

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ДОМАШНИХ РАБОТ

1. Домашние работы выполняются **каждая в отдельной тетради**.
2. **На обложке тетради** должны быть указаны **фамилия, имя и отчество, номер группы, название и номер домашней работы и номер варианта**.
3. **Задачи с решениями** должны следовать **строго по порядку**.
4. **Каждая задача** должна начинаться **с нового листа**.
5. **В начале листа** должно быть записано **полное условие задачи**, далее краткое условие и решение задачи. Решение должно быть с обязательным пояснением хода решения и обоснованием используемых законов.

# Тема. Кристаллографические проекции

## 1. Основные понятия и определения

Для решения различных задач кристаллографии и рентгеноструктурного анализа, таких, как

1. определение взаимной ориентации плоскостей и направлений,
2. нахождение углов между ними,
3. изображение симметрии,
4. анализ текстуры,

используют кристаллографические проекции - особое графическое изображение кристаллов. Они позволяют производить количественные расчеты соотношений между углами проще, чем с помощью формул.

Метод кристаллографических проекций основан на законе постоянства углов - углы между определенными гранями и ребрами кристалла всегда постоянны. В кристалле можно перенести все ребра к грани параллельно самим себе в одну точку пространства. Такая совокупность плоскостей и направлений, параллельных плоскостям и направлениям в кристалле и проходящая через одну точку, получила название **кристаллического комплекса**, а сама точка называется **центром комплекса**. Чаще рассматривают не кристаллический комплекс, а полярный (обратный). Полярный комплекс, получают из кристаллического путем замены плоскостей нормальными к ним, а направлений - перпендикулярными к ним плоскостями. На рис. 1 показано расположение шести плоскостей куба (а), кристаллический комплекс для этих плоскостей - три плоскости, параллельные граням куба и проходящие через точку  $O$  (б), полярный комплекс - совокупность нормалей к этим плоскостям (в).

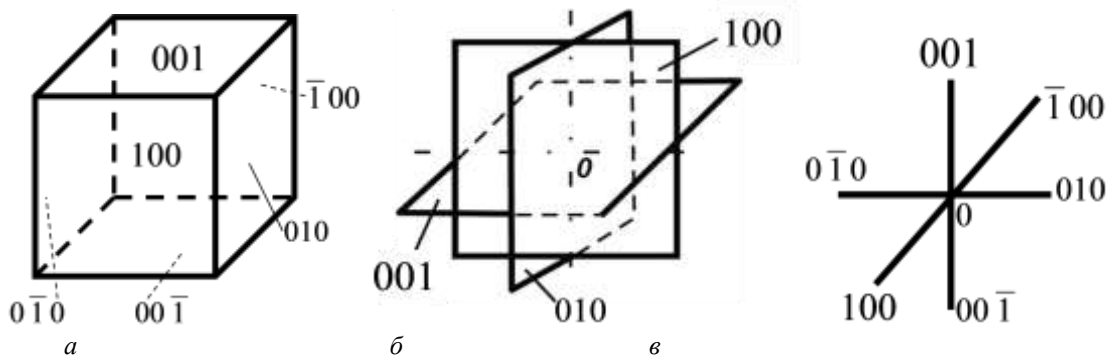
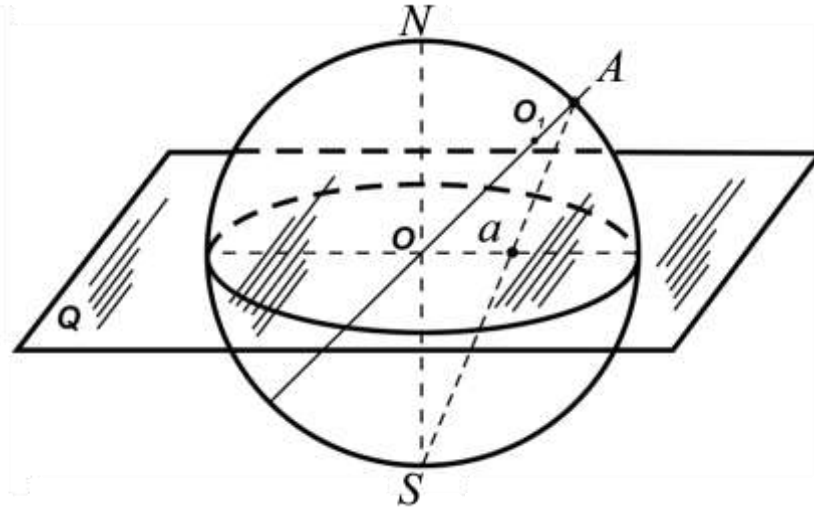


