Сегодня: понедельник, 9 октября 2023 г.

Общая физика. Часть 2

Семинар 6

ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1. **Определение плотности поверхностных σ′ и объемных ρ′ поляризационных зарядов в диэлектрике**
2. **Определение емкости конденсаторов с неоднородным диэлектриком**

Теоретический материал

вектор поляризации

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{\Delta V}\sum_i \vec{p}_i = n\langle\vec{p}\rangle$$

Плотность объемных связанных зарядов в поляризованном диэлектрике

$$\rho' = -\mathrm{div}\vec{P}$$

Плотность поверхностных связанных зарядов σ′ на границе раздела двух диэлектриков

$$\sigma' = -\vec{\mathrm{n}}_{12}\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) = P_{2n} - P_{1n}$$

n_{12} – **единичный вектор нормали, направленный из первой среды во вторую**

Теорема Гаусса для вектора поляризации

$$\oint_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = -q'$$

q' – **полный связанный заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности** S

Напряженность электрического поля в диэлектрике

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

Диэлектрическая восприимчивость

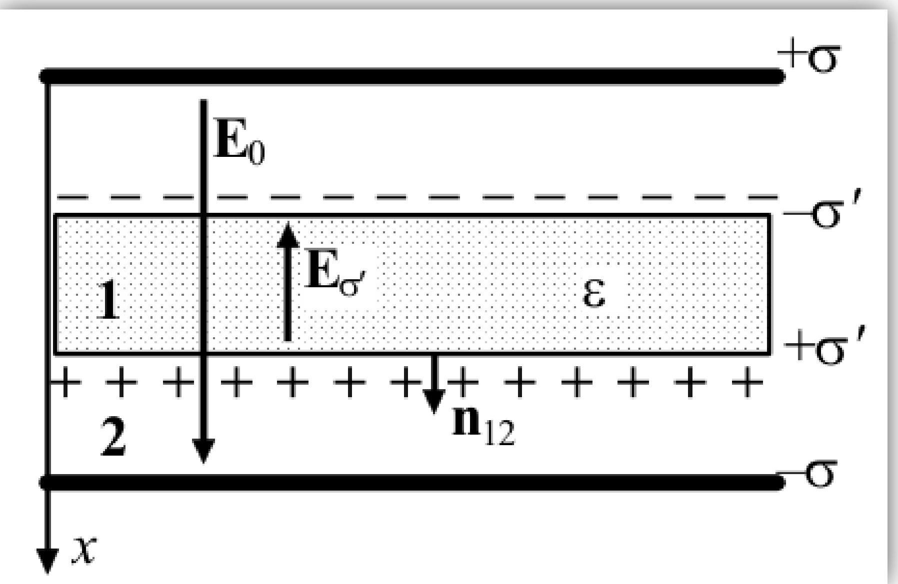
$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}, \varepsilon = \left(1+\chi\right)$$

Вектор электрического смещения

$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

Задача 1. В плоский конденсатор параллельно обкладкам вставлена диэлектрическая пластинка с проницаемостью ε. Определить величину вектора поляризации P и плотности поверхностных σ′ и объемных ρ′ связанных зарядов в пластинке. Заряд конденсатора q, площадь пластин S.

Решение:



$$E = E_0 - E_{\sigma'} = \frac{E_0}{\varepsilon}$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma$$

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

$$\boxed{\vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E}}$$

$$\left\{ E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \right\}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma, \vec{P} \parallel \vec{E}$$

2 способ:

Граничные условия

$$\boxed{E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma}$$

$$\boxed{\sigma' = -\vec{n}_{12}\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) = P_{2n} - P_{1n}}$$

