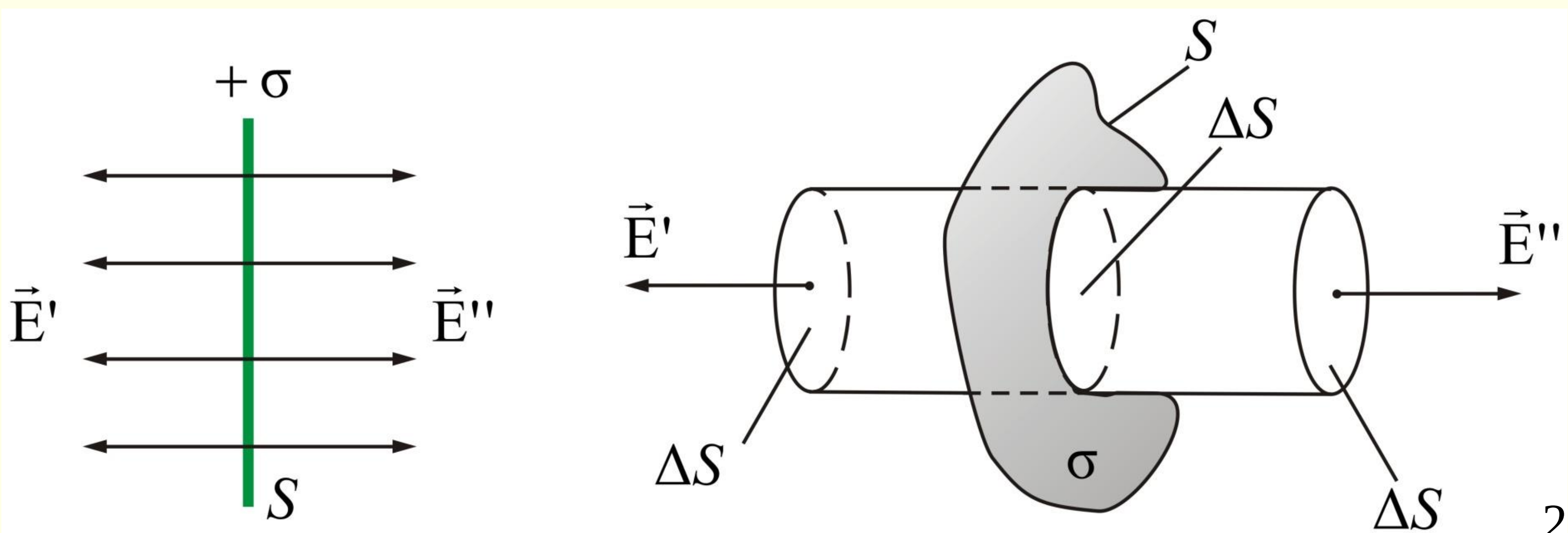


Тогда $E' = E'' = E.$

Поток Φ_E через боковую часть поверхности цилиндра равен нулю, т.к. $E_n = 0.$

Для основания цилиндра $E_n = E.$

Суммарный поток через замкнутую поверхность (цилиндр) будет равен: $\Phi_E = 2\Delta SE.$



По теореме Гаусса $\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = 2\Delta SE = \sigma\Delta S\frac{1}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.}$$

Полученный результат не зависит от длины цилиндра. Это значит, что на любом расстоянии от плоскости

$$E = \mathrm{const}.$$