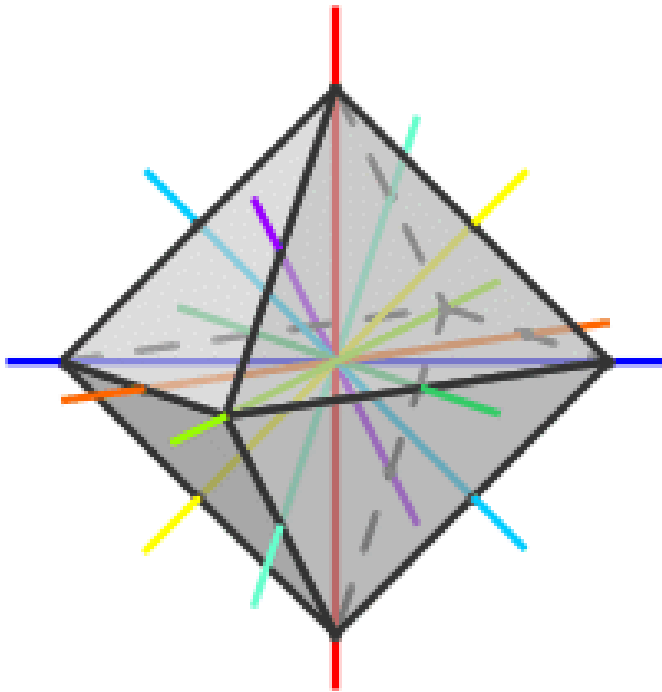


Лекция 2. СИММЕТРИЯ КРИСТАЛЛОВ



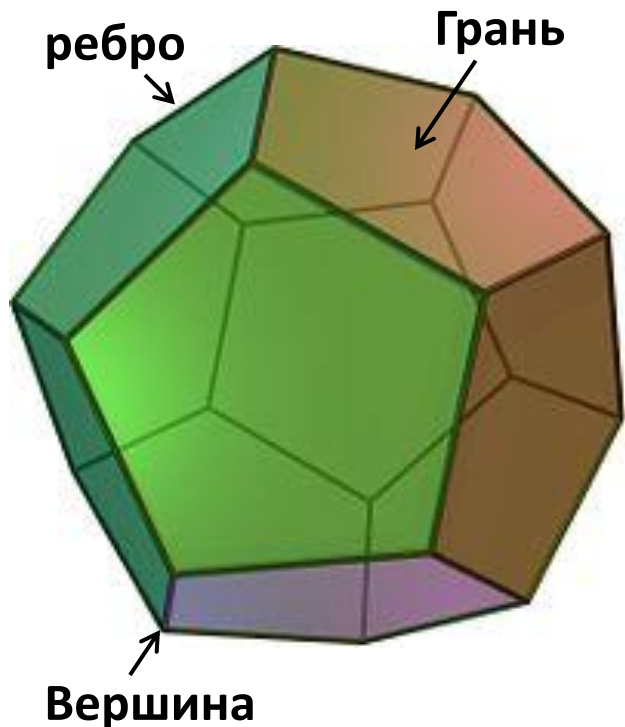
1. Кристаллическое вещество.
2. Операции и элементы симметрии кристаллов.
3. Методы проецирования кристаллов.
4. Способы представления симметрических операций.
5. Основные положения теории групп.

КРИСТАЛЛИЧЕСКОЕ ВЕЩЕСТВО

Кристаллы - твердые, однородные, анизотропные вещества, способные в определенных условиях самоограняться. Обычно кристаллами называют твердые тела, образующиеся в природных или лабораторных условиях в виде многогранников.

Элементы выпуклых многогранников:

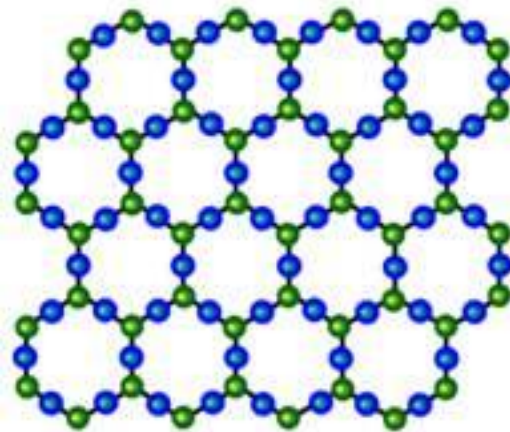
- **Грань** - плоская поверхность, ограничивающая кристалл
- **Ребро** - линия пересечения двух граней кристалла
- **Вершина** - точка пересечения ребер кристалла



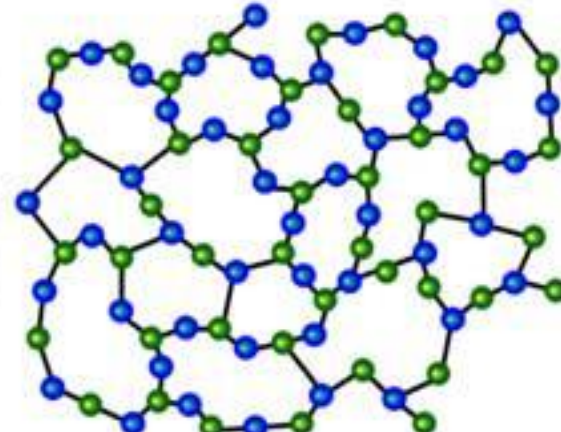
Кристаллы – твердые тела, обладающие упорядоченной трехмерно-периодической пространственной атомной структурой.

Кристаллическое состояние - термодинамически равновесное состояние твердого тела.

Особенностью кристаллического строения является наличие «дальнего» порядка – корреляции во взаимном расположении атомов на расстояниях много больших, чем средние межатомные расстояния.



Кристаллические

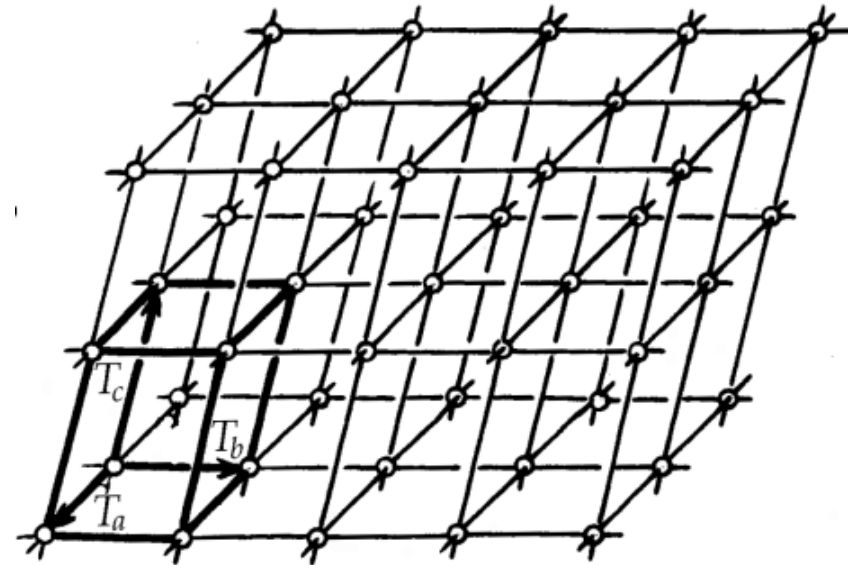


Аморфные

Макроскопические свойства кристаллов

однородность, анизотропия и симметрия кристаллического пространства.

Однородность - тело, каждой точке которого соответствует бесчисленное множество расположенных на конечных расстояниях друг от друга эквивалентных точек не только в физическом, но и в геометрическом смысле.

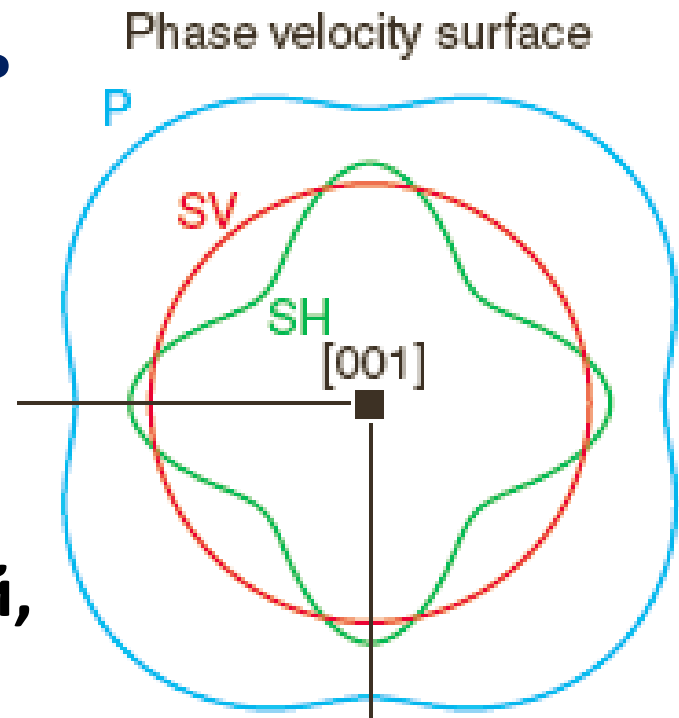


$$F(x) = F(x + x')$$

Однородность - В любых участках кристалла все его свойства (скалярные ρ , C ; векторные P , D и тензорные E) тождественны - **инвариантность свойств относительно произвольного переноса начала координат**

однородность, **анизотропия** и симметрия кристаллического пространства.

Анизотропия – ориентационная зависимость свойства: зависимость от направления n , вдоль которого это свойство проявляется. Многие физические свойства: твердость, показатели преломления, теплопроводность, спайность зависят от межатомных расстояний, т.е. типа и силы химических связей между атомами, поэтому в разных направлениях в кристалле они проявляются по-разному.



$$F(\vec{n}_1) = F(\vec{n}_2)$$

однородность, анизотропия и **симметрия** кристаллического пространства.

Симметрия: инвариантность относительно
определенного закона преобразования аргументов.

$$F(x) = F(x') = \dots = F(x'')$$

Способность кристаллов самоограняться
- способность при определенных
условиях принимать естественную
многогранную форму.

Пример: Шарик, вырезанный из кристалла кварца в
растворе этого же соединения покрывается гранями,
тогда как шарик из кварцевого стекла остается
неизменным. Процесс огранения — результат
правильного внутреннего строения кристалла



ОПЕРАЦИИ И ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛОВ

Симметричный объект - фигура, которая может быть совмещена сама с собой определёнными преобразованиями (поворотами и/или отражениями).

Симметрическое преобразование - преобразование, с помощью которого достигнуто это совмещение.

Элементы симметрии – вспомогательные геометрические образы (плоскости, прямые линии, точки), с помощью которых осуществляются симметрические преобразования (операции).

Элементы симметрии – геометрическое место инвариантных точек (остающихся неподвижными при заданной симметрической операции).

Элементы симметрии

Элементы симметрии I рода - поворотные оси симметрии - прямые, при повороте вокруг которых на определенный угол фигура (или кристалл) совмещается сама с собой.

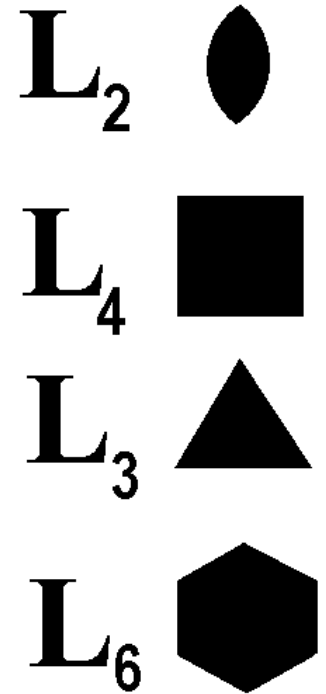
Элементарный угол поворота оси симметрии (α) - наименьший угол поворота вокруг такой оси, приводящий фигуру к самосовмещению.

