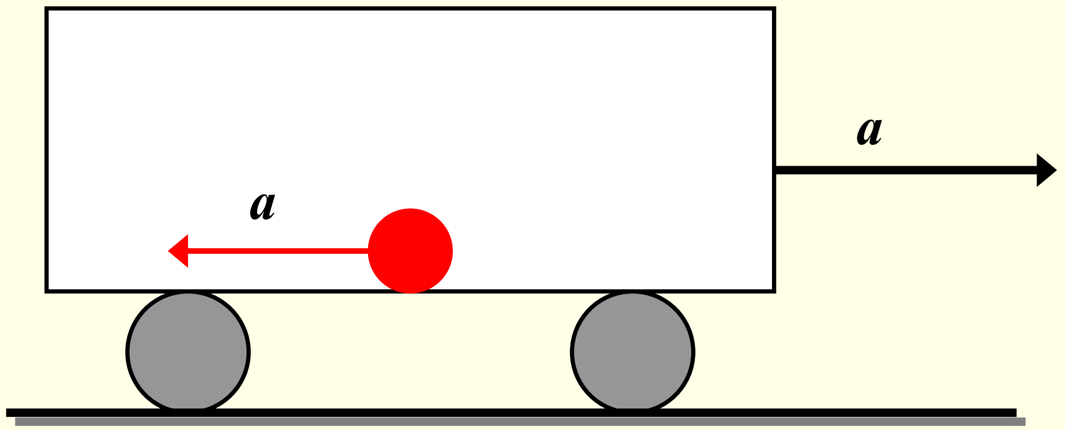
Сегодня понедельник, 23 марта 2020 г.

Лекция № 9

Понятие о неинерциальных системах отсчета

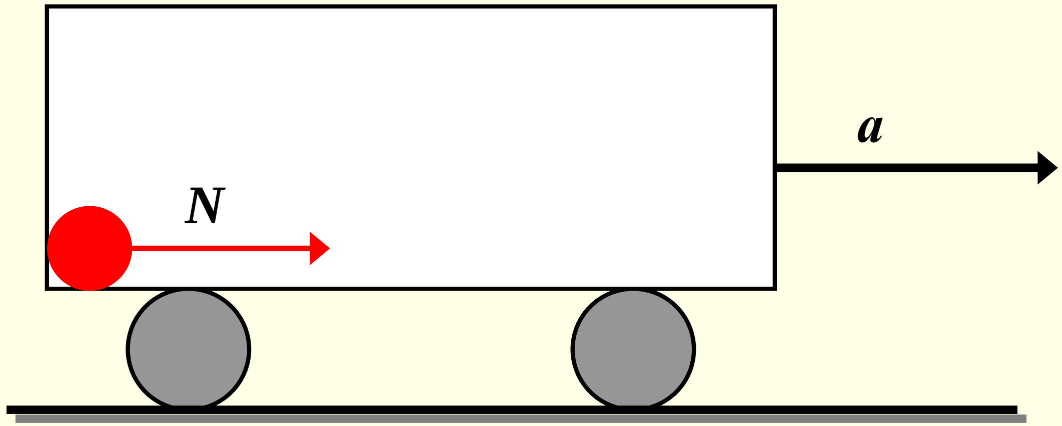
Неинерциальные системы отсчета (СО) – системы отсчёта, движущиеся относительно инерциальных систем отсчета с ускорением.

Геоцентрическая система отсчета (жёстко связанная с Землёй) в общем случае является неинерциальной вследствие суточного вращения Земли. Максимальное ускорение точек Земли не превосходит 0,5% g. Следовательно, в большинстве практических задач геоцентрическую СО считают инерциальной.



Поезд двинулся с ускорением *a*, шарик приобрёл ускорение *a*.