для нижней границы пластины

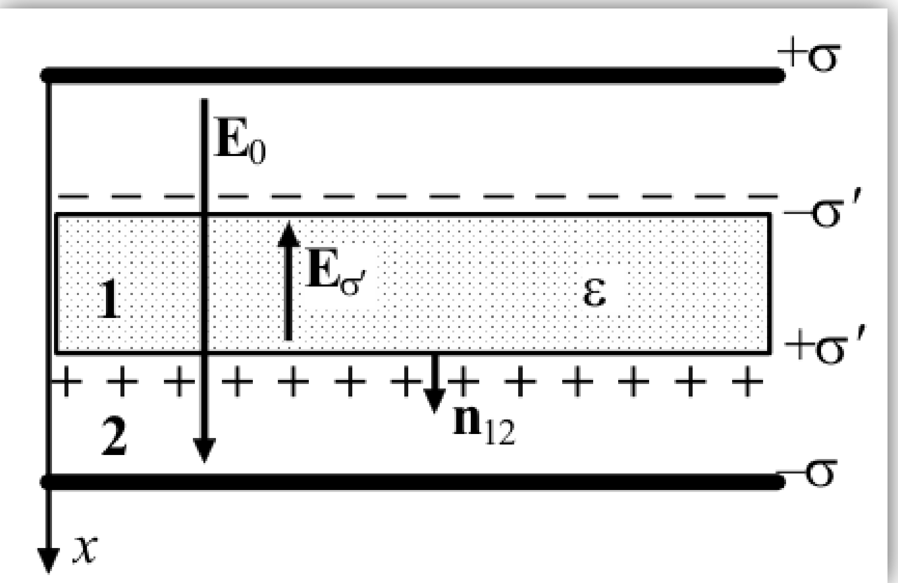
$$P_2 = 0$$

$$\sigma' = \vec{n}_{12}\vec{P}_1$$

$$\boxed{\vec{P} + \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}}$$

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma$$

$$\vec{n}_{12}\vec{P}_1 = \sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma > 0$$



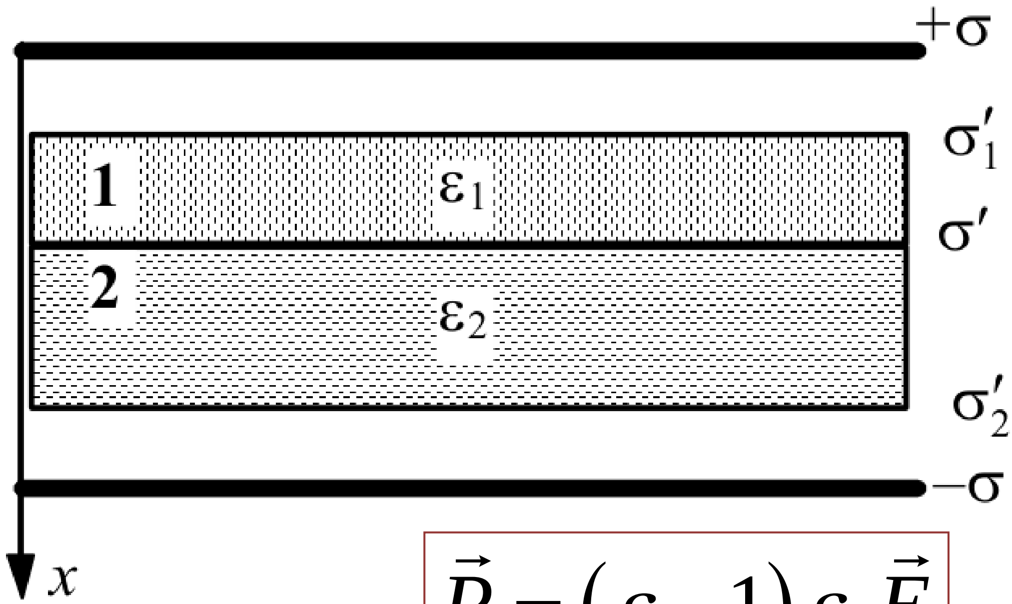
Положительность результата означает совпадение направлений векторов нормали n_{12} и P_1

Задача 2. Между обкладками плоского конденсатора находятся две прилегающие друг к другу диэлектрические пластинки, ε_1 и ε_2. На пластинах конденсатора равномерно распределены заряды с поверхностной плотностью σ и $-\sigma$.