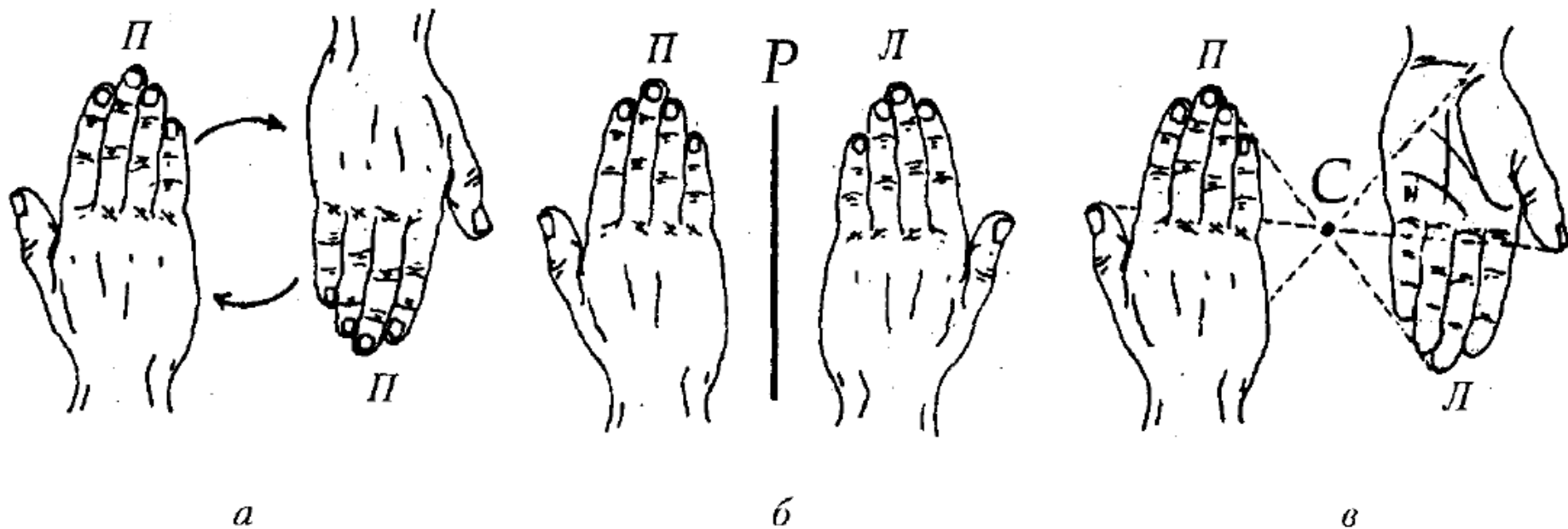
Элемент симметрии - поворотная ось

$$\alpha_n = \frac{360^\circ}{n}$$

где n – порядок оси,

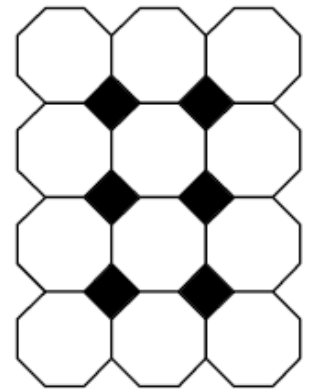
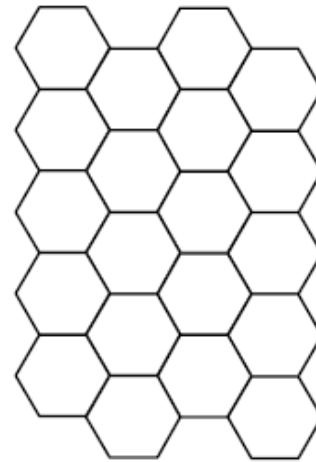
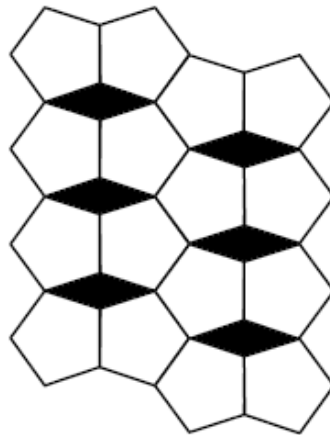
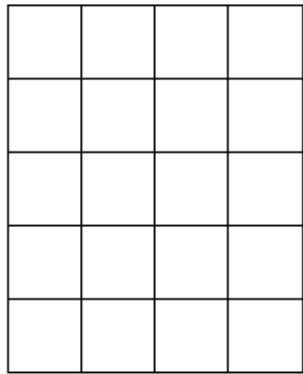
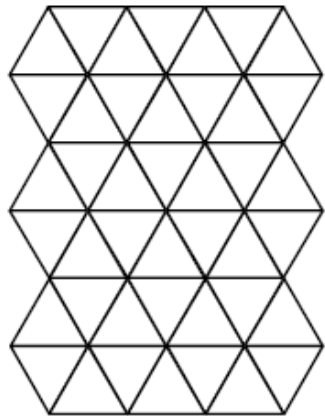
α - элементарный угол поворота



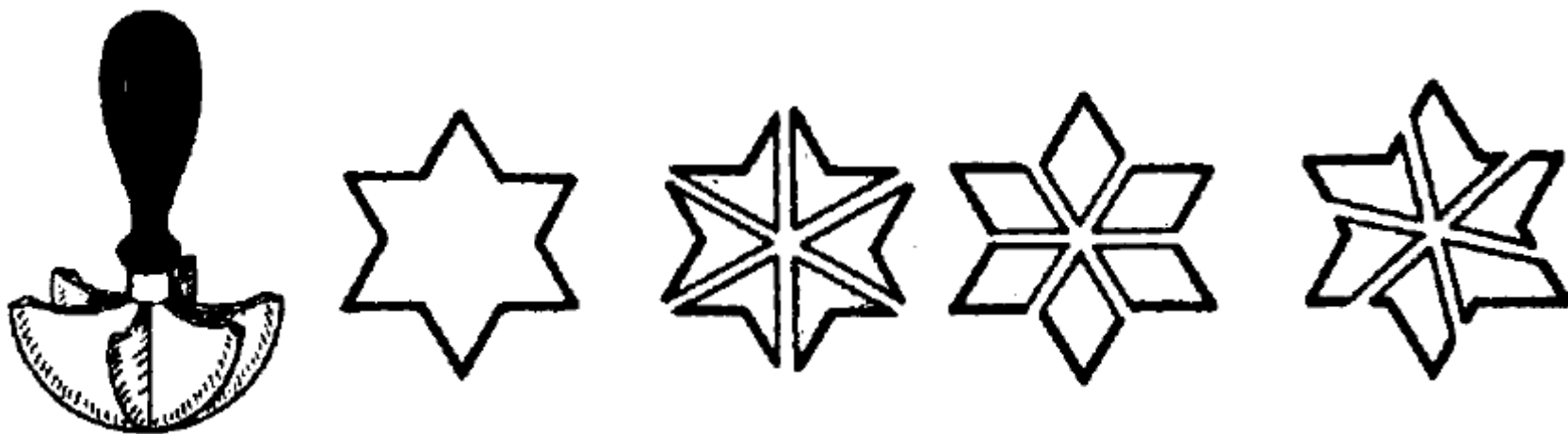


Примеры конгруэнтного (а) и зеркального (энантиоморфного) (б,в) равенства фигур

В кристаллах могут встречаться поворотные оси только 2-го, 3-го, 4-го и 6-го порядка. Оси 5-го порядка и порядков выше 6 невозможны, поскольку правильными 5-, 7-, 8- и т.д. угольниками нельзя заполнить плоскость без разрывов. Иногда встречаются также инверсионные оси симметрии, сочетающие поворот с инверсией.



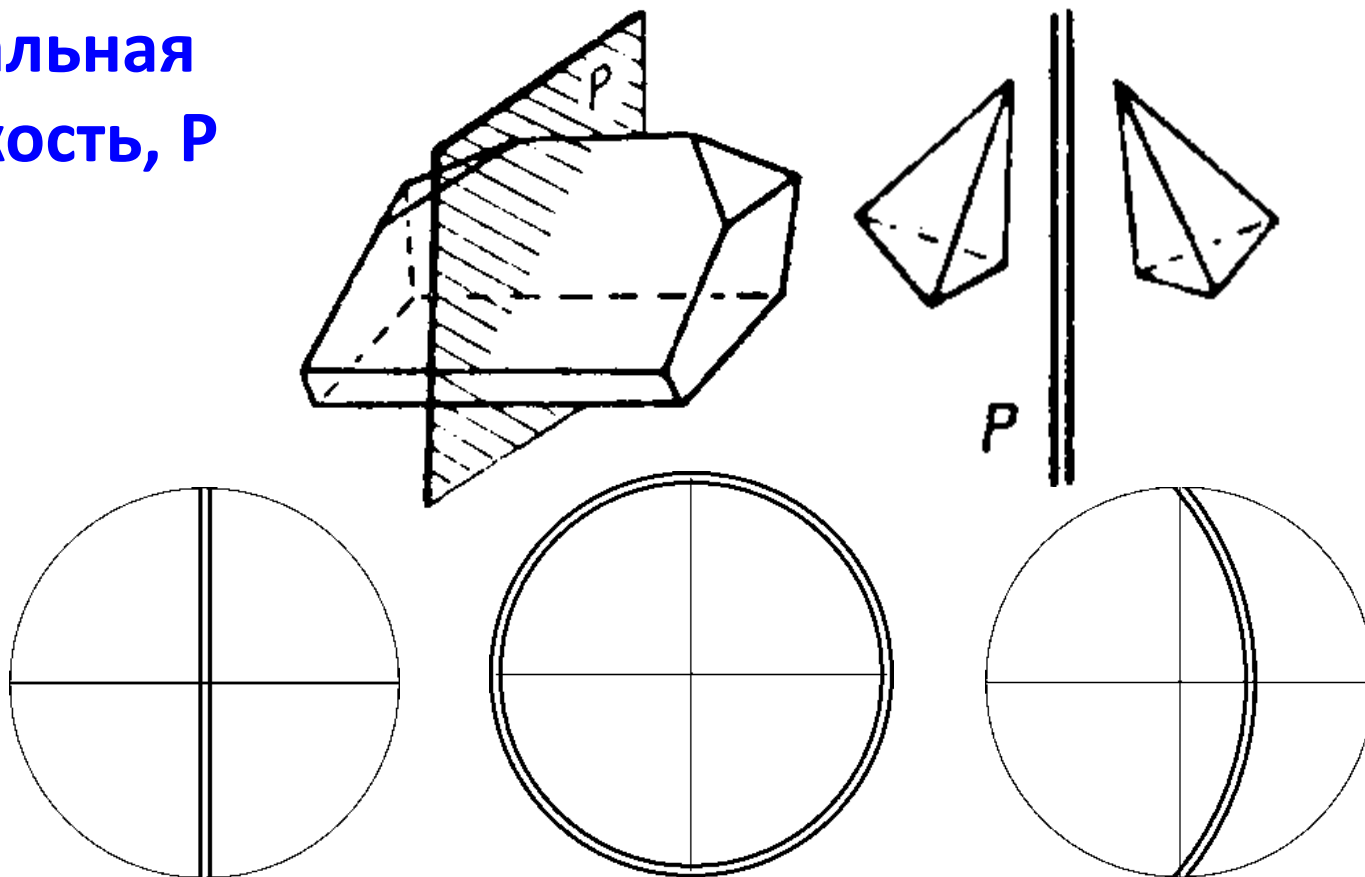
Фигура, обладающая осью симметрии n -го порядка, может быть рассечена на n конгруэнтно равных частей бесконечным числом способов



Примеры разбиения фигуры, обладающей осью 6-го порядка, резакон, ось которого совмещена с осью симметрии фигуры

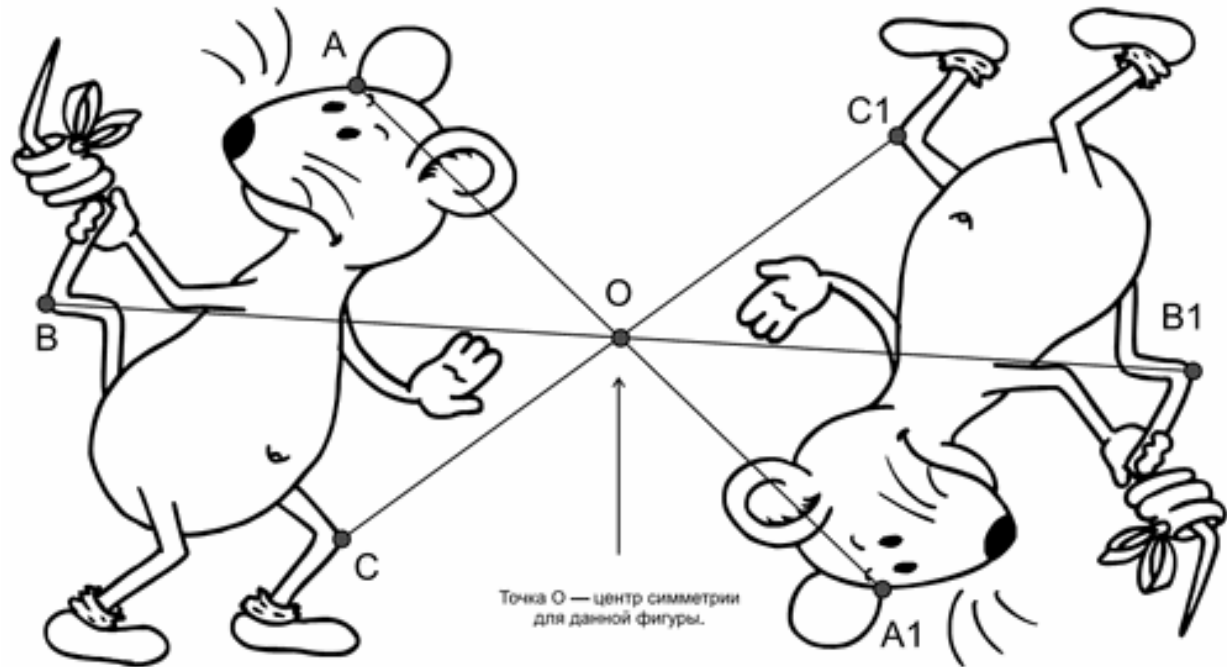
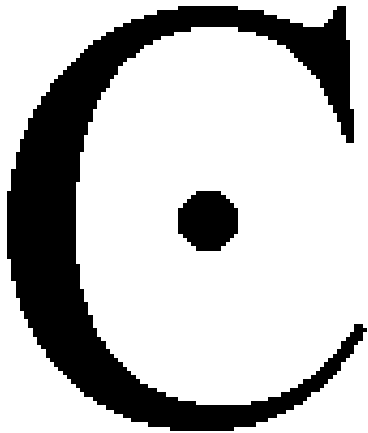
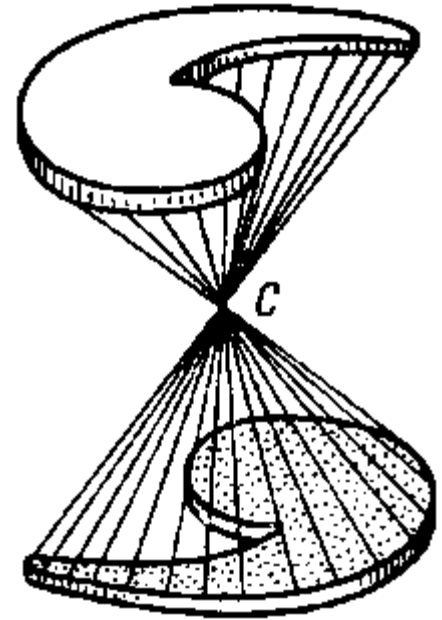
Элементы симметрии II рода связывают друг с другом энантиоморфные фигуры – т.е. зеркально равные (правые с левыми): **зеркальная плоскость, центр инверсии и сложные оси симметрии – зеркально поворотные и инверсионные**