Рис. 1. Куб (а), его кристаллический (б) и полярный комплекс (в)

Существует несколько видов кристаллографических проекций, наиболее распространенный среди них являются стереографическая и тесно, связанная с ней гномостереографическая проекции (от греческого слова "гномон" - нормаль).

Стереографическая и гномостереографическая проекции строятся по общим законам, только в первом случае кристаллический многогранник заменяют кристаллическим (прямым) комплексом, а во втором – полярным (обратным).

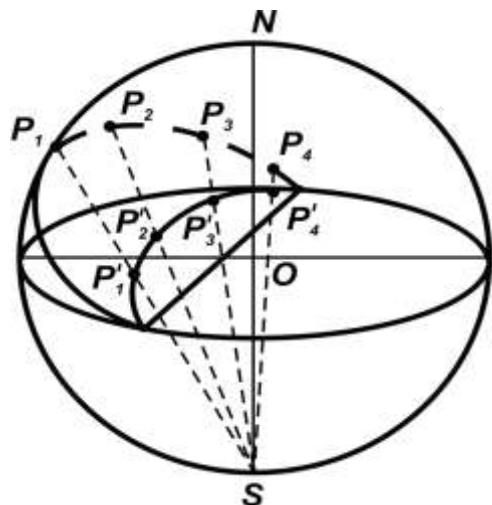
Построение стереографической (гномостереографической) проекции производится в два этапа. Сначала строится сферическая проекция (проекция комплекса на поверхности сферы), а потом сферическая проекция переносится на плоскость.



*Рис. 2. Построение стереографической проекции направления*

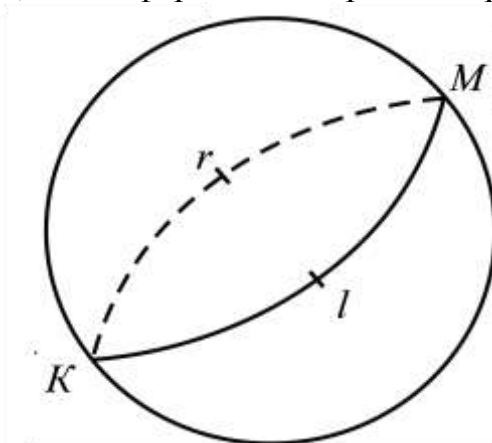
Таким образом, стереографическая проекция направления изображается точкой на основном круге проекций.

Очевидно, что стереографическая проекция горизонтальной плоскости совпадает с окружностью основного круга проекций, а вертикальной плоскости изображается прямыми линиями, диаметрами основного круга проекций. Для наклонной плоскости получаются кривые линии, дуги окружности. Они пересекают окружность основного круга в диаметрально противоположных точках и получили название – дуги большого круга.



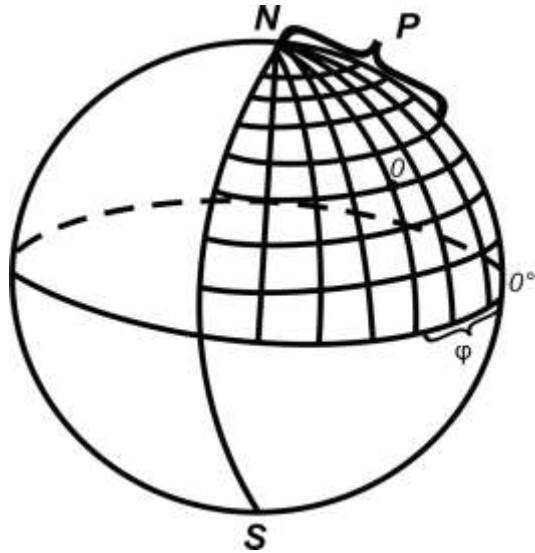
*Рис. 3. Построение стереографической проекции плоскости*

Дуга большого круга изображается сплошной линией, если сферическая проекция плоскости находится в верхней полусфере, и пунктиром, если сферическая проекция расположена в нижней полусфере (рис. 4).