Определите плотности σ' связанных зарядов на свободных поверхностях диэлектрических пластинок, и на границе их раздела

Решение:

Учитываем направление оси X и знаки зарядов, получаем, что вне диэлектрических пластин



$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{P} = \left(\varepsilon - 1\right)\varepsilon_0 \vec{E}}$$

внутри пластинок 1 и 2

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1 \varepsilon_0}, E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2 \varepsilon_0}$$

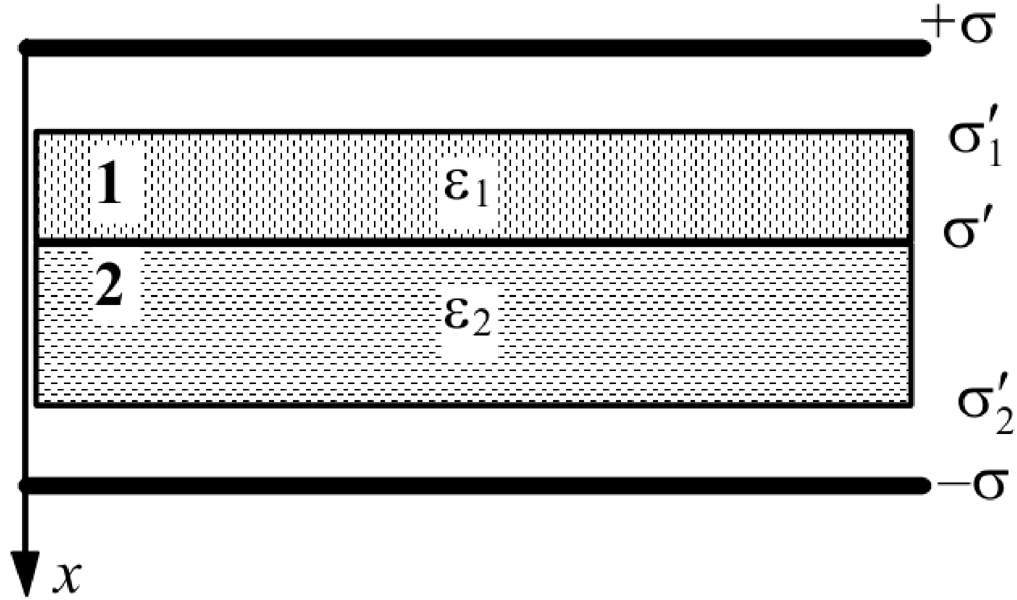
$$\boxed{\sigma' = -\vec{n}_{12}\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right)}$$

$$P_1 = \left(\varepsilon_1 - 1\right)\varepsilon_0 E_1 = \sigma \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1}$$

$$\sigma_1' = -P_1 = -\sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) < 0$$

$$P_2 = \left(\varepsilon_2 - 1\right)\varepsilon_0 E_2 = \sigma \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2}$$

$$\sigma_2' = P_2 = \sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) > 0$$



$$\sigma_1' = -P_1 = -\sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) < 0$$

$$\sigma_2' = P_2 = \sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) > 0$$

$$\sigma' = -\sigma_1' - \sigma_2' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\sigma$$

Задача 3. Однородный изотропный диэлектрик ε заполняет все нижнее полупространство. В вакууме на расстоянии h от его поверхности находится точечный заряд q.

Определить поверхностную плотность связанных зарядов в произвольной точке границы, а также полный связанный заряд на поверхности диэлектрика.

Решение:

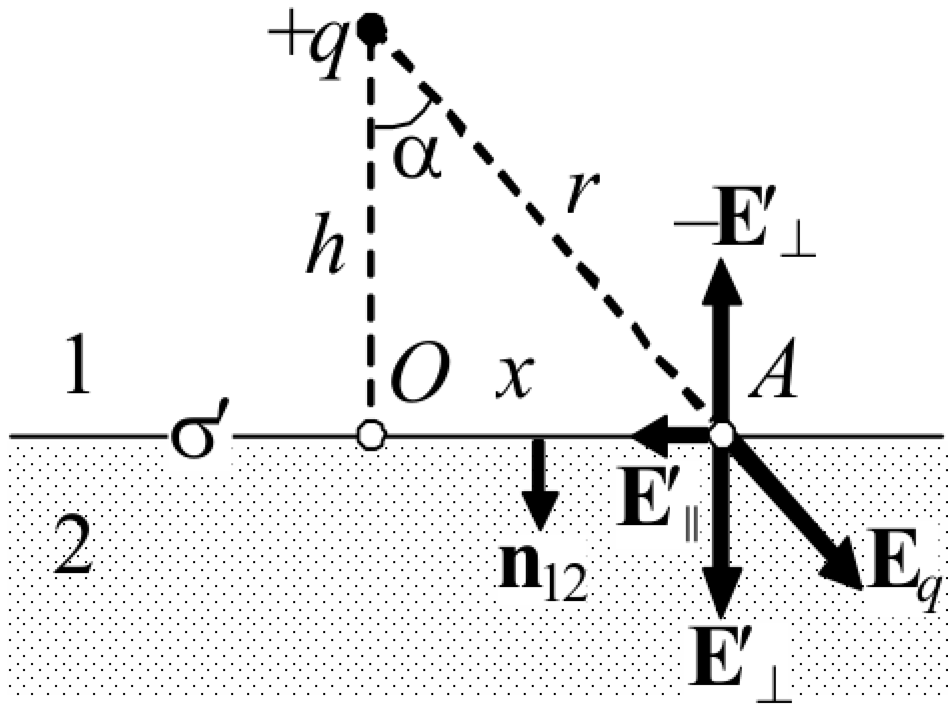
Пусть σ′(x) – плотность связанного заряда в точке А

Вблизи А напряженность поля

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}'$$

Напряженность стороннего точечного заряда q

$$E_q = \frac{kq}{r^2}, r^2 = x^2 + h^2$$



Связанные заряды будут распределены на плоскости неравномерно

Нам нужна нормальная компонента поля $E'_\perp$, она создается только поверхностными зарядами в непосредственной окрестности точки А

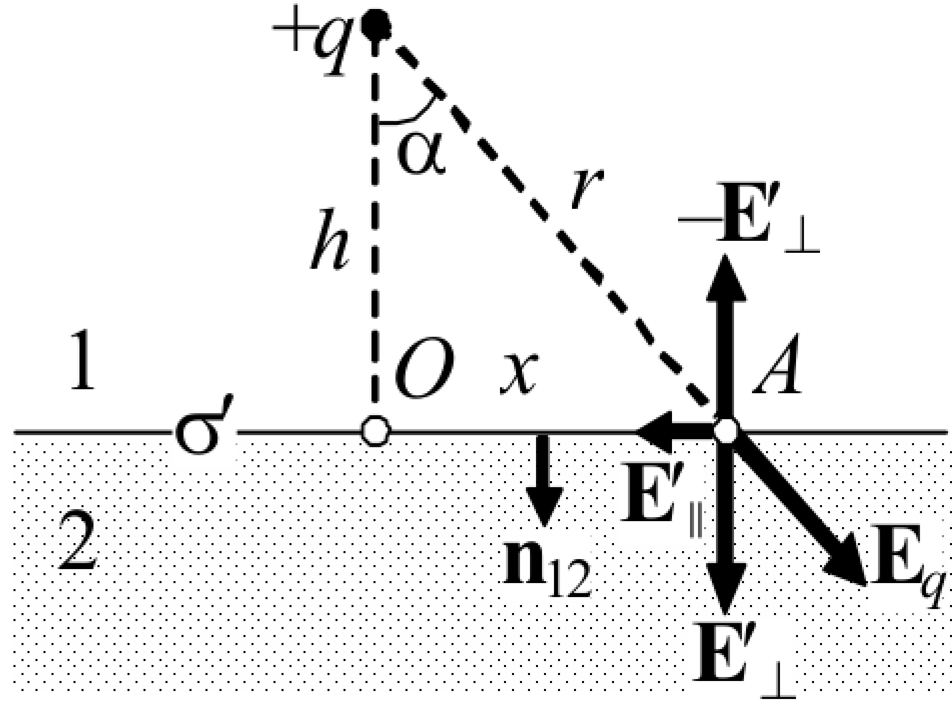
Поле от всех остальных связанных зарядов плоскости в этой точке направлено горизонтально вдоль плоскости $E'_{||}$