**Зеркальная
плоскость, P**

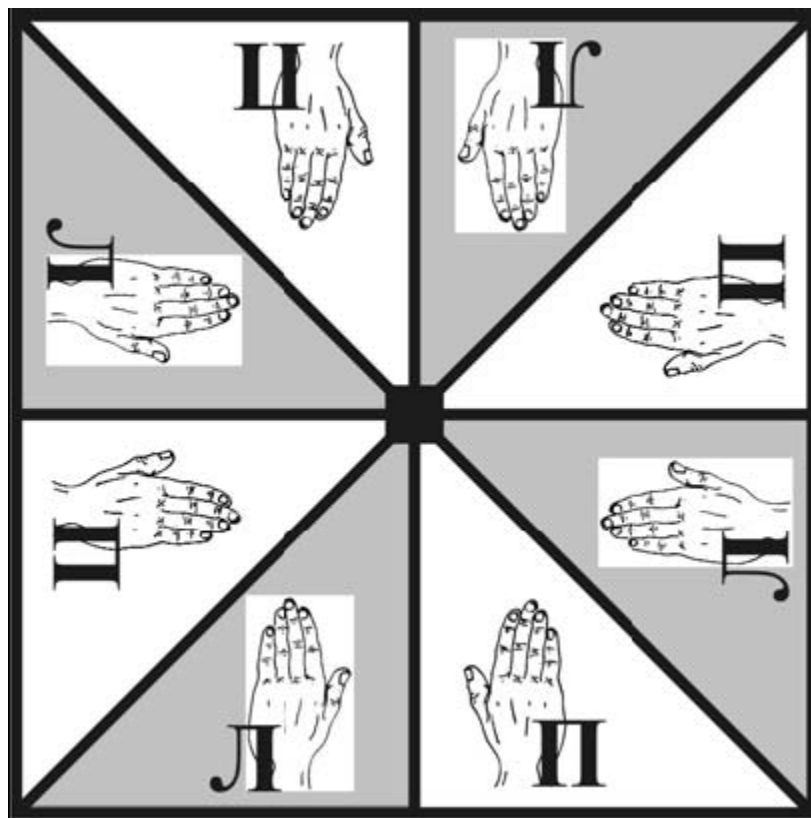


**Центр симметрии =
центр инверсии, С**

**переводит точку с радиус-вектором
 r в точку с радиус-вектором $-r$, то
есть соответствует «отражению»
кристалла в точке**



**Разбиение квадрата на восемь равных треугольников,
связанных между собой поворотами и отражениями**



Простые элементы симметрии - поворотные оси, зеркальная плоскость и центр инверсии, так как каждый из них задает лишь одну симметрическую операцию: поворот, отражение или инверсию в точке

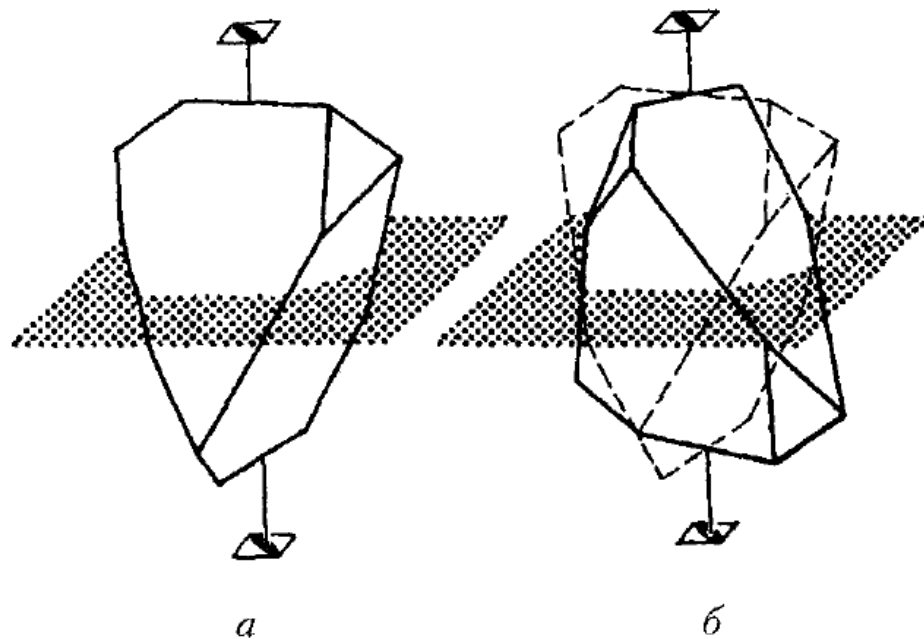
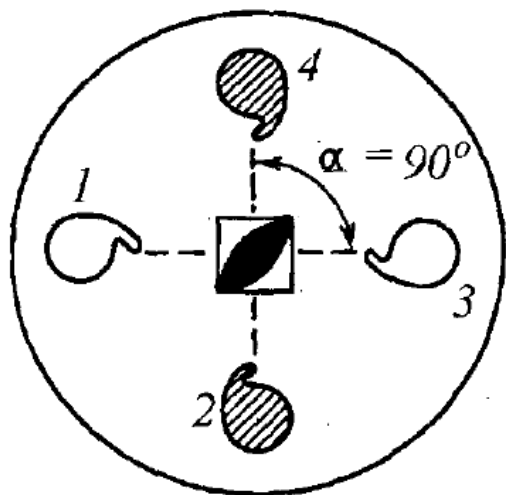
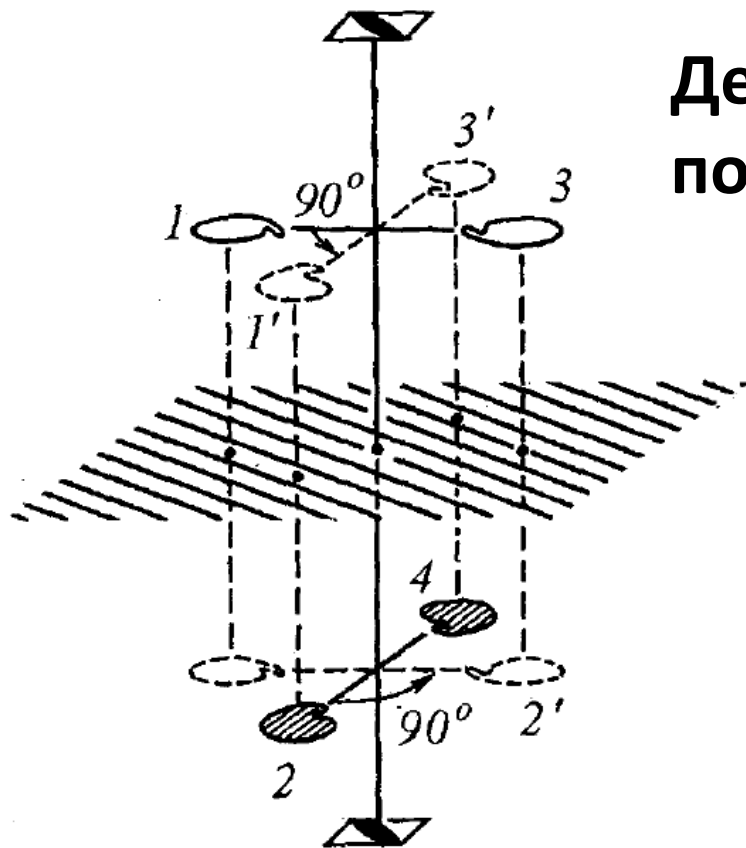
Сложные элементы симметрии позволяют совмещать равные фигуры (или их части) путем двойной операции — поворота (операции I рода) и отражения (операции II рода).

Сложная операция симметрии – **Отражение + поворот** (одновременно!)

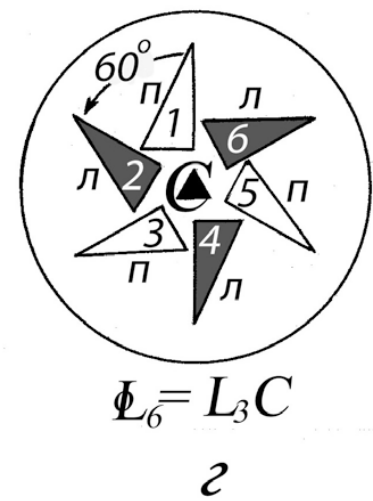
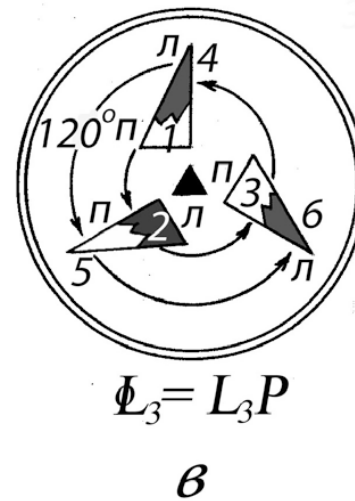
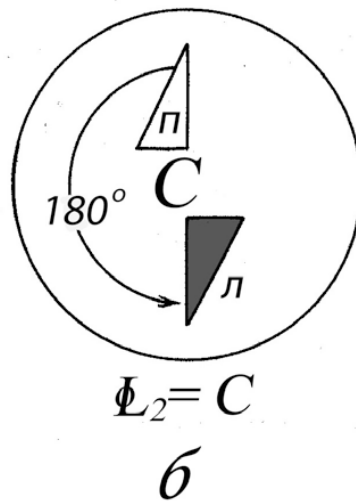
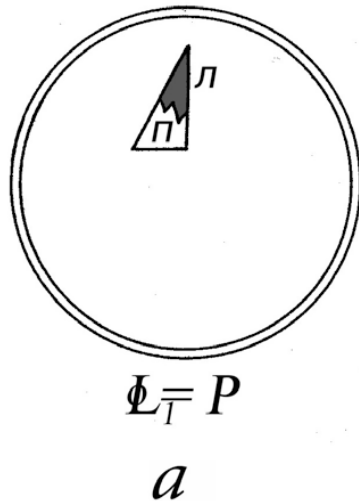
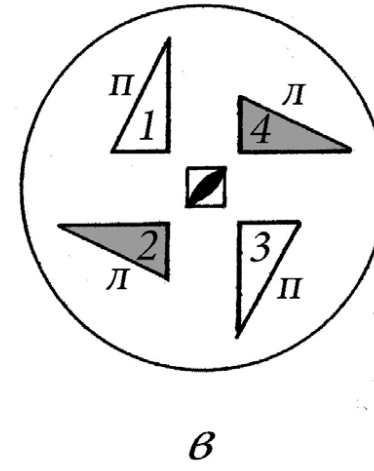
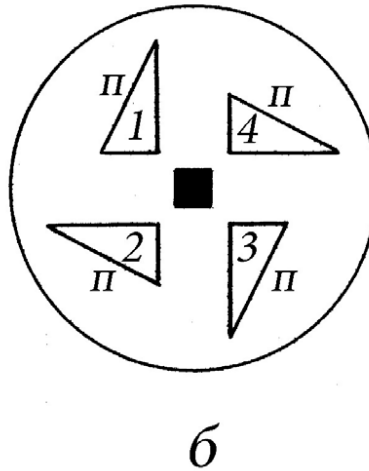
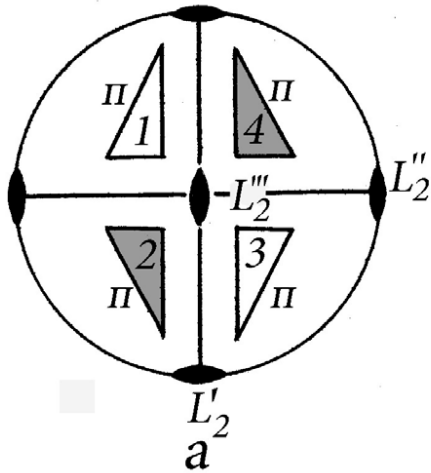
Зеркально-поворотная ось либо Инверсионная ось



Действие зеркально-поворотной оси 4-го порядка



Действие сложных осей можно заменить действием простых симметрических операций



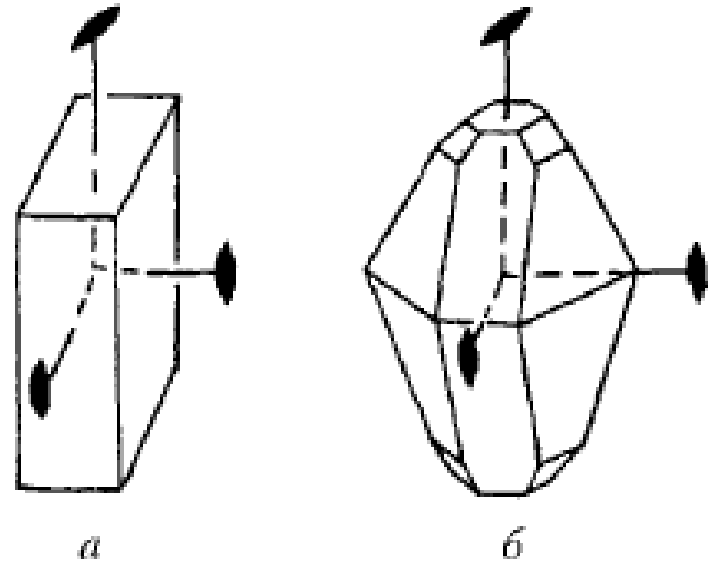
поэтому при описании симметрии кристаллов пользуются каким-либо одним видом осей: простыми либо сложными — инверсионными или зеркальными

МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КРИСТАЛЛОВ

Многогранник в виде кирпича и кристалл серы имеют одинаковую симметрию — $3L_23PC$, но разное расположение граней относительно элементов симметрии.

