

Сегодня среда, 9 июля 2014 г.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Лекция 3

Содержание лекции:

- * **Вероятность события**
- * **Распределение Максвелла по скоростям и энергиям**
- * **Барометрическая формула**
- * **Распределение Больцмана**

Вероятность события

Математическое определение вероятности:

вероятность какого-либо события – это предел, к которому стремится отношение числа случаев, приводящих к осуществлению события, к общему числу случаев, при бесконечном увеличении последних.

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n'}{n},$$

n' – число раз, когда
событие произошло,
 n – общее число
опытов.

$$P = 0 \div 1$$

По определению Лапласа: вероятность – отношение числа благоприятных случаев к числу возможных случаев.

Определить распределение молекул по скоростям значит определить: сколько молекул обладает скоростями, лежащими в данном интервале, включающем заданную скорость.

Попытаемся определить число частиц (Δn), скорости которых лежат в определённом интервале значения скорости Δv (от v до $v + \Delta v$). То есть Δn – число благоприятных молекул.

От чего зависит Δn ?

- ▶ в единице объёма число таких благоприятных молекул тем больше, чем больше Δv ;
- ▶ Δn должно быть пропорционально концентрации молекул (n);

► Δn зависит и от значения самой скорости, так как в одинаковых по величине интервалах, но при разных абсолютных значениях скорости, число молекул будет различным.

Итак, получили: $\Delta n = n f(v) \Delta v$

Или, перейдя к пределу: $dn = n f(v) dv$

Здесь $f(v)$ – *функция распределения*.

Физический смысл $f(v)$:

$$\frac{dn}{n} = f(v), \quad \text{при } dv = 1.$$

Т.е., $f(v)$ – имеет смысл вероятности. $f(v)$ показывает, какова вероятность любой молекулы газа в единице объёма иметь скорость, заключённую в единичном интервале, включающем заданную скорость v .

В этом случае $f(v)$ называют плотностью вероятности.

Распределение Максвелла по скоростям и энергиям

Распределение молекул идеального газа по скоростям было получено Максвеллом в 1860 году с помощью методов теории вероятностей.

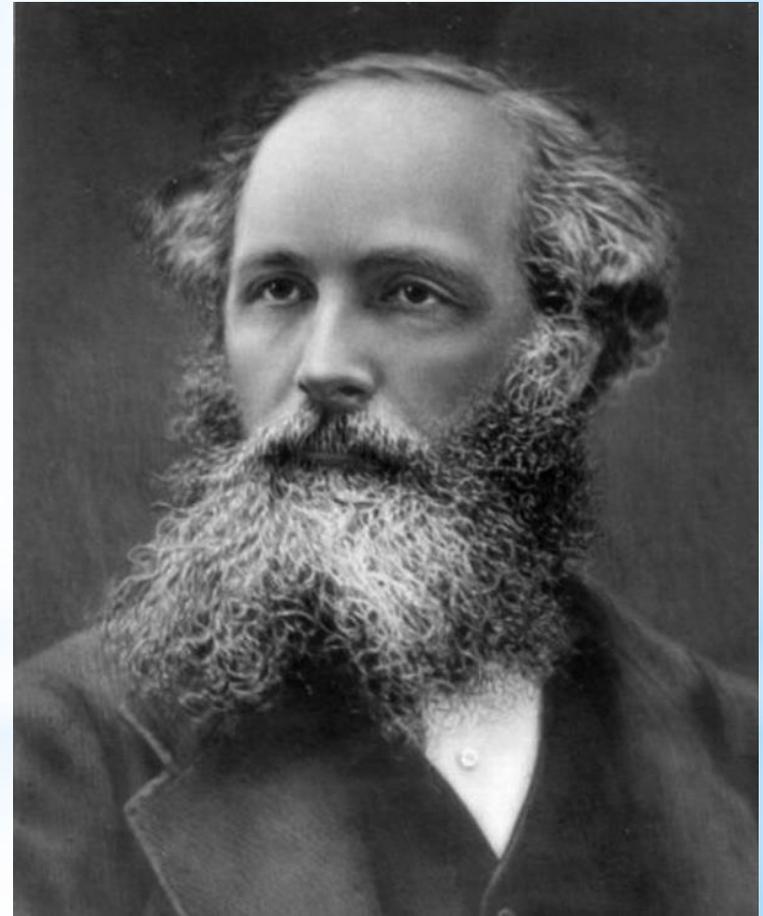
Вывод формулы функции распределения приведен в учебнике

И.В. Савельев. Курс общей физики.
Т.1.- М.: Наука, 1982, с.311-319.