В первой среде (в вакууме) нормальная компонента вектора индукции, в соответствии с выбранным направлением нормали равна

$$D_{1n} = \varepsilon_0 E_{1n}$$

$$= \varepsilon_0 E_q \cos\alpha - \frac{\sigma'}{2}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{qh}{r^3} - \frac{\sigma'}{2}$$



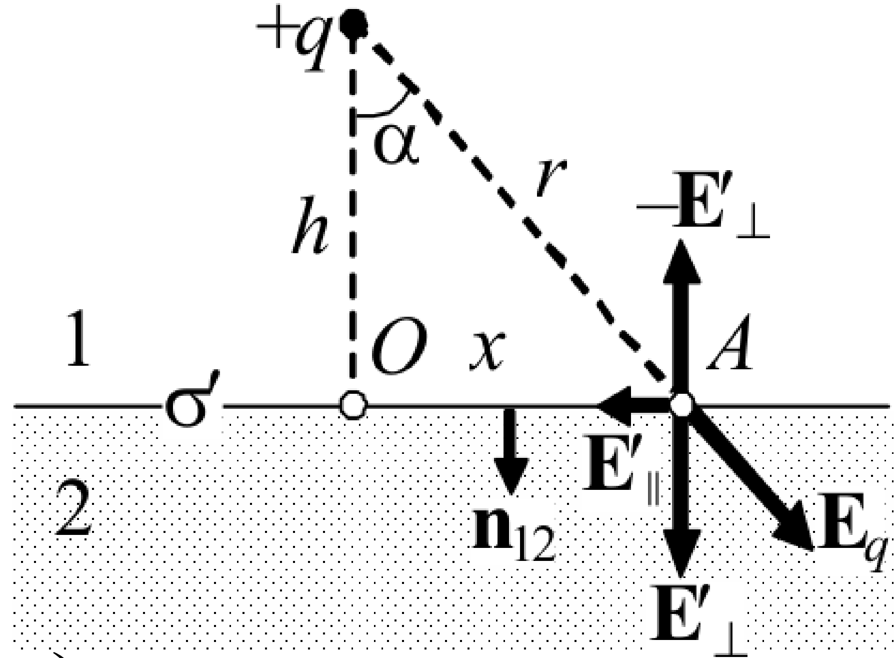
$$\boxed{\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}}$$

В второй среде (в диэлектрике)

$$D_{2n} = \varepsilon_0 \varepsilon E_{2n}$$

$$= \varepsilon\left(\varepsilon_0 E_q \cos\alpha + \frac{\sigma'}{2}\right) = \varepsilon\left(\frac{1}{4\pi}\frac{qh}{r^3} + \frac{\sigma'}{2}\right)$$

используем непрерывность нормальной компоненты вектора смещения на границе раздела вакуум (среда 1) –диэлектрик (среда 2)



$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{qh}{r^3} - \frac{\sigma'}{2} = \varepsilon\left(\frac{1}{4\pi}\frac{qh}{r^3} + \frac{\sigma'}{2}\right)$$

$$\sigma'(x) = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\frac{qh}{2\pi r^3} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\frac{qh}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)^{3/2}}$$

Для вычисления величины полного связанного заряда q′ выделяем на плоскости кольцевую область с центром в точке О, расположенную между окружностями радиусов x и x + dx.

$$q' = \oint_S \sigma'(x)\,dS$$

$$= \int_S \sigma' \cdot 2\pi x dx$$

$$q' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} qh \int_0^\infty \frac{1}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)^{3/2}} 2\pi x dx$$

$$= -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} qh \int_0^\infty \frac{x dx}{\left(x^2 + h^2\right)^{3/2}}$$