Чтобы получить полную информацию об огранке кристалла, необходимо

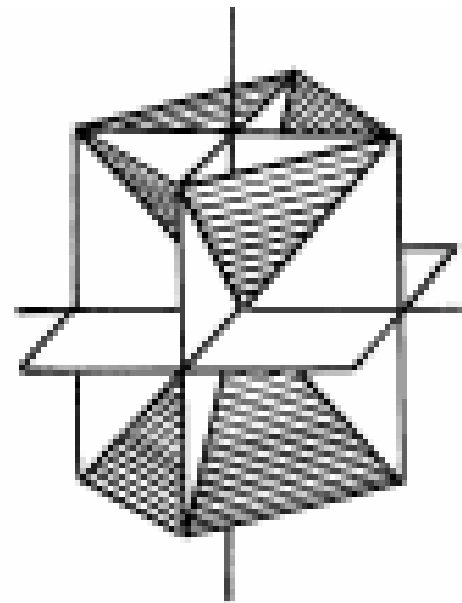
- ✓ найти и зафиксировать в пространстве элементы его симметрии,
- ✓ используя основной закон постоянства углов, зафиксировать грани данного кристалла относительно его элементов симметрии.





Для изображения расположения плоскостей и ребер кристалла используют графические методы проектирования на плоскость или сферу.

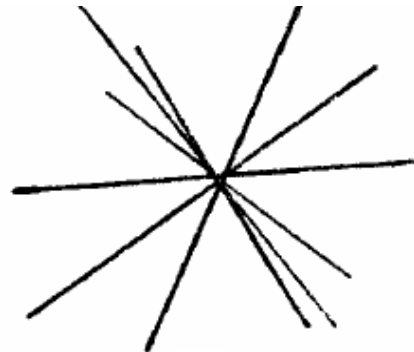
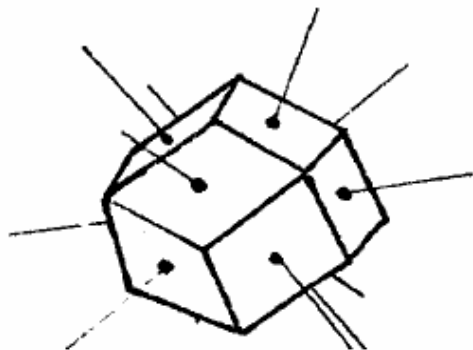
Прямой кристаллографический комплекс (КГК): все параллельные грани кристалла заменяются одной плоскостью, а все параллельные ребра – одной прямой. Их точка пересечения - **центр комплекса**



Плоскости, пересекающиеся по общей прямой - **кристаллографическая зона**, а общее направление – **ось зоны**. Кристаллографический комплекс состоит из ряда кристаллографических зон.

Обратный (полярный) комплекс: плоскости прямого комплекса заменены нормальными к ним, а прямые – перпендикулярными к ним плоскостями.

В обратном комплексе: кристаллографическая зона – плоскость, отвечающая оси зоны прямого комплекса + совокупность пересекающихся в общей точке прямых (нормали к плоскостям прямого комплекса)

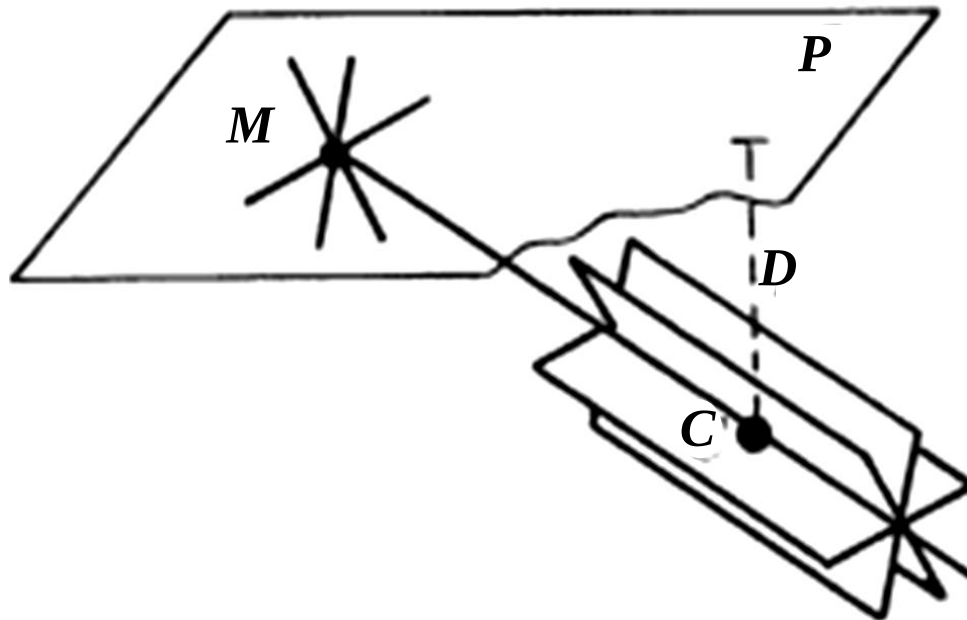


Виды проекций:

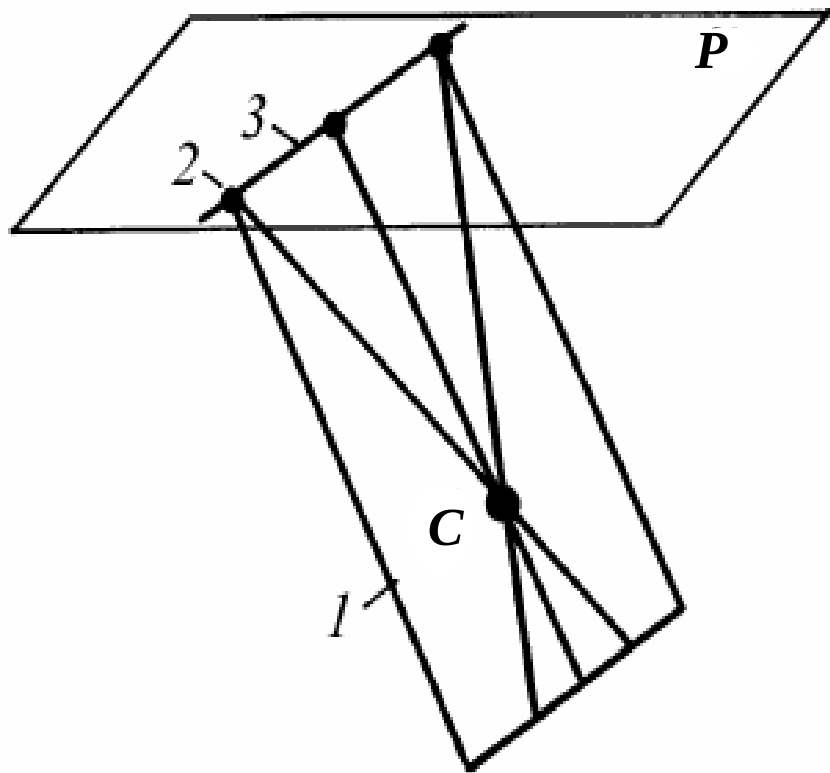
1. Линейная

Используют прямой КГК комплекс, центр которого C находится на определенном расстоянии D от плоскости проекции P . Линии и точки пересечения плоскостей и прямых комплекса являются его линейной проекцией.

Неудобство: необходима бесконечная плоскость, трудно проводить измерение углов. Применяется редко.



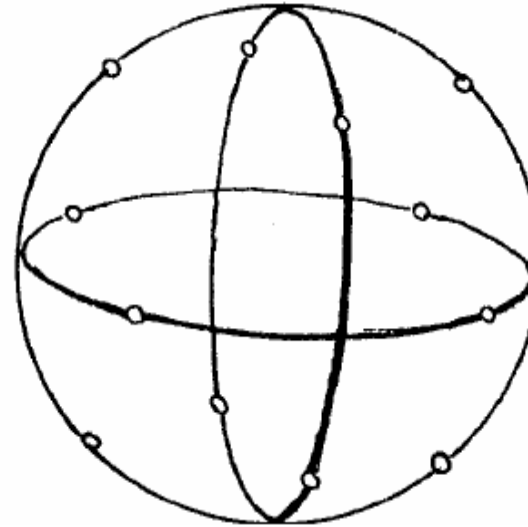
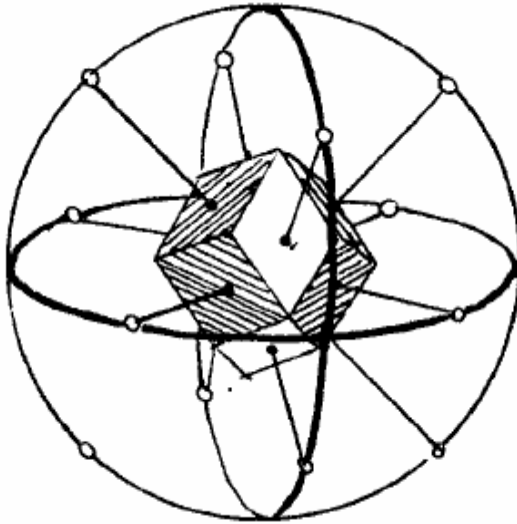
2. Гномоническая



вместо прямого комплекса используется обратный. В этом случае плоскости прямого комплекса изображаются на проекции точками, а прямые – линиями. Зона плоскостей проектируется рядом точек, расположенных на прямой, являющейся проекцией оси зоны

3. Сферическая

Проектирование компонентов прямого КГК, помещенного в центр сферы произвольного радиуса, на сферическую поверхность. Плоскости комплекса – большие круги, прямые – точки



4. Гномосферическая

Проектирование на сферу компонентов обратного комплекса

Для построения сферических и гномосферических проекций пользуются сферами с градусным делением.
Недостаток – не являются плоскими.

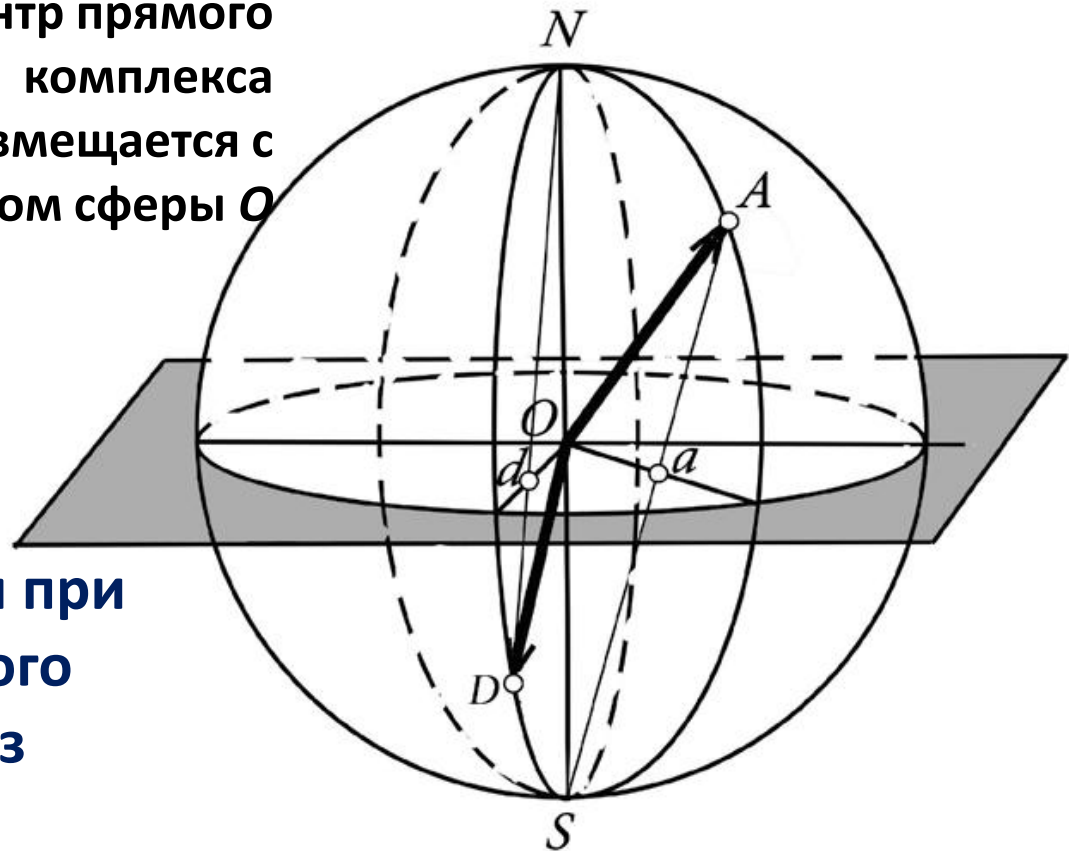
5. Стереографическая

Плоскость проекции - экваториальная плоскость, проходящая через центр сферы. Сечение сферы плоскостью проекции называют **основным кругом проекции**, а точки пересечения диаметра сферы, перпендикулярного к плоскости проекции – **полюса проекции**.