Джеймс Клерк Максвелл

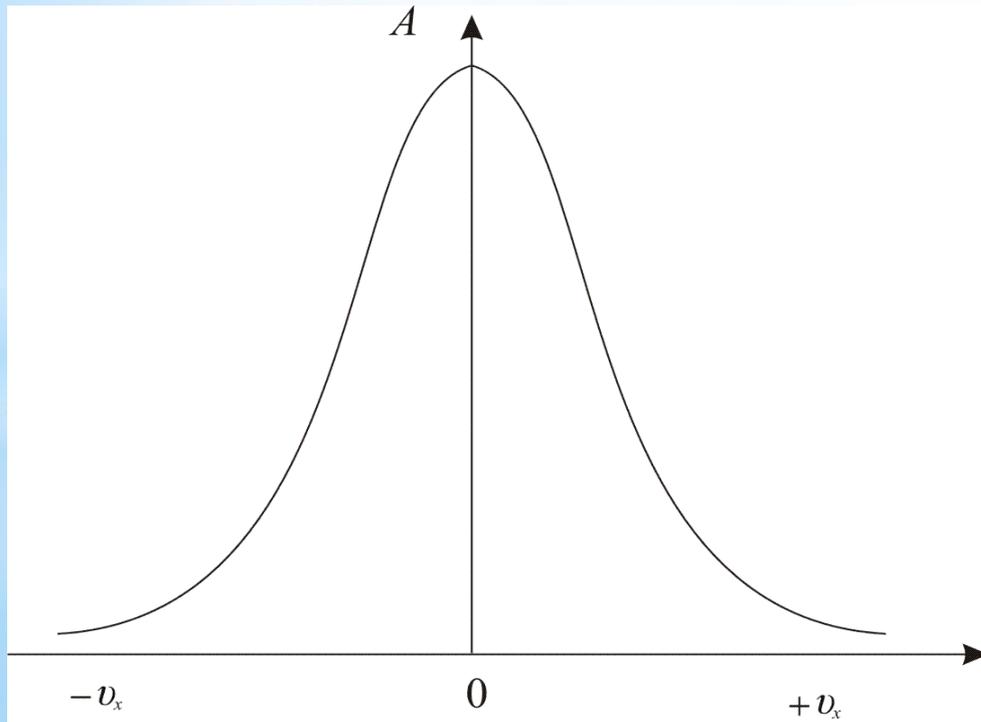
(1831-1879)

Английский физик, создатель классической электродинамики, один из основателей статистической физики, автор принципа цветной фотографии, математик и механик.



Для составляющей скорости v_x : $dn_x = nf(v_x)dv_x$.

$$f(v_x) = \frac{dn_x}{ndv_x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} = A_1 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}},$$



$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

При $v_x = 0$, $f(v_x) = A_1$.

Закон Максвелла – распределение молекул по абсолютным значениям скоростей:

$$\frac{dn}{n} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv$$

- доля всех молекул единицы объёма, скорости которых лежат на интервале от v до $v + dv$

При $dv = 1$ получаем плотность вероятности, или функцию распределения молекул по скоростям:

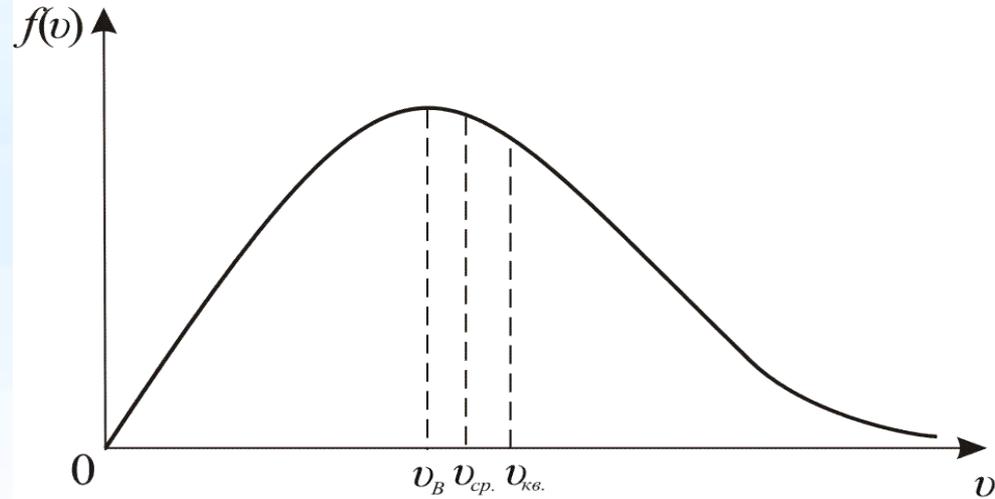
$$f(v) = \frac{dn}{ndv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