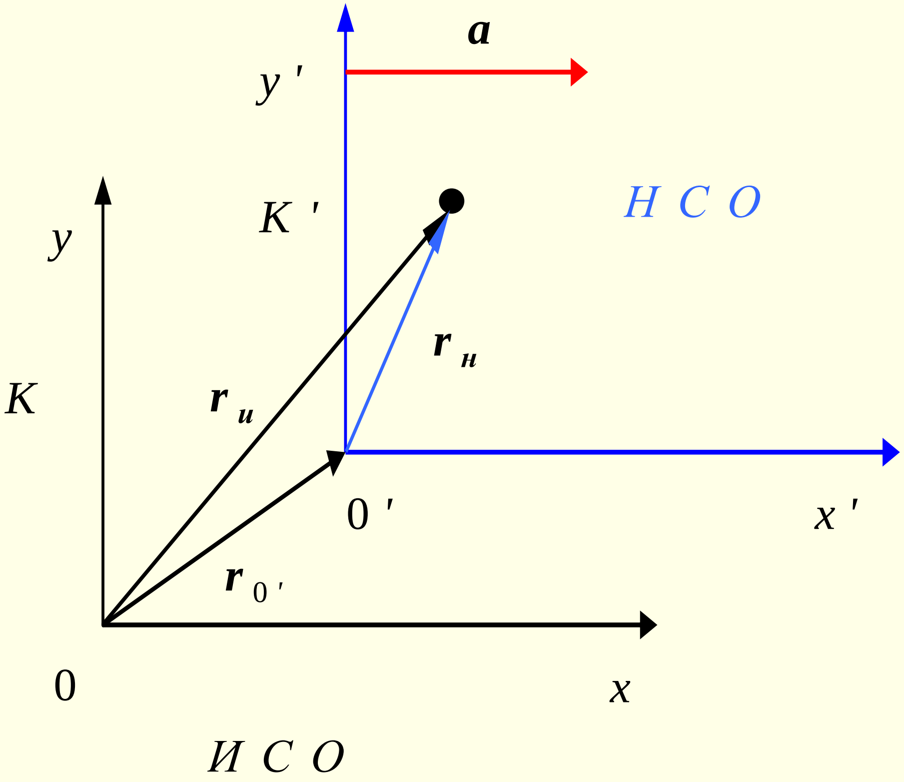
В неинерциальных СО *первый закон Ньютона* нарушается: тело получает взаимодействие без взаимодействия с другими телами.



Поезд движется с ускорением, шарик у стенки, на него действует сила реакции опоры ***N***, но шарик находится в покое.

В неинерциальных СО *второй закон Ньютона* нарушается: при наличии взаимодействия тело не получает ускорение.

Принцип Даламбера

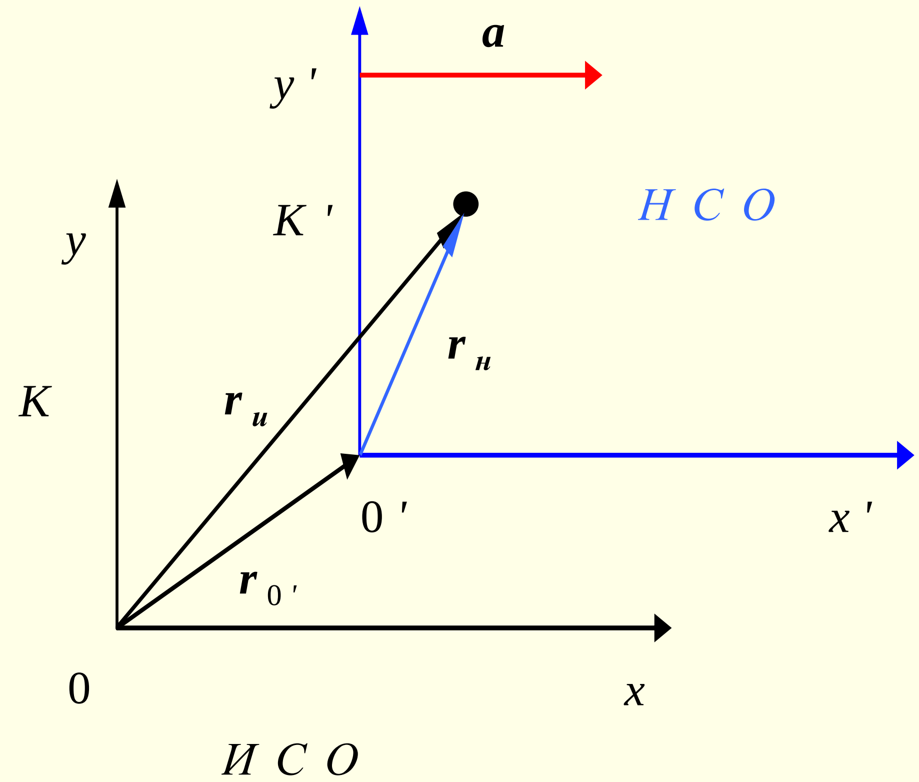


В момент $t = 0$ системы K и K' совпадают. Система K' начинает двигаться относительно K с ускорением $\boldsymbol{a}$.

$r_и$ – радиус-вектор материальной точки в системе K,

$r_н$ – радиус-вектор материальной точки в системе K',

$r_{0'}$ – радиус-вектор начало координат системы K' в системе K.