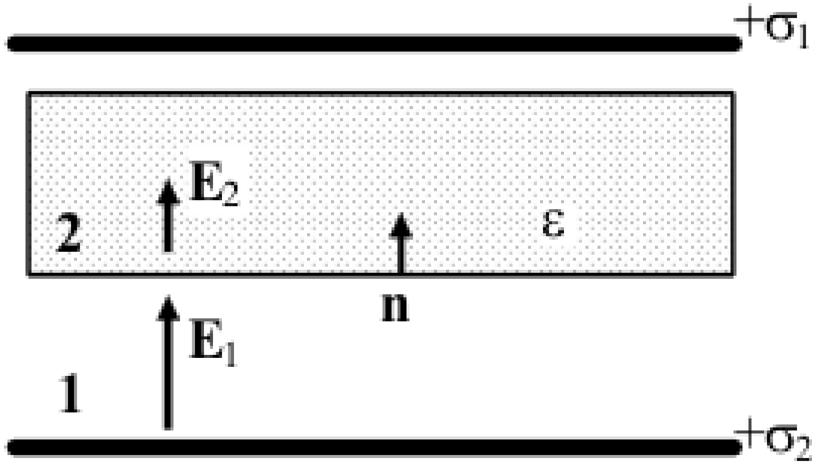
$$= -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} q$$

Задача 4. Две параллельные пластины ничтожно малой толщины заряжены одноименно, поверхностная плотность заряда на верхней пластине σ_1 = 3 мкКл/м^2, а на нижней σ_2 = 6 мкКл/м^2. Расстояние между пластинами h = 1 см мало по сравнению с линейными размерами пластин. Между пластинами вставлена плоскопараллельная парафиновая пластинка толщиной d = 5 мм. Диэлектрическая проницаемость парафина ε = 2. Определить напряженность поля между пластинами вне диэлектрика, напряженность поля E_2 внутри диэлектрика и разность потенциалов между пластинами.

Решение:

На пластинах размещены одноименные заряды
То есть векторы напряженности от пластин направлены навстречу друг другу и суммарная напряженность поля вне диэлектрика направлена от нижней пластины (где величина заряда больше) к верхней

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{n} = 170 \text{ кВ/м}$$



Внутри диэлектрика величина напряженности в ε раз меньше:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon}\vec{n} = 85 \text{ кВ/м}$$

Поле в пространстве между пластинами однородное:

$$\Delta\varphi = E_1(h-d) + E_2 d = 1{,}3 \text{ кВ}$$

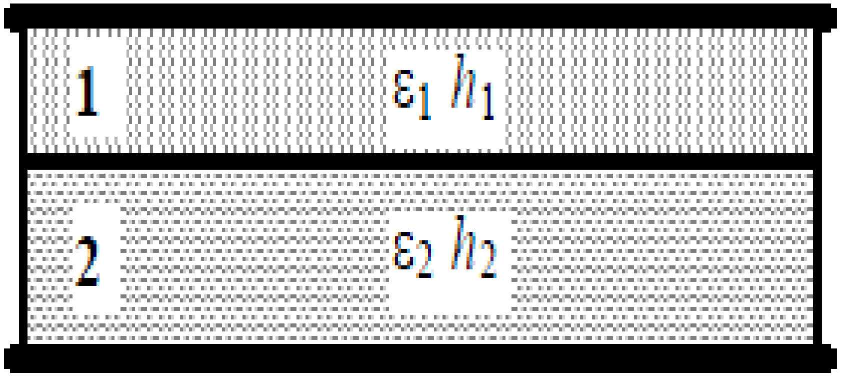
Задача 5. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектриков. Толщина слоя первого диэлектрика с проницаемостью ε_1 равна h_1, толщина слоя второго диэлектрика с проницаемостью ε_2 равна h_2. Площадь каждой обкладки равна S.

Найти емкость C конденсатора.