*Рис. 4. Стереографическая проекция наклонной плоскости*

Стандартный диаметр сетки Вульфа составляет 20 см, линии параллелей и меридианов проходят через  $2^\circ$ . Сетка обеспечивает проведение всех расчетов и построений на плоскости проекций с точностью до  $1^\circ$ , что достаточно для большинства технических расчетов.



*Рис. 5. Сферические координаты на поверхности сферы*

Все построения и расчеты, выполняемые с помощью сетки Вульфа, производятся на кальке, наложенной на сетку Вульфа. При этом на кальке обязательно отмечает крестиком центр проекции и горизонтальной черточкой у правого конца экватора сетки нулевую точку. По этим двум отметкам чертеж на кальке всегда можно привести в исходное положение. На кальку предварительно наносится стереографическая (гномосереографическая) проекция кристалла.

Положение любой точки на основном круге проекций характеризуется ее сферическими координатами  $\varphi$  и  $\rho$ , которые отсчитываются с помощью сетки Вульфа. В соответствии с рис. 6, широта  $\rho$  отсчитывается на плоскости проекций по радиусу от центра до окружности основного круга проекций (в пределах от  $0$  до  $90^\circ$ ). Если  $90^\circ \leq \rho \leq 180^\circ$ , отсчет производится в радиальном направлении от центра до окружности ( $\rho = 90^\circ$ ) и далее продолжается в обратном направлении, к центру.

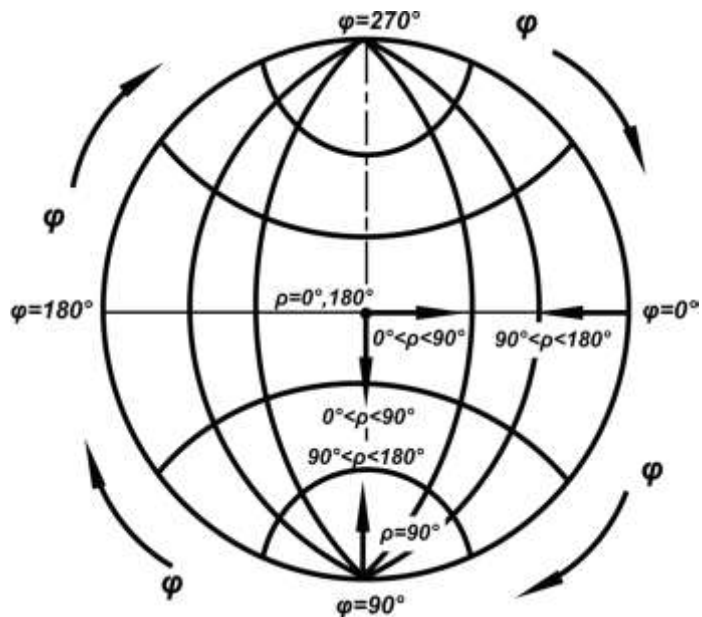


Рис. 6. Схема сетки Вульфа и отсчета углов на ней

## 2. Примеры решения задач с помощью сетки Вульфа

**Задача 1.** Построить на плоскости проекции точку  $K$  со сферическими координатами  $\varphi$  и  $\rho$ .

**Решение:** 1) Накладываем кальку на сетку Вульфа, отмечаем крестиком центр проекции и черточкой - нулевое значение  $\varphi$  (рис. 7 а).

2) По часовой стрелке от нулевой точки вдоль основного круга проекций отсчитываем угол  $\varphi=34^\circ$  и ставим вспомогательную точку  $K_1$  (рис. 7, б).