Эта функция обозначает долю молекул единицы объёма газа, абсолютные скорости которых заключены в единичном интервале скоростей, включающем данную скорость.

Введем обозначение

$$A = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}},$$

Тогда $f(v) = Ae^{-\frac{mv^2}{2kT}}$.



► Вид физического распределения для каждого газа зависит от рода газа (m) и от параметра состояния (T). Давление P и объём газа V на распределение молекул не влияют.

► Распределение Максвелла характеризует распределение молекул по значениям кинетической энергии (то есть показывает, какова вероятность при данной температуре иметь именно такое значение кинетической энергии).

Скорость, соответствующая максимуму распределения есть наиболее вероятная скорость

$$v_v = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \quad \text{— для одной молекулы.}$$

$$v_v = \sqrt{\frac{2kN_A T}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \quad \text{— для одного моля газа.}$$

$$v_{\text{КВ}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} \quad \text{— для одной молекулы.}$$

$$v_{\text{КВ}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \quad \text{— для одного моля газа.}$$

Средняя арифметическая скорость – $v_{\text{ср}}$:

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dN = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v n f(v) dv$$

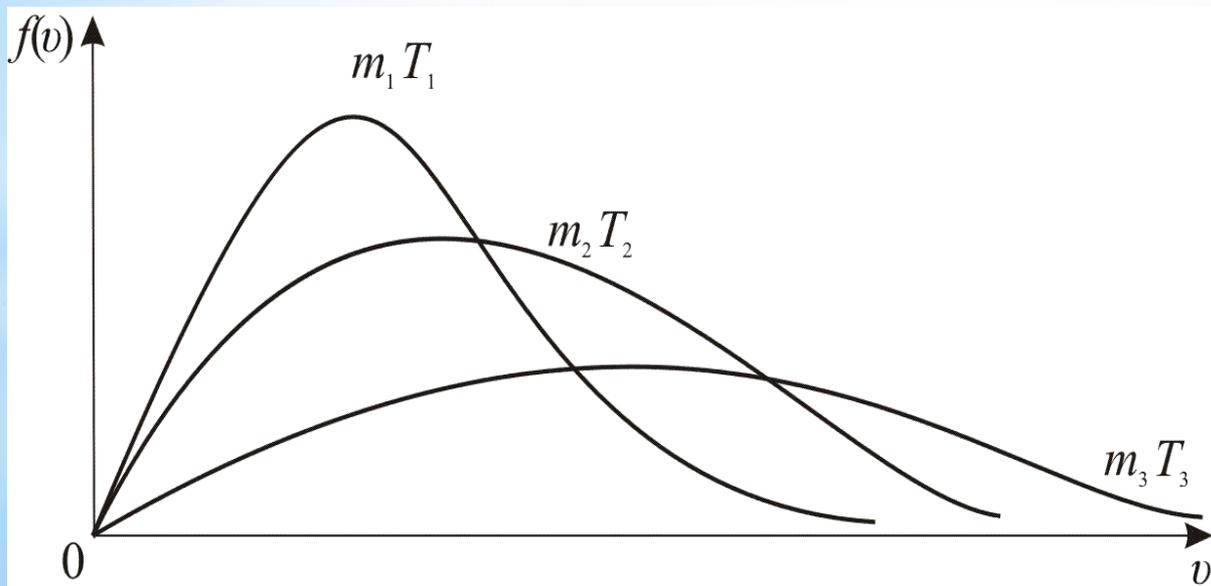
$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} \approx \sqrt{\frac{2,25kT}{m_0}} \quad \text{– для одной молекулы.}$$

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx \sqrt{\frac{2,25RT}{\mu}} \quad \text{– для одного моля газа.}$$

В случае смеси газов в пределах каждого сорта газа будет своё распределение со своим m_0 :

$$f(v_v) \approx \sqrt{\frac{m_0}{T}}, \text{ кроме того } v_v \approx \sqrt{\frac{T}{m_0}}.$$

$m_1 > m_2 > m_3$ ($T = \text{const}$) или $T_1 > T_2 > T_3$ ($m = \text{const}$).