В момент t:

$$\vec{V}_{0'} = \vec{a}t; \quad \vec{r}_и = \vec{r}_{0'} + \vec{r}_н,$$

Продифференцируем полученное уравнение по времени:

$$\frac{d\vec{r}_{и}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{н}}{dt}, \quad dt = dt'.$$

Получим:

$$\vec{V}_{и} = \vec{V}_{0'} + \vec{V}_{н}.$$

Продифференцируем полученное уравнение по времени:

$$\frac{d\vec{V}_и}{dt} = \frac{d\vec{V}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{V}_н}{dt}, \quad \vec{V}_{0'} = \vec{a}t$$

Получим: $$\vec{a}_и = \vec{a} + \vec{a}_н, \Rightarrow \vec{a}_н = \vec{a}_и - \vec{a},$$

$a_н$ – ускорение материальной точки относительно НСО,
$a_и$ – ускорение материальной точки относительно ИСО,
a – ускорение НСО относительно ИСО.

Умножим полученное уравнение на *m*:

$$m\vec{a}_{н} = m\vec{a}_{и} - m\vec{a},$$

$m\vec{a}_{и} = \vec{R}$ – векторная сумма сил взаимодействия,

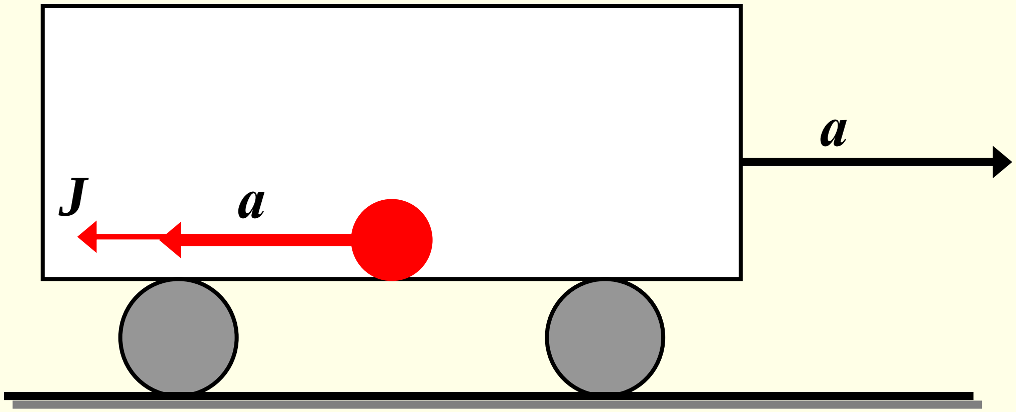
$-m\vec{a} = \vec{J}$ – сила инерции.

$$\boxed{m\vec{a}_{н} = \vec{R} + \vec{J} - \textit{принцип Даламбера.}}$$

Произведение массы тела на его ускорение относительно НСО равно векторной сумме сил взаимодействия и силы инерции.

Сила инерции – фиктивная сила в том смысле, что она не обусловлена взаимодействием с другими телами, а вызвана ускоренным движением НСО относительно ИСО.

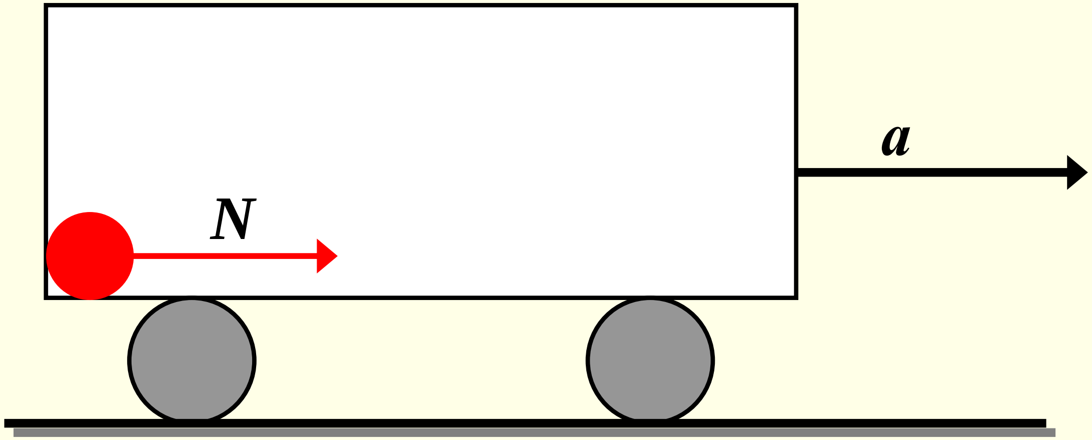
Т.к. сила инерции обусловлена ускоренным движением системы отсчёта относительно другой СО, то она не подчиняется *третьему закону Ньютона*.