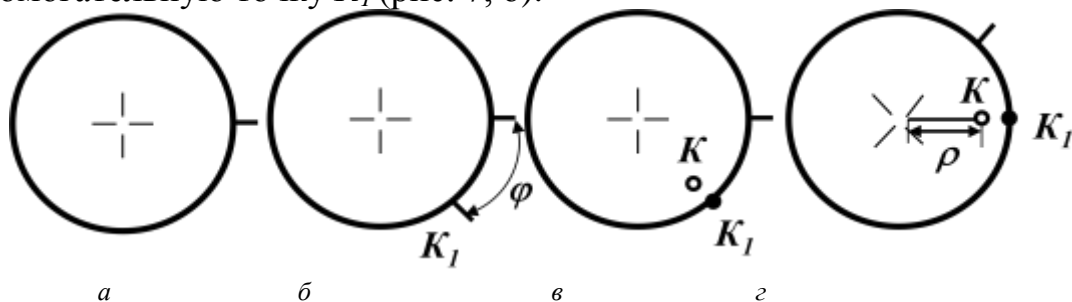


Рис. 7. Построение точки  $K$  по заданным сферический координатам

3) Путем концентрического поворота кальки относительно центра сетки выведем точку  $K_1$  на конец одного из диаметров сетки и от центра сетки в направлении точки  $K_1$  отсчитываем координату  $\rho =$ . Полученную точку обозначаем буквой  $K$  (рис. 7, в). 4) Возвращаем кальку в исходное положение (рис. 7, г). Данная задача применяется при построении стереографической проекции направления или гномостереографической проекции плоскости по известным сферическим координатам.

**Задача 2 (обратная).** Определить сферические координаты точки на плоскости проекций.

**Задача 3.** Определить угол между двумя направлениями по их стереографической проекции. Два пересекающихся направления (именно с таким мы имеем дело в кристаллическом комплексе) всегда лежат в одной плоскости. Угол между ними удобно измерить на сфере проекций как длину дуги окружности, которая опирается на центральный угол, образованный данными направлениями. В качестве окружностей на сфере проекций можно использовать меридианы. На плоскости проекций направления изображаются точками, и угловые расстояния между ними можно измерить по меридиану сетки Вульфа. Если обе точки находятся в одной полусфере (обе изображаются кружками или обе крестиками), то, вращая кальку относительно центра, выводим обе точки на один меридиан, по которому и отсчитываем угол (точки 1 и 2 на рис. 4.8). Если же точки лежат в разных полусферах (кружок и крестик, например, точки 1 и 3 на рис. 8), то поворачивают кальку так, чтобы обе точки попали на меридианы, симметричные относительно центра сетки, и отсчитывают угол сначала по одному меридиану от точки до полюса, а затем по симметричному меридиану - от полюса до второй точки. Совершенно аналогично решается задача об определении угла между двумя плоскостями по их гномостереографической проекции.

**Задача 4.** Построить на плоскости проекций точку, диаметрально противоположную данной.

Концентрическим поворотом кальки приводим данную точку на один из меридианов сетки и отсчитываем по нему угол  $180^\circ$  (рис. 9). Диаметрально противоположные точки  $A$  и  $A'$  находятся в разных полусферах и на плоскости проекция отмечаются разными знаками (кружок и крестик).

**Задача 5.** Построить зону и найти ось зоны. Для этой задачи обычно пользуются гномостереографической проекцией. Зона — это совокупность плоскостей, параллельных какому-либо направлению в кристалле (оси зоны), или совокупность плоскостей, перпендикулярных определенной плоскости. Поэтому гномостереографические проекции

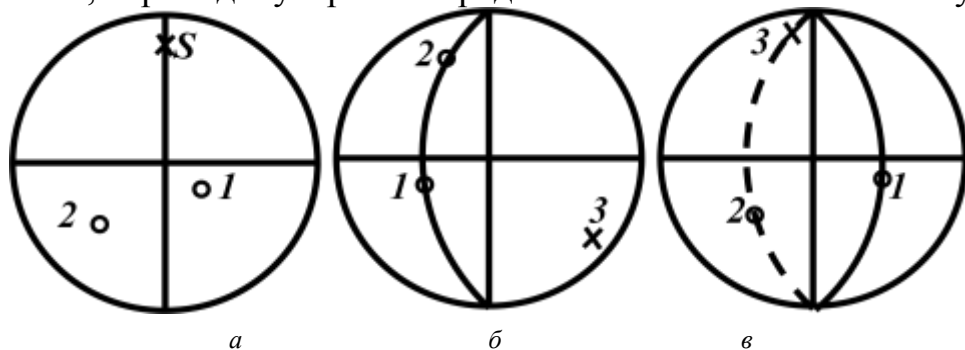


Рис. 8. К определению угла между направлениями

всех плоскостей должны находиться на угловом расстоянии  $90^\circ$  от проекции, изображающей ось зоны. Они находятся на одном меридиане сетки Вульфа, если проекция оси зоны располагается на экваторе.