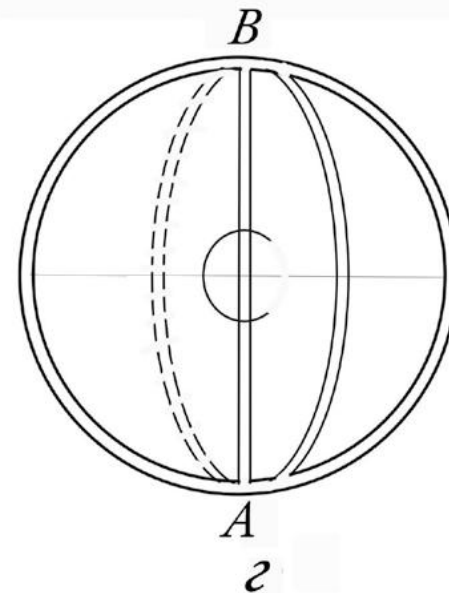
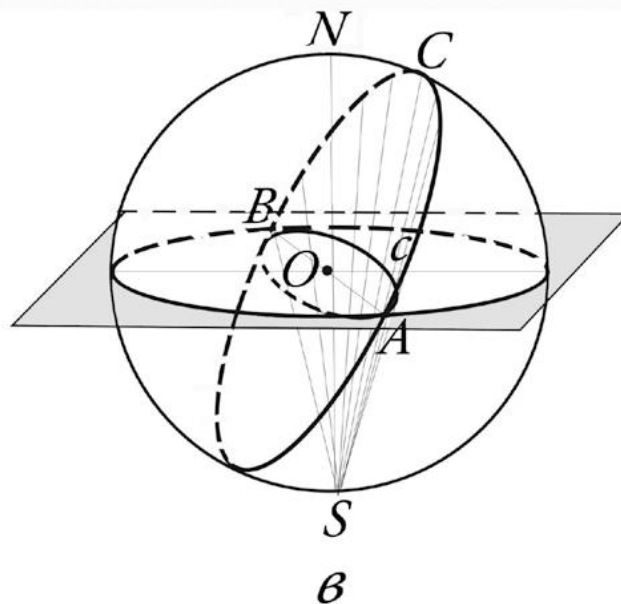
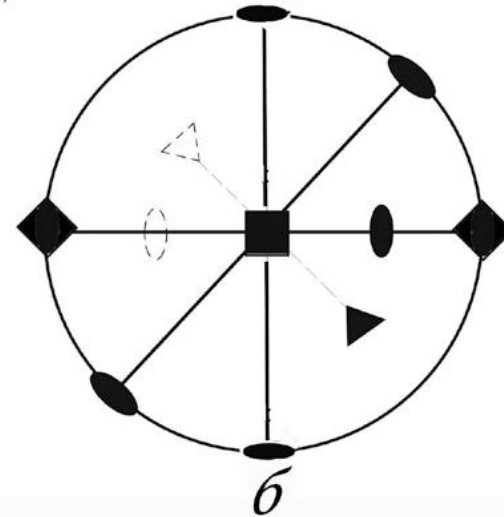
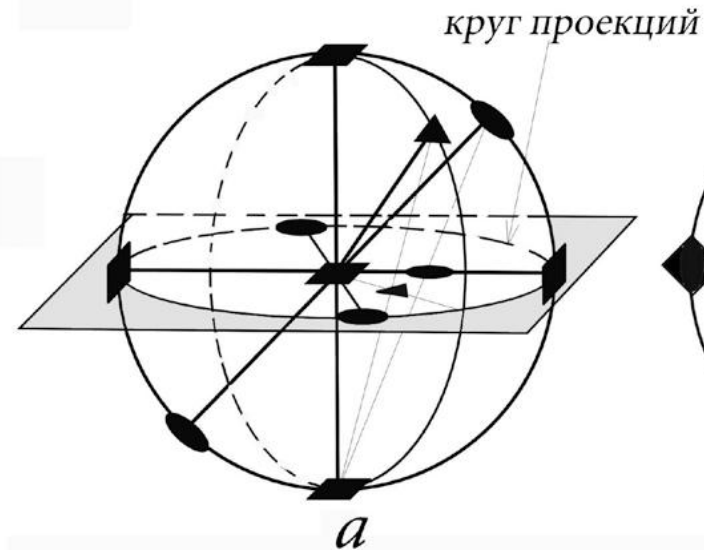
центр прямого
комплекса
совмещается с
центром сферы Q

Прямые – точки (в северном полушарии) или крестики (в южном).

Плоскость – дуга (сплошная при проектировании из северного полушария, пунктирная – из южного полушария).



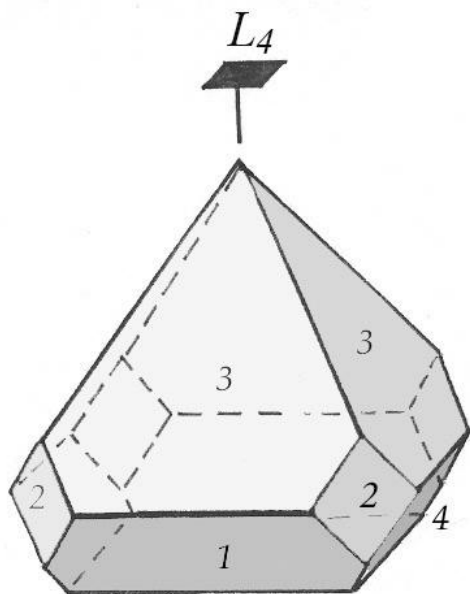
Стереографические проекции элементов симметрии



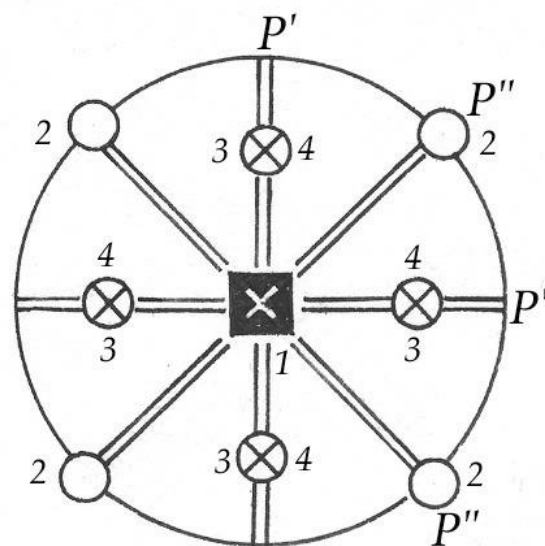
6. Гномостереографическая

Это стереографическая проекция обратного комплекса, является наиболее удобной для решения практических задач.

Проектируется не многогранник, а его полярный комплекс: не грань кристалла, а нормаль к грани. Плоскости изображаются точками, а прямые – кругами, зона плоскостей - в виде точек, расположенных на большом круге.

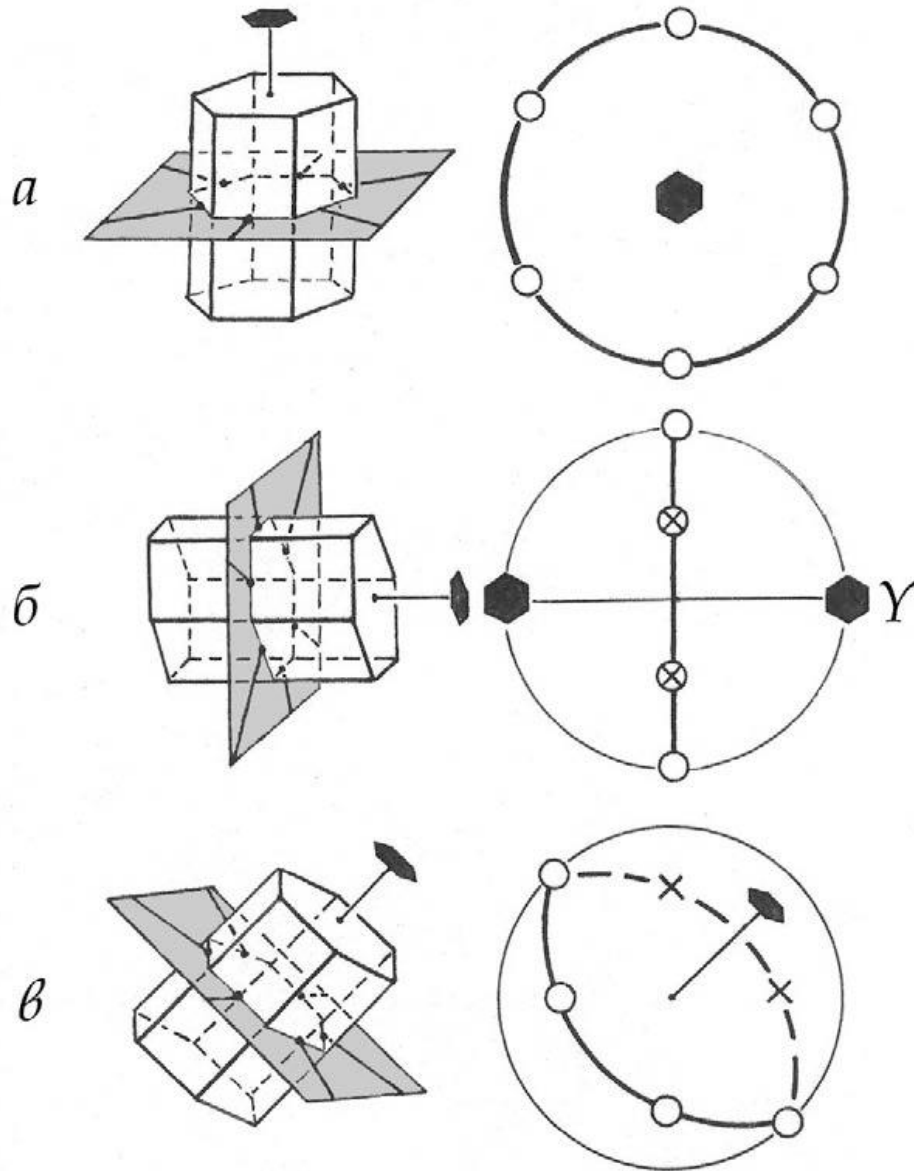


a



б

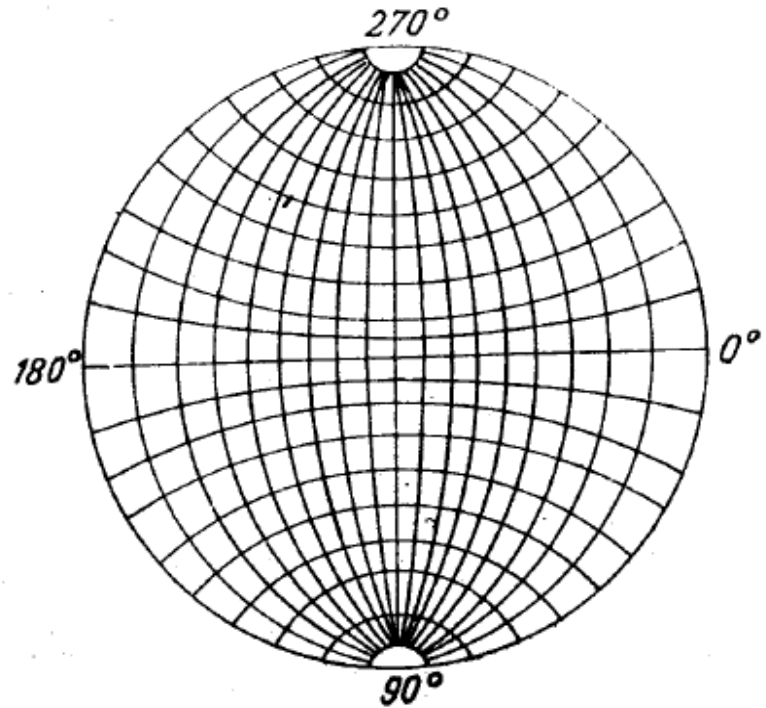
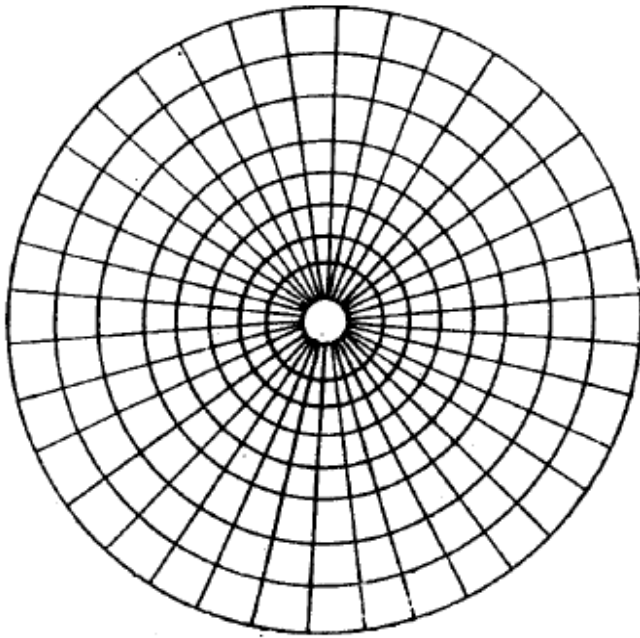
Таутозональные грани -
грани, пересекающимся по
параллельным ребрам



Проецирование
таутозональных граней,
связанных между собой
осью 6-го порядка (L_6) и
расположенных на
горизонтальной (а),
вертикальной (б)
наклонной (в) зонах.