$$\vec{a}_{и} = \vec{a}_{н} + \vec{a} \qquad m\vec{a}_{и} = m\vec{a}_{н} + m\vec{a}$$

$$m\vec{a}_{н} = \underbrace{m\vec{a}_{и}}_{R} \underbrace{- m\vec{a}}_{J}.$$

$$\frac{\vec{J}}{m} = -\vec{a}.$$



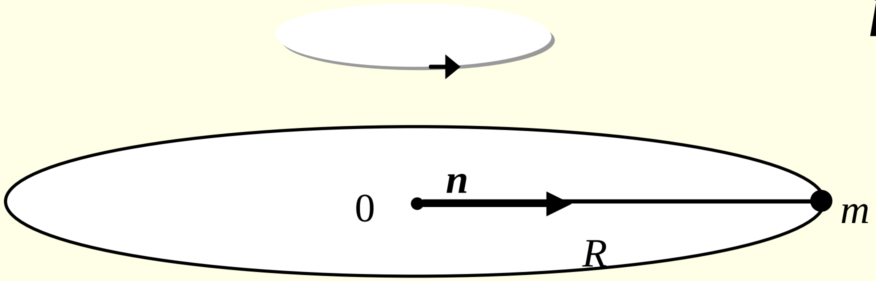
$$\left|\vec{J}\right| = \left|\vec{N}\right|, \quad \vec{J} = -m\vec{a}.$$

$$m\vec{a}_{н} = \vec{R} + \vec{J}.$$

Сила инерции во вращающихся системах отсчёта

Центробежная сила инерции во вращающихся СО зависит от местоположения тела в СО.

$\boldsymbol{n}$ – единичный орт.



$$m\vec{a}_{н} = m\vec{a}_{и} \underbrace{- m\vec{a}}_{J}, \quad \vec{J} = -m\left(\vec{a}_{и} - \vec{a}_{н}\right).$$

Тело m покоится относительно диска (НСО), т.е. вращается вместе с диском:

$$\vec{a}_н = 0,$$

$$\vec{a}_и = -\omega^2 R\vec{n}.$$

$$\vec{J} = m\omega^2 R\vec{n}, \quad \vec{R} = R \cdot \vec{n} \Rightarrow \vec{J}_{ц.б} = m\omega^2 \vec{R}.$$

$\boldsymbol{J}_{ц.б.}$ - *центробежная сила инерции.*

Свойства центробежной силы:

1) величина центробежной силы инерции ($F_{ц.б}$) зависит от положения тела во вращающейся СО,

2) величина $F_{ц.б}$ не зависит от скорости тела относительно вращающейся СО,

3) $F_{ц.б}$ является консервативной.

$$dA = \vec{F}_{ц.б} d\vec{R}; \quad dA = m\omega^2 \vec{R} \cdot d\vec{R}.$$

$$\vec{R} \cdot d\vec{R} = \frac{d\vec{R}^2}{2}, \quad \vec{R}^2 = \vec{R} \cdot \vec{R} \cos\angle\vec{R}, \vec{R} = R^2, \quad \frac{dR^2}{2} = R \cdot dR.$$