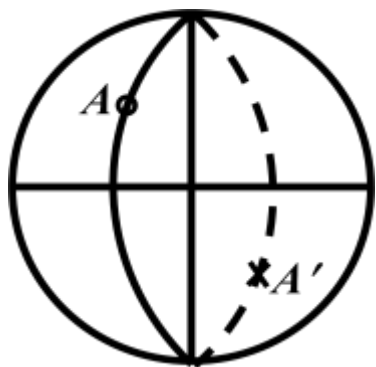


Рис. 9. Построение диаметрально противоположной точки

Практически задача решается следующим образом. Если заданы точки – гномостереографические проекции двух плоскостей, то концентрическим поворотом кальки эти точки выводят на один меридиан сетки и от точки пересечения с экватором отсчитывают  $90^\circ$  к центру проекций (рис. 10). Полученная точка и есть проекция оси зоны. Взаимное расположение важнейших, плоскостей кристалла обычно анализируют по стандартным проекциям — проекциям всех плоскостей кристалла на какую-либо плоскость кристалла с малыми индексами. Важнейшие стандартные проекции кристалла приведены в учебной литературе.

### Задание для самостоятельной работы

**Задача 1.** Построить стереографическую проекцию двух направлений по сферическим координатам  $(\varphi_1, \rho_1)$  и  $(\varphi_2, \rho_2)$ . Определить сферические координаты диаметрально противоположных направлений.

**Задача 2.** Построить стереографические проекции направлений  $A$  и  $B$  по заданным сферическим координатам  $(\varphi_A, \rho_A)$  и  $(\varphi_B, \rho_B)$ . Определить угол между направлениями. Построить стереографическую проекцию плоскости, в которой лежат оба направления.

**Задача 3.** Построить гномостереографические проекции плоскостей  $C$  и  $D$  по сферическим координатам  $(\varphi_C, \rho_C)$  и  $(\varphi_D, \rho_D)$ . Определить угол между этими плоскостями. Найти индексы плоскостей  $C$  и  $D$ , если сингония кристалла кубическая и с плоскостью проекции совпадает плоскость  $(001)$ . Определить положение оси зоны, к которой относятся плоскости  $C$  и  $D$ , и ее индексы.



Номер варианта	Номер задачи											
	1				2				3			
	$\varphi_1$	$\rho_1$	$\varphi_2$	$\rho_2$	$\varphi_A$	$\rho_A$	$\varphi_B$	$\rho_B$	$\varphi_C$	$\rho_C$	$\varphi_D$	$\rho_D$
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>
1	30°	120°	230°	30°	180°	110°	330°	90°	0°	45°	90°	90°
2	120°	120°	280°	45°	240°	60°	150°	30°	90°	45°	0°	90°
3	150°	45°	250°	100°	310°	120°	30°	150°	270°	90°	0°	45°
4	180°	60°	50°	170°	120°	30°	160°	60°	90°	45°	0°	45°
5	210°	30°	70°	90°	210°	100°	300°	140°	0°	90°	270°	45°

### Литература

1. Вайнштейн Б.К. Современная кристаллография, т.1, М.: Наука, 1979. 383 с.
2. Егоров-Тисменко Ю.К., Литвинская Г.П., Загальская Ю.Г. Кристаллография, М.: Изд-во МГУ, 1992. 587 с.
3. Зркий П.М. Задачник по кристаллохимии и кристаллографии. М.: Изд-во МГУ, 1981. 39 с.
4. Егоров-Тисменко Ю.К. Кристаллография, руководство к практическим занятиям, М.: Изд-во МГУ, 2010, 208 с.
5. Окишев, К.Ю. Кристаллохимия и дефекты кристаллического строения, Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. 97 с.