В каждом случае осью зоны
является ось L_6

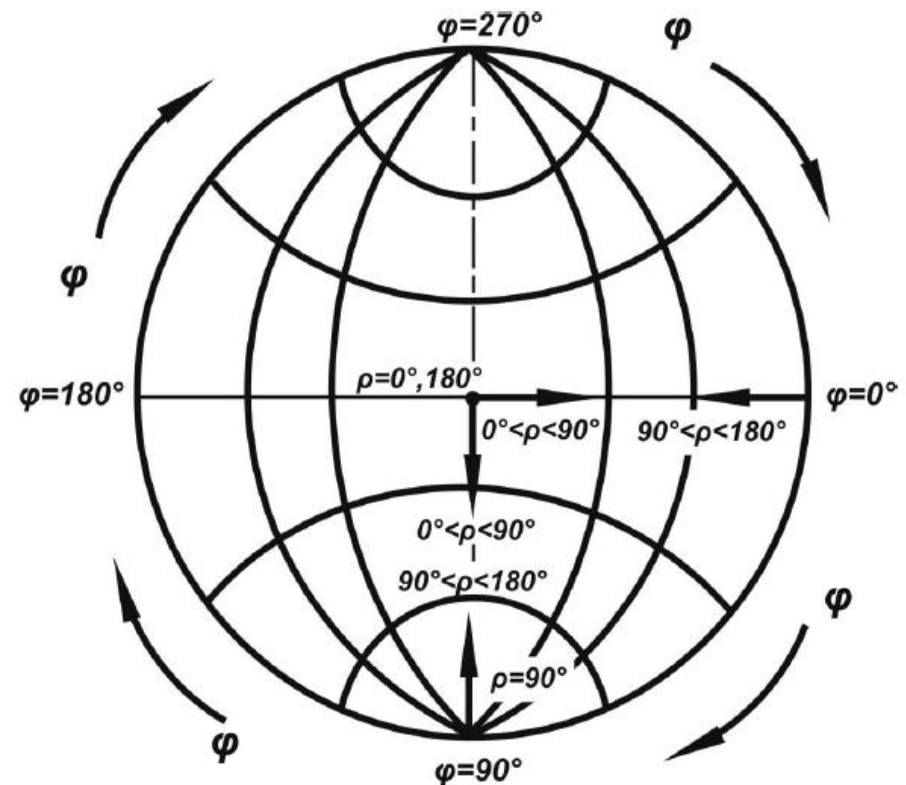
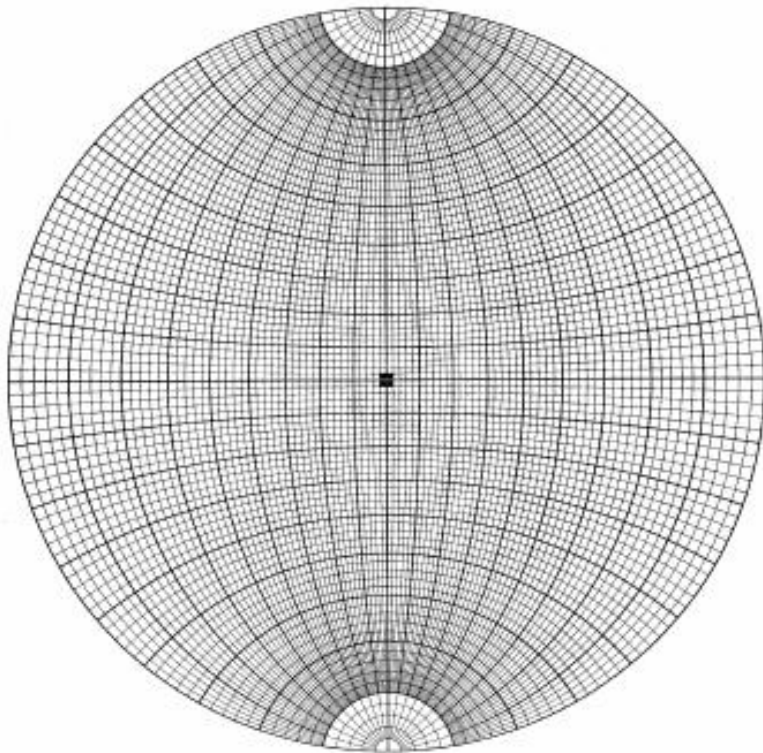
Стереографические сетки

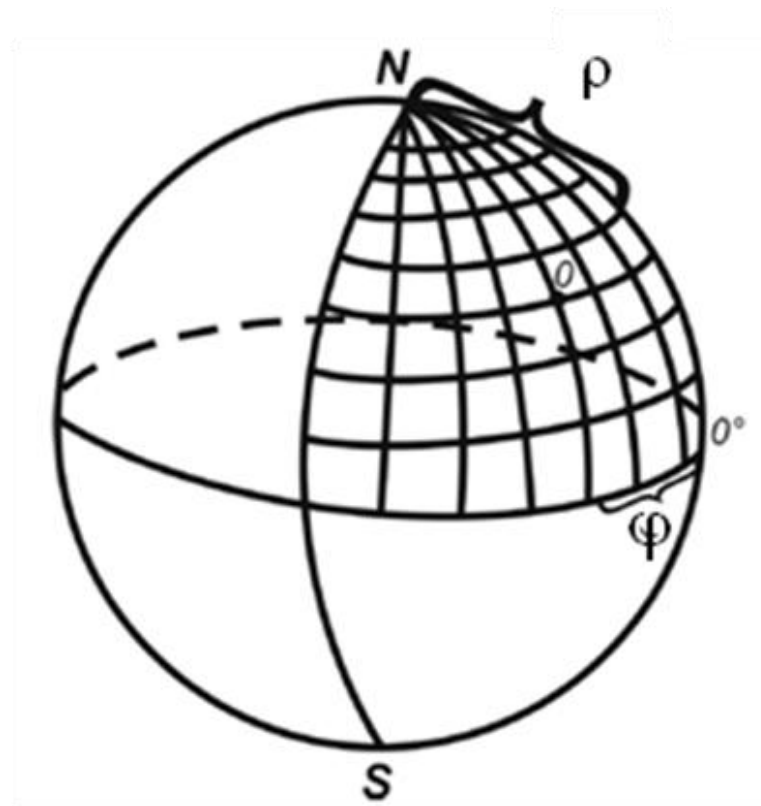
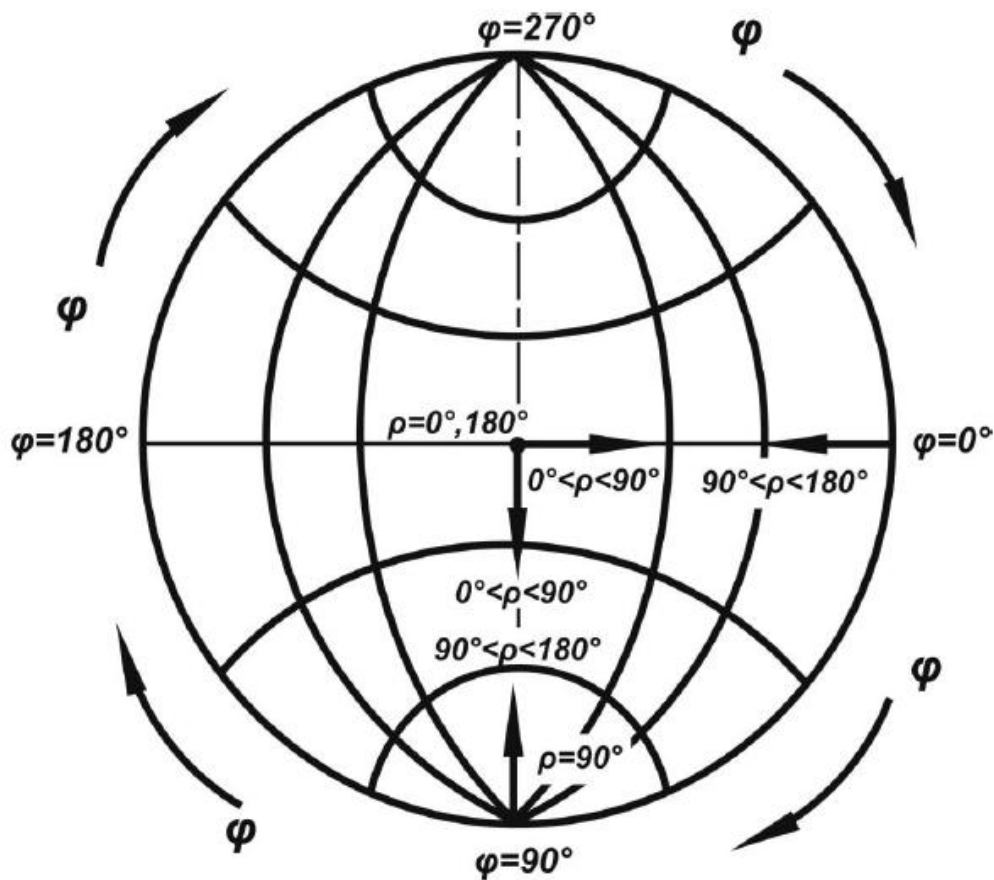


В зависимости от плоскости, на которую проектируется со сферы эта сетка, различают сетки **полярного** и **экваториального** типов.

Координатная сетка Вульфа

Стандартный диаметр сетки Вульфа - 20 см, линии параллелей и меридианов проходят через 2° . Сетка обеспечивает проведение всех расчетов и построений на плоскости проекций с точностью до 1° , что достаточно для большинства технических расчетов. Для удобства отсчётов каждый десятый меридиан и каждая десятая параллель проведены более толстыми линиями





ρ — широта; отсчитывается вдоль любого меридиана от нуля (N полюс) до 180° (S полюс);

φ — долгота измеряется по экватору от меридиана, принятого за нулевой, до меридиана, проходящего через заданную точку на сфере. Долгота отсчитывается по часовой, стрелке и может изменяться в пределах от 0 до 360° .

Способы представления симметрических операций

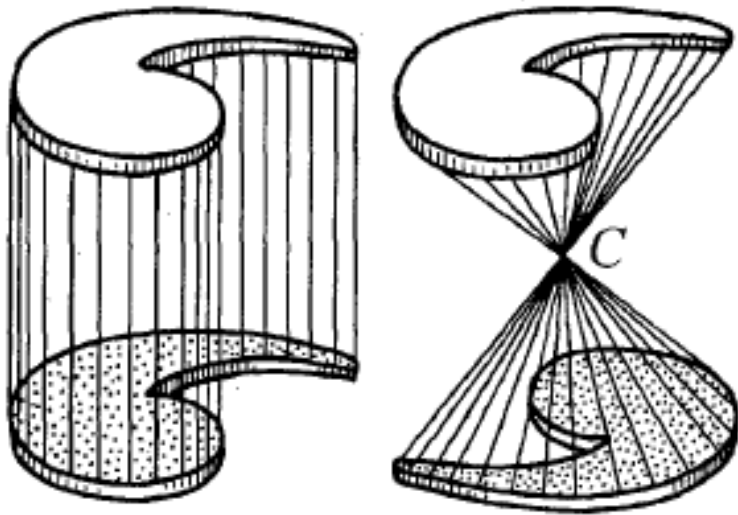
1) Модельный способ

2) Координатный метод

3) Матричный метод

Способы представления симметрических операций

1. Модельный способ - визуальное представление операций симметрии



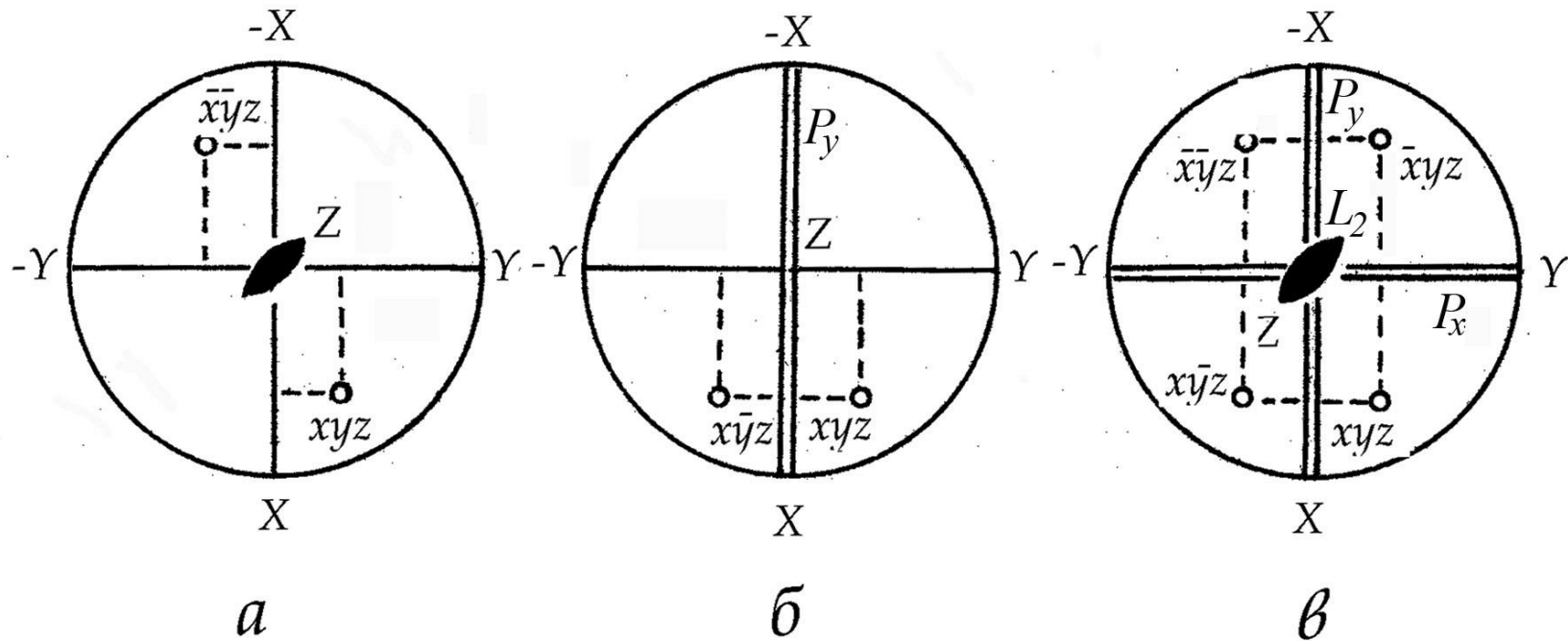
Способ не дает возможности выявить законы взаимодействия симметрических операций в обобщенном виде.