$$dA = m\omega^2 R \cdot dR.$$

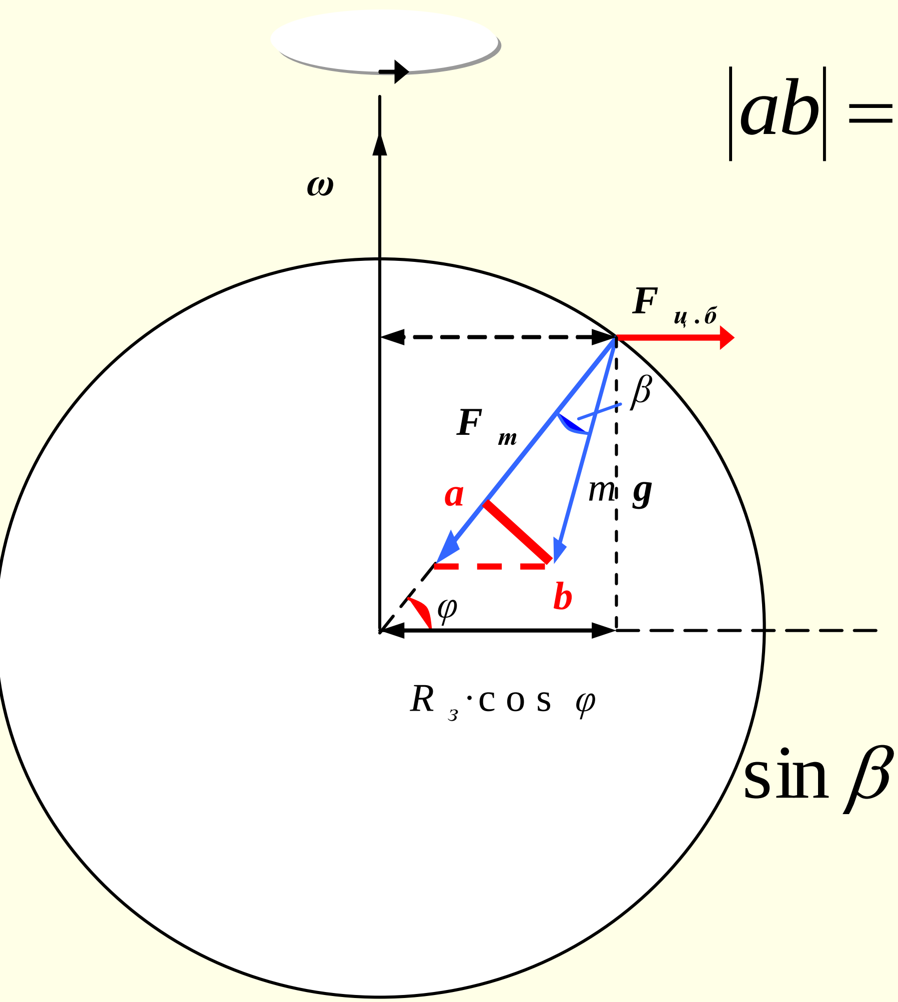
$$A_{12} = \int_{R_1}^{R_2} m\omega^2 R \cdot dR = \left. \frac{m\omega^2 R^2}{2} \right|_{R_1}^{R_2} = \frac{m\omega^2 \left(R_2^2 - R_1^2 \right)}{2},$$

т.е. не зависит от формы пути.

Из-за $F_{ц.б}$ направления $F_{тяжести}$ и $F_{тяготения}$ не совпадают.

$$|ab| = mg\sin\beta,$$

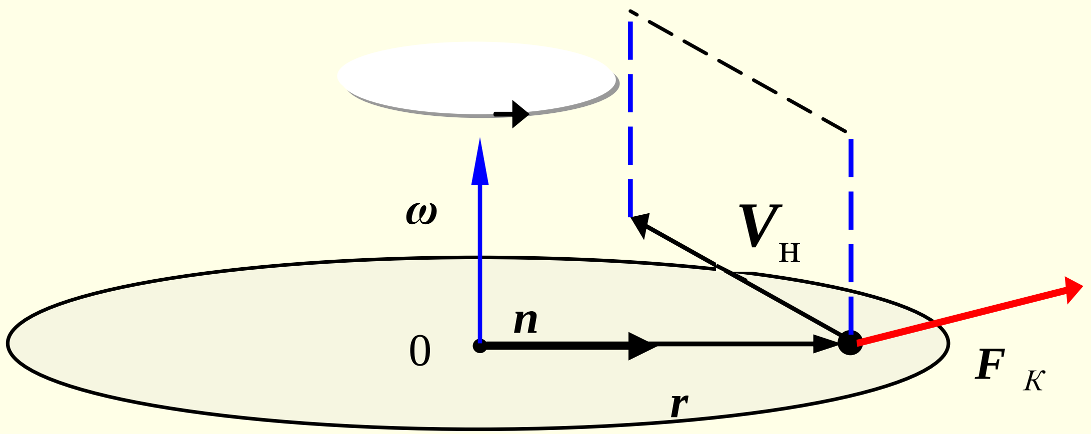
$$|ab| = F_{ц.б}\sin\varphi = m\omega^2 R_з \cos\varphi \sin\varphi.$$



$$\sin\beta = \frac{\omega^2 R_з \cos\varphi \sin\varphi}{g} = \frac{\omega^2 R_з \sin 2\varphi}{2g}.$$