Площадь под
кривой
 $f(v) = \text{const} = 1$.

Максвелловский закон распределения по скоростям и все вытекающие следствия справедливы только для газа в равновесной системе. Закон статистический и выполняется тем лучше, чем больше число молекул!!!!

$$U = \frac{v}{v_B}$$

$$\frac{dn}{ndU} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-U^2} U^2$$

Формула Максвелла для относительных скоростей

Распределение Максвелла по кинетическим энергиям теплового движения молекул:

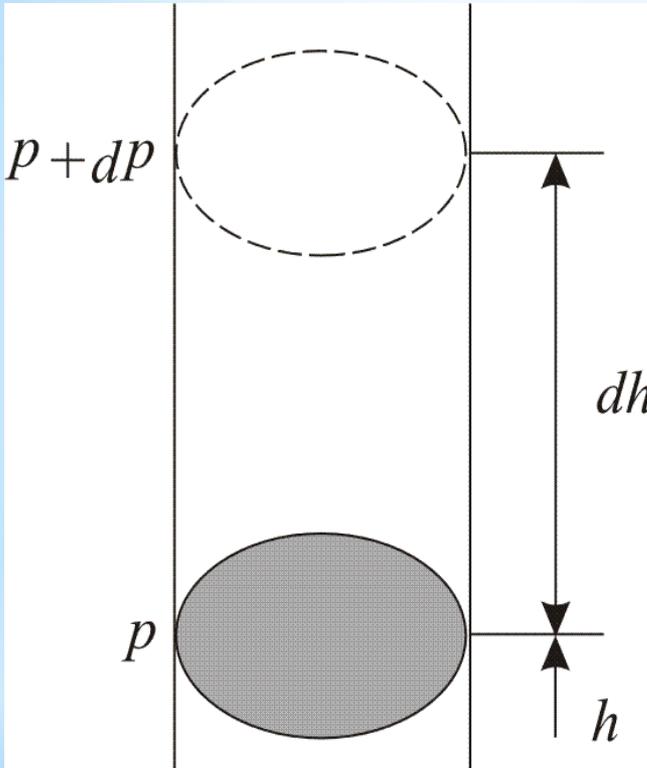
$$E_{\kappa} = \frac{m_0 v^2}{2} \quad \text{Найдем связь между } dv \text{ и } dE_{\kappa}, v \text{ и } E_{\kappa}:$$

$$dE_{\kappa} = m_0 v dv = \sqrt{2E_{\kappa} m_0} dv, \quad v = \sqrt{\frac{2E_{\kappa}}{m_0}}$$

Получаем:

$$dN = 2\pi N (\pi k T)^{-3/2} \sqrt{E_{\kappa}} \exp\left(-\frac{E_{\kappa}}{kT}\right) dE_{\kappa}$$

Барометрическая формула



$$dh > 0, dP < 0$$

$$P - (P + dP) = \rho g dh,$$

ρ – плотность газа на высоте h

Тогда

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}},$$

где P_0 – давление на высоте $h = 0$.

P убывает с высотой тем быстрее, чем тяжелее газ
(чем больше μ)

Распределение Больцмана

$P = nkT$ - основное уравнение МКТ. $P_0 = n_0 kT$

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}$$

Так как $\mu = m_0 N_A$, $R = N_A k$, то

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}$$

При высоких температурах молекулы оказываются распределёнными по высоте почти равномерно, а плотность молекул медленно убывает с высотой.

$$n = n_0 e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

– *функция распределения
Больцмана*

Здесь n_0 – число молекул в единице объёма в том месте, где $E_n = 0$.

Больцман доказал, что данное соотношение справедливо не только для случая, когда молекулы движутся в поле силы тяжести, но и справедлива для любого силового поля с потенциальной функцией U

***Опыт Перрена (1870–1942 гг.).
Определение числа Авогадро***

Самостоятельно!!!



Конец лекции