Пример: действие центра инверсии (C). Результат можно получить, разложив операцию инверсии в точке на две мнимые составляющие:

1. отражение в горизонтальной плоскости (P)
2. поворот на 180° вокруг вертикальной оси L_2 , перпендикулярной этой плоскости

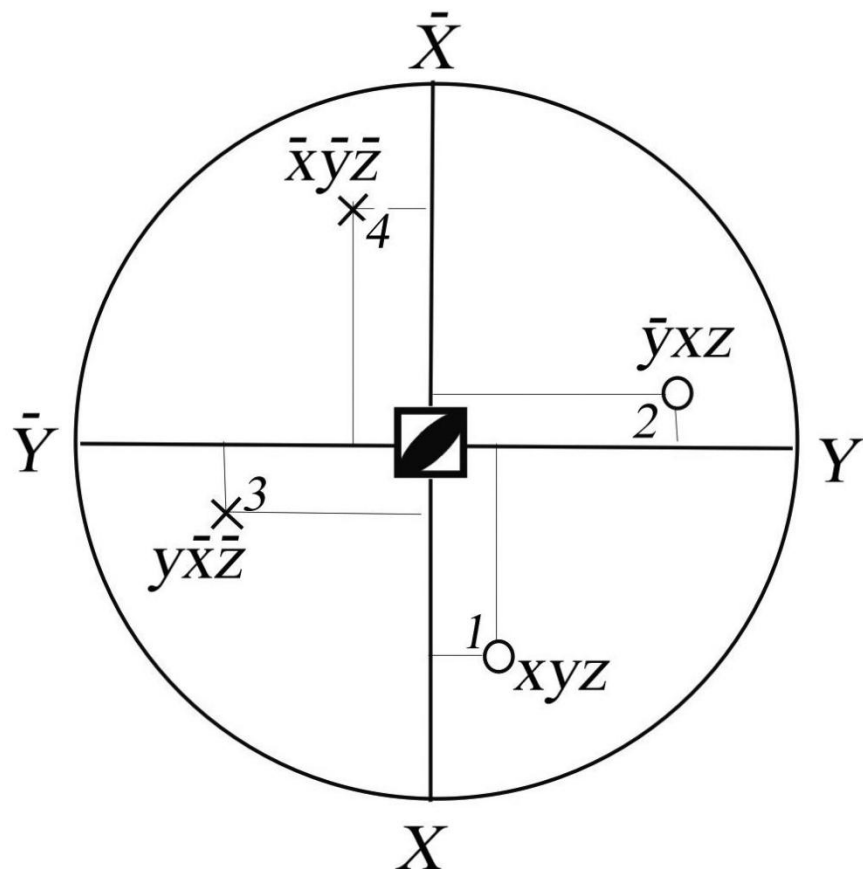
$$C = P + L_{2\perp}.$$

2. Координатный метод - любое симметрическое преобразование представляется с помощью координат исходной и преобразованной точки.



Изменение координат точки под действием симметрических операций:
a – поворота вокруг оси 2-го порядка, совмещенной с координатной осью Z ($L_{2(z)}$); *б* - отражения в зеркальной плоскости симметрии, перпендикулярной оси Y ($P_{(y)}$); *в* – отражений сначала в плоскости $P_{(x)}$, а затем в $P_{(y)}$

Задание: Определить координаты, которые приобретет точка с координатами $x y z$ после всех поворотов вокруг инверсионной оси 4-го порядка

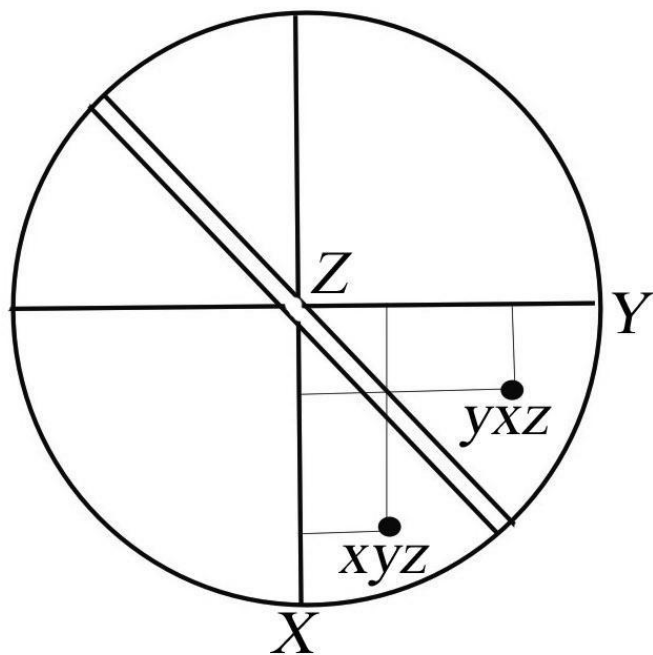


**Проверить
чертеж
и найти ошибки!**

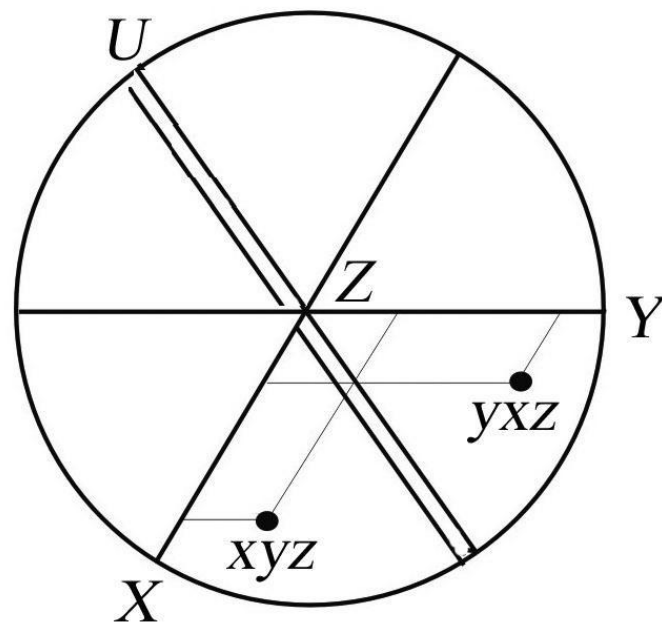
Задание: Определить, какая симметрическая операция связывает точки с координатами xuz и yxz

1) 90 градусов между x и y

2) 120 градусов между x и y

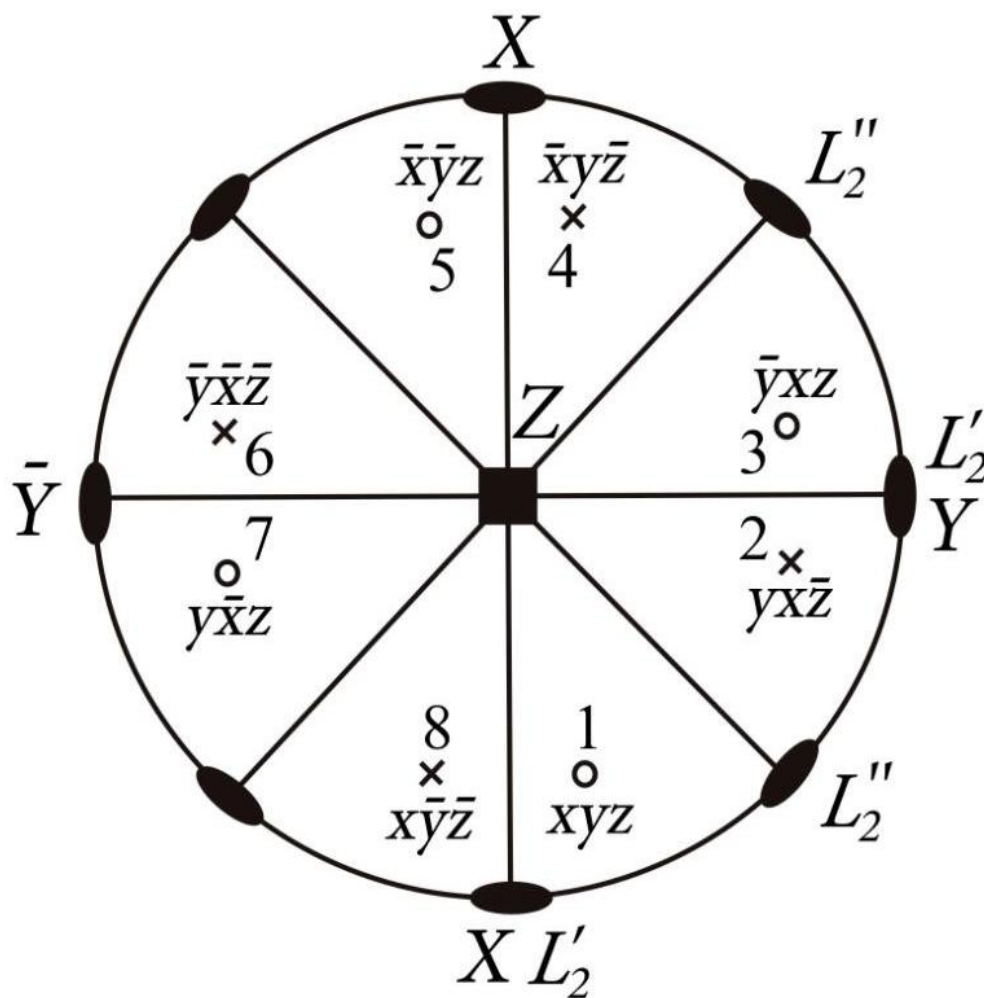


a

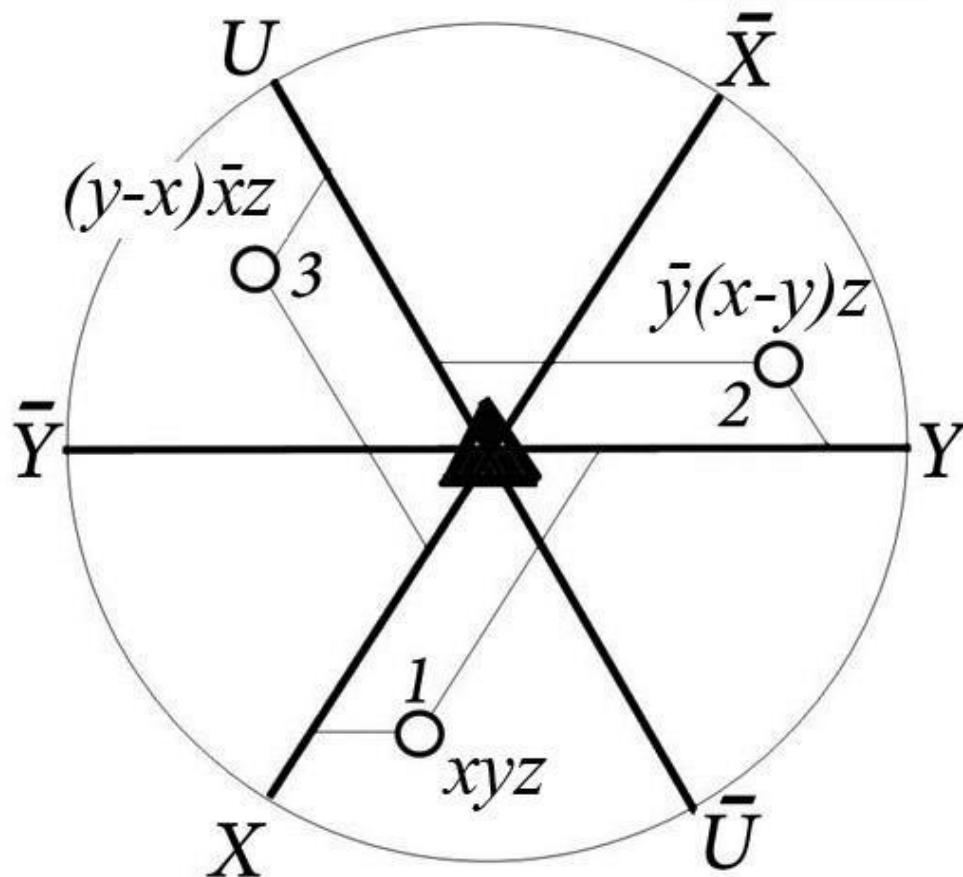


б

Задание: Записать координаты всех точек, полученных размножением исходной с координатами хуз операциями симметрии класса L_44L_2 .

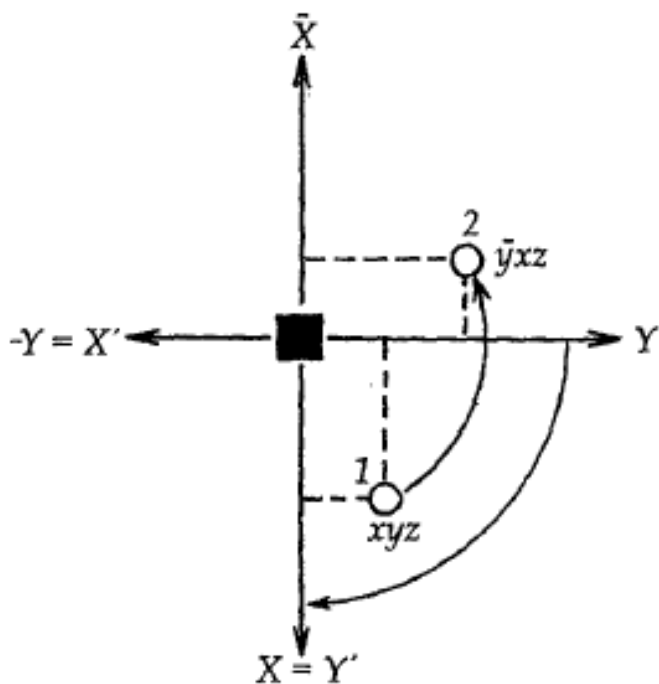


Положения и координаты точек, размноженных осью 3-го порядка



3. Матричный метод

В координатном методе операция симметрии рассматривалась, как перемещение точек объекта относительно фиксированной координатной системы. Однако, тот же результат можно получить путем преобразования (движения) координатной системы относительно неподвижной исходной точки. В этом случае операция симметрии будет представлена преобразованием координатной системы.