$$\sin\beta = 0{,}0018\sin 2\varphi.$$

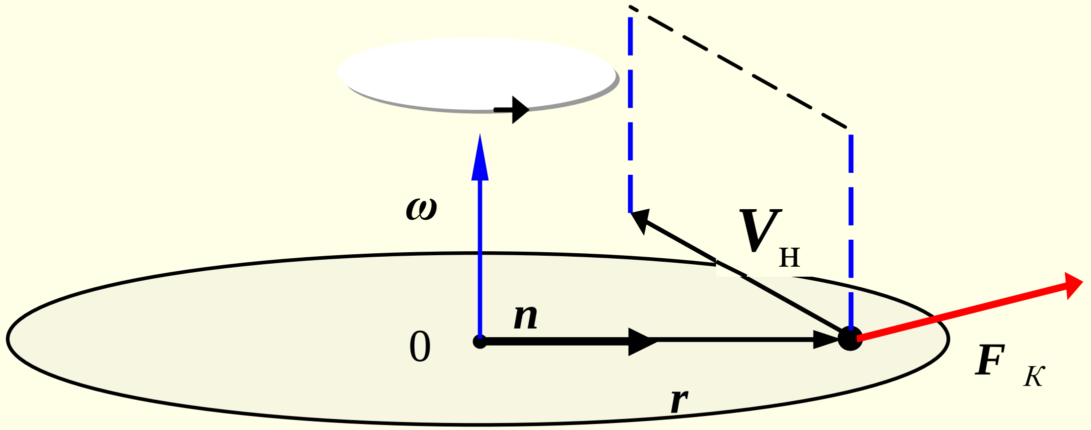
Сила Кариолиса



$V_н$ – скорость движения материальной точки относительно вращающейся СО – НСО, направление $V_н$ произвольное.

На эту точку действует сила, обусловленная инерцией

$$\left|F_{\text{К}}\right| \sim V_{\text{н}} \cdot \omega \sin \angle \underbrace{\vec{V}_{\text{н}}, \vec{\omega}}_{90^0} = V_{\text{н}} \cdot \omega.$$



Скорость точки относительно ИСО:

$$\vec{V}_{и} = \vec{V}_{н} + \vec{V} = \vec{V}_{н} + [\vec{\omega}, \vec{r}].$$

$$\vec{J} = -m(\vec{a}_{и} - \vec{a}_{н}).$$

Пусть $\vec{V}_н \uparrow\uparrow \vec{V}.$

$$\vec{a}_и = -\frac{\vec{V}_и^{\,2}}{r}\vec{n} = -\frac{V_и^2}{r}\vec{n} = -\frac{\left(V_н + \omega r\right)_и^2}{r}\vec{n}.$$

$$\vec{a}_н = -\frac{\vec{V}_н^{\,2}}{r}\vec{n} = -\frac{V_н^2}{r}\vec{n}.$$

$$\vec{J} = m\left(\frac{V_н^2}{r} + 2\frac{V_н \omega r}{r} + \frac{\omega^2 r^2}{r} - \frac{V_н^2}{r}\right)\vec{n} = m\left(2V_н\omega + \omega^2 r\right)\vec{n}.$$

$$\vec{F}_{ц.б} = m\omega^2 r^2 \vec{n}.$$

$$\vec{F}_{К} = m2V_{н}\omega\vec{n}.$$

В общем случае $$\vec{F}_{К} = 2m\left[\vec{V}_{н} \cdot \vec{\omega}\right].$$

Если материальная точка движется во вращающейся СО со скоростью $V_н$, то на материальную точку действует сила Кариолиса

$$\boxed{\vec{F}_{К} = 2m\left[\vec{V}_{н} \cdot \vec{\omega}\right].}$$

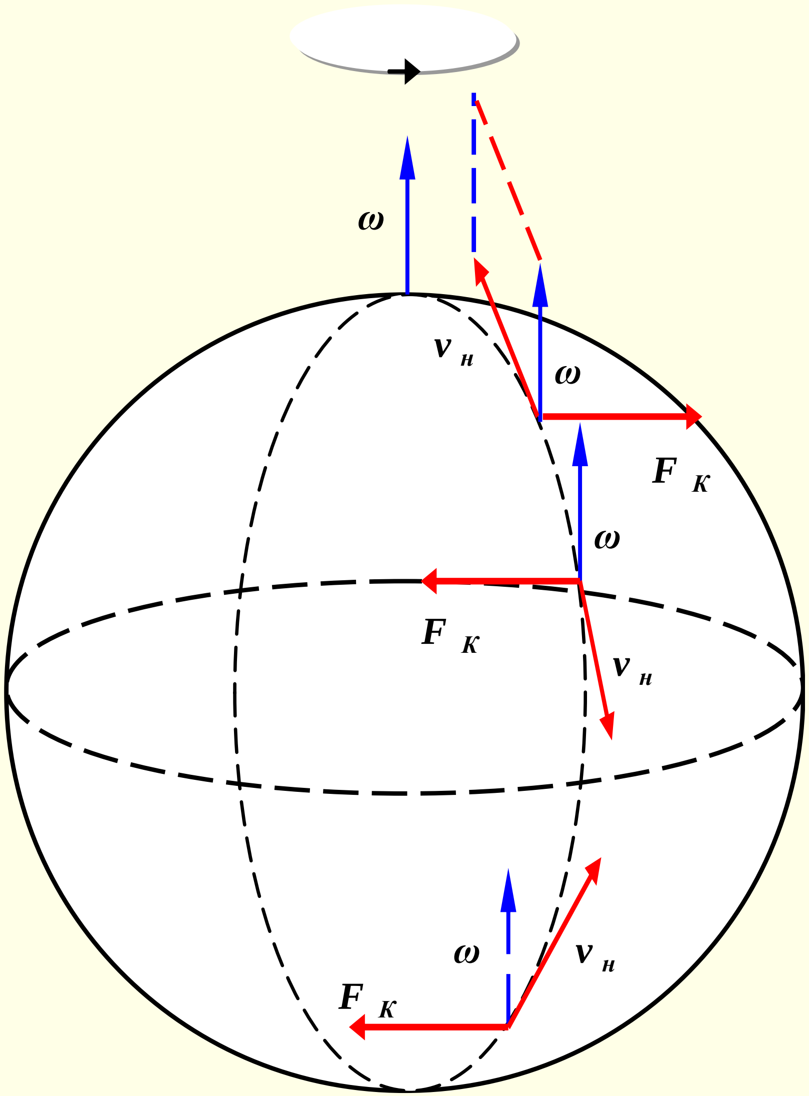
Свойства силы Кариолиса:

• величина F_K не зависит от положения материальной точки во вращающейся СО,

• величина F_K зависит от скорости $\mathbf{V}_н$,

• $\vec{F}_K \perp \vec{V}_н \Rightarrow$ F_K работы не совершает. Эта сила называется ***гироскопической***.

Закон Бэра

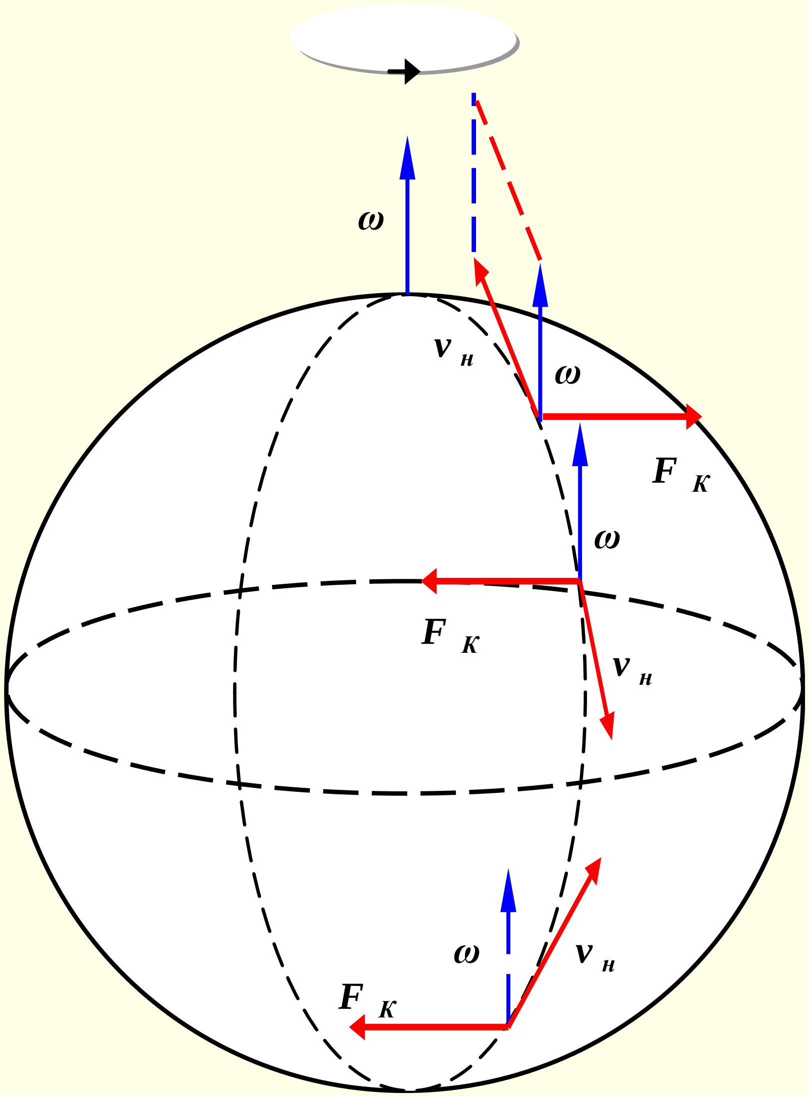


В северном полушарии.