Вместо поворота исходной точки 1 (xyz) на 90° против часовой стрелки в положение 2 ($y'xz$) можно повернуть координатную систему в обратном направлении (по часовой стрелке) на тот же угол вокруг той же оси 4-го порядка. При таком повороте

$$X' = -Y, Y' = X, Z' = Z.$$

Представим данное преобразование координатного репера в виде системы линейных уравнений. Для этого выразим единичные векторы новой координатной системы A, B, C через старые a, b, c :

$$\vec{A} = 0 \cdot \vec{a} - 1 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$$

$$\vec{B} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$$

$$\vec{C} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c}$$

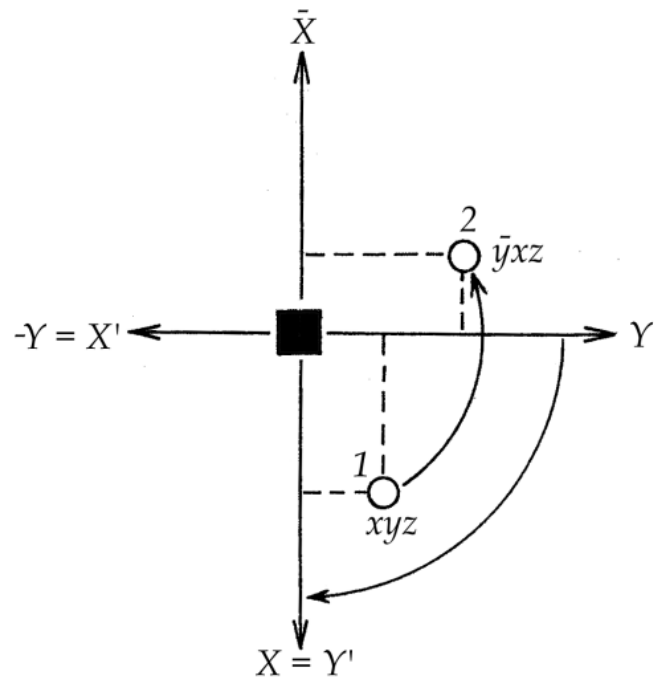
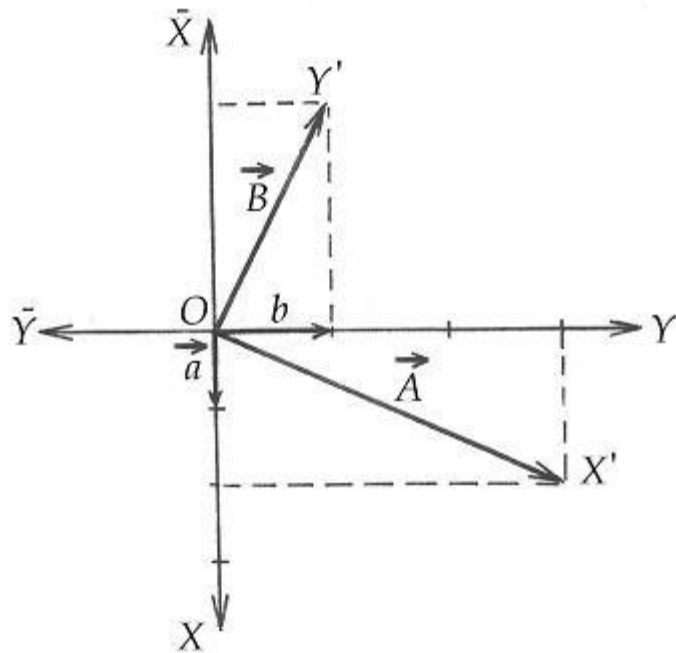
Поскольку характер такого преобразования определяется лишь коэффициентами при единичных векторах a, b, c систему уравнений можно записать сокращенно в виде таблицы, составленной из этих коэффициентов, — **матрицы (M) преобразования координатных осей:**

$$(M)_{ст \rightarrow нов} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица направляющих косинусов

$$(M)_{ст \rightarrow нов} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

где a_{2j} - направляющие косинусы углов между новой осью Y' и старыми осями X, Y и Z ; a_{i3} - направляющие косинусы углов между новыми осями X', Y' и Z' и старой осью Z . Первый подстрочный индекс (i) при символе a_{ij} относится к новым осям, второй (j) – к старым. Девять коэффициентов a_{ij} (где $i, j = 1, 2, 3$) зависимы друг от друга и в общем случае $a_{ij} \neq a_{ji}$.



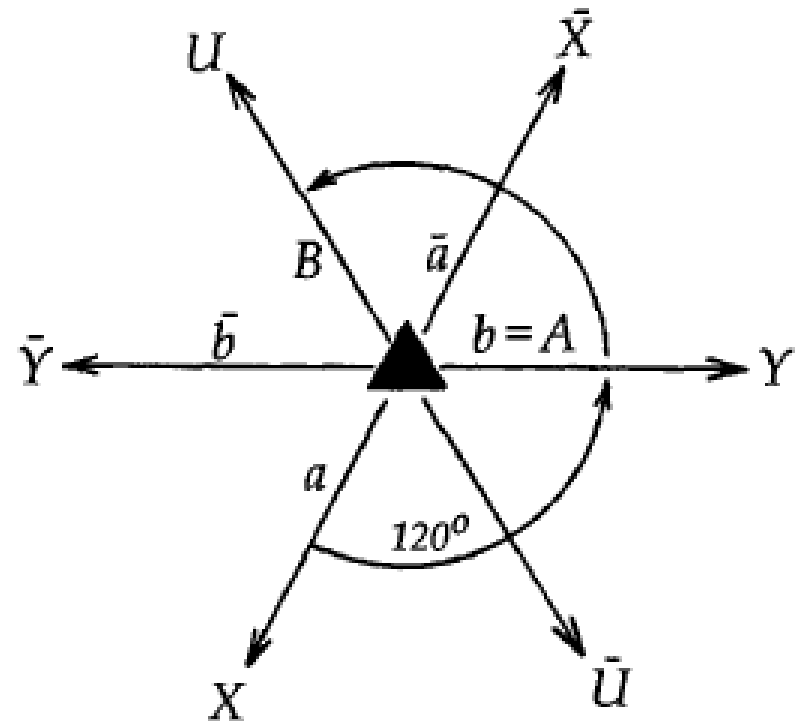
Подставив косинусы углов между соответствующими осями, получим для этого примера систему уравнений:

$$M = \begin{pmatrix} \cos 90^0 & \cos 180^0 & \cos 90^0 \\ \cos 0^0 & \cos 90^0 & \cos 90^0 \\ \cos 90^0 & \cos 90^0 & \cos 0^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{3(z)}^1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Такую матрицу нельзя использовать непосредственно для расчета символов граней и ребер кристаллов, вычисленных в прямоугольной КГК системе. Удобнее пользоваться матрицей, составленной на гексагональном кристаллографическом базисе ($\gamma = 120^\circ$), выразив, единичные векторы новой координатной системы как векторные суммы единичных векторов старой системы

$$L_{3(z)}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \bar{1} & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Любое кристаллографическое симметрическое преобразование может быть выражено «0-1»-матрицей при сохранении во всех случаях кристаллографической координатной системы. И наоборот, любая «0-1»-матрица выражает одну из симметрических операций. При этом если в ортогональной координатной системе «0-0»-матрицы, характеризующие симметрические операции, содержат по одной единице в каждом столбце или строке матрицы, то в гексагональной системе повороты вокруг осей 3-го и 6-го порядков представлены «0-1»-матрицами, содержащими в одной из первых строк по две ± 1 .

Пример: рассмотрим на матричном уровне последовательные действия двух симметрических операций:

$$L_{2(z)} = \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_{(z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{pmatrix}$$

В результате получим матрицу центра инверсии

В итоге взаимодействие двух операций симметрии приводит к появлению третьей, результирующей.

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{pmatrix}$$

чтобы получить искомый член 7 результирующей матрицы, находящийся на пересечении *i*-строки одной матрицы с *j*-столбцом другой, следует просуммировать результаты перемножения каждого члена *i*-строки на соответствующий член *j*-столбца: $7 = (1 \cdot 4) + (2 \cdot 5) + (3 \cdot 6)$.

Графическое представление правил перемножения матриц

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 4 & \\ \hline & 5 & \\ \hline & 6 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & 7 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 4 \\ \hline & & 5 \\ \hline & & 6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & 7 \\ \hline \end{array}$$

Основные положения теории групп

Группа - множество объектов (G) любой природы с заданной бинарной операцией ($*$), если для любой пары элементов (a и b) этого множества G определен третий, результирующий элемент $c = a * b$ того же множества. В общем случае $a * b \neq b * a$. Результат зависит от последовательности умножения элементов группы т.е., результирующие операции симметрии могут оказаться различными, если поменять порядок выполнения исходных операций.

Группой будет лишь такое множество с заданной бинарной операцией, для которого выполняются условия:

- **ассоциативности** $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- **существования единичного члена** (e) — такого элемента, что для любого элемента группы будет выполняться $e * a = a * e = a$;
- **обратимости** — для любого элемента a существует элемент a^{-1} из того же множества такой, что $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Примеры групп

- 1) ряд чисел с операцией сложения;
- 2) ряд элементов $\{1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}\}$ с операцией умножения;
- 3) множество векторов в пространстве с операцией векторного произведения;
- 4) совокупность операций симметрии с операцией умножения (взаимодействия симметрических операций);
- 5) множество матриц с операцией умножения

$$\left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Порядок группы (n) — это число ее элементов.

Группа называется конечной, если n конечно.

Коммутативная или абелева группа - если произведение любой пары элементов группы не зависит от порядка сомножителей

Изоморфные группы - если между элементами двух групп можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором произведению любых двух членов одной группы соответствует произведение соответствующих членов другой группы.

Порядок изоморфных групп (т. е. количество их членов) одинаков. Изоморфные друг другу конкретные группы симметрии с точки зрения теории групп не различаются: **все закономерности, установленные для одной из групп, справедливы для всех изоморфных с нею конкретных групп симметрии.**

Изоморфные группы имеют одинаковые таблицы умножения (с точностью до перестановок). Если в группе G имеется такой член g , совокупность степеней которого образует все элементы группы, т. е. $G = \{g^1, g^2, \dots = e\}$, то такая группа называется **циклической** и ее порядок равен n . При этом элемент g , степенями которого являются все другие члены группы, называется **порождающим элементом или генератором группы**.

Если часть членов группы G образует относительно той же операции группу H , то такое подмножество H называется **подгруппой** данной группы G .

Теорема Лагранжа: Порядок (r) подгруппы (H) является целым делителем порядка (n) группы (G) , т. е. $n/r = p$, где p — целое число, называемое **индексом подгруппы H в группе G**

Структура конечного класса симметрии, ее порядок выявляется произведением любых пар ее членов, собранных в своеобразную «таблицу умножения», называемую **квадратом Кейли**

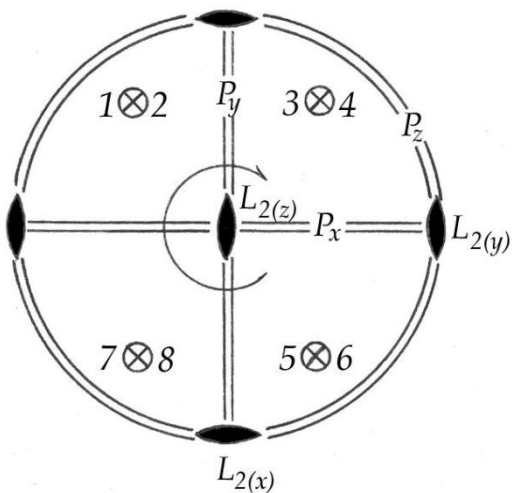
В такой квадратной таблице все операции симметрии, составляющие группу, записываются по горизонтали и вертикали, начиная с единичного члена, произведения же их фиксируются на пересечении вертикального столбца и горизонтальной строки.

Симметрия фигуры в виде параллелепипеда описывается группой симметрии $3L_23PC$, имеющей своими членами следующие симметрические операции: $P_x, P_y, P_z, L_{2(x)}, L_{2(y)}, L_{2(z)}, C, L_1$

В такой квадратной таблице все операции симметрии, составляющие группу, записываются по горизонтали и вертикали, начиная с единичного члена; произведения же их фиксируются на пересечении вертикального столбца и горизонтальной строки

L_1	P_x	P_y	P_z	$L_{2(x)}$	$L_{2(y)}$	$L_{2(z)}$	C
P_x	L_1						
P_y		L_1					
P_z			L_1				
$L_{2(x)}$				L_1			
$L_{2(y)}$					L_1		
$L_{2(z)}$						L_1	
C							L_1

L_1	P_x	P_y	P_z	$L_{2(x)}$	$L_{2(y)}$	$L_{2(z)}$	C
P_x	L_1	L_{2z}	L_{2y}	C	P_z	P_y	L_{2x}
P_y	L_{2z}	L_1	$L_{2(x)}$	P_z	C	P_x	$L_{2(y)}$
P_z	L_{2y}	P_x	L_1	P_y	P_x	C	$L_{2(z)}$
$L_{2(x)}$	C	P_z	P_y	L_1	$L_{2(z)}$	$L_{2(y)}$	P_x
$L_{2(y)}$	P_z	C	P_x	$L_{2(z)}$	L_1	$L_{2(x)}$	P_y
$L_{2(z)}$	P_y	P_x	C	$L_{2(y)}$	$L_{2(x)}$	L_1	P_z
C	L_{2x}	$L_{2(y)}$	$L_{2(z)}$	P_x	P_y	P_z	L_1



8 точек общего положения связаны между собой восемью операциями симметрии данной группы