Если тело движется на север - $\boldsymbol{F_К}$ направлена на восток.

Если тело движется на юг - $\boldsymbol{F_К}$ направлена на запад.

Следовательно, правый берег рек подмывается сильнее; правые рельсы железных дорог по движению изнашиваются сильнее.



В южном полушарии.

$\boldsymbol{F_К}$ направлена влево по отношению к направлению движения $\boldsymbol{V}_{н}$.

Эквивалентность масс

$$F = G\frac{m_g M}{R_З^2} = m_g g$$

m_g – гравитационная (тяготеющая) масса

$$a = \frac{F}{m_{in}} = G\frac{M}{R_З^2}\frac{m_g}{m_{in}} = g\frac{m_g}{m_{in}}$$

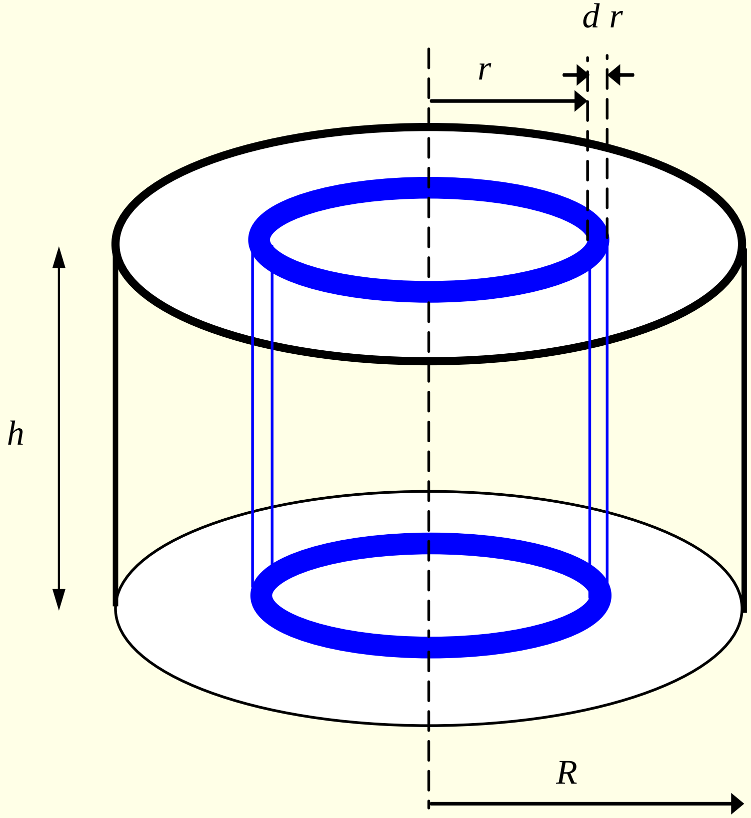
m_{in} – инертная масса

$a = g$ следовательно, $m_g = m_{in}$

1867 г. Ньютон доказал это равенство с точностью до 10^{-3}.
1901 г. венгерский физик Этвеш получил такое совпадение с точностью до 10^{-8}.
1964 г. американский ученый Дикке улучшил точность измерения в 300 раз.

Тождественность инерциальной и гравитационной масс Эйнштейн положил в основу общей теории относительности.

Расчет момента инерции сплошного цилиндра радиуса R, высотой h.



Разобьем на полые цилиндры $r, r + dr, \quad dr \to 0.$

$$dr << r \Rightarrow dJ = r^2 dm,$$

dm – масса всего полого цилиндра.

$$dV = 2\pi rhdr \Rightarrow dm = 2\pi rh\rho dr \Rightarrow$$

$$dJ = 2\pi h\rho r^3 dr \Rightarrow$$

$$J = \int dJ = 2\pi h\rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi hR^4 \rho, \left(V = \pi R^2 h\right) \Rightarrow \qquad J = \frac{mR^2}{2}.$$

Конец лекции