Решение

1 вариант

Напряженность поля в 1 и 2 диэлектрике



$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} \qquad E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2 \varepsilon_0}$$

$$\Delta\varphi = E_1 h_1 + E_2 h_2$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} h_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} h_2$$

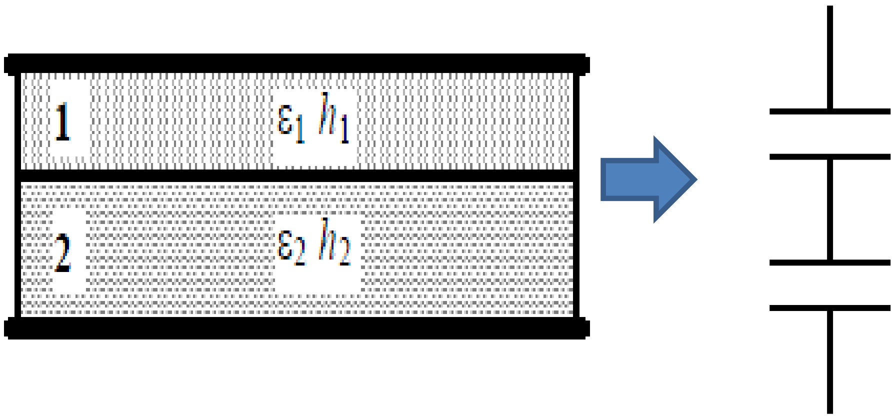
$$= \frac{\sigma \left(h_1 \varepsilon_2 + h_2 \varepsilon_1 \right)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0}$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}$$

$$= \frac{\sigma S \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0}{\sigma \left(h_1 \varepsilon_2 + h_2 \varepsilon_1 \right)}$$

$$= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{\left(h_1 \varepsilon_2 + h_2 \varepsilon_1 \right)}$$

2 вариант



$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S}{h_1}, C_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{h_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

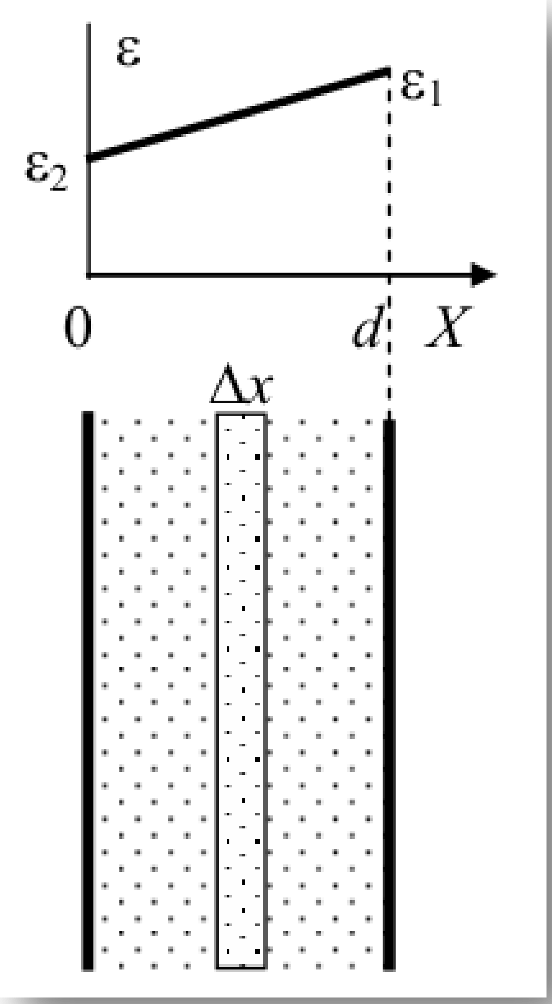
$$= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{\left(h_1 \varepsilon_2 + h_2 \varepsilon_1\right)}$$

Задача 6. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, проницаемость которого меняется по линейному закону от значения ε_1 у одной пластины до значения ε_2 ($\varepsilon_2 < \varepsilon_1$) у другой. Расстояние между пластинами d, площадь каждой пластины равна S. Найти емкость C конденсатора.

Решение

$$\varepsilon_1(x)=\varepsilon_2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\frac{x}{d}$$

Допустим на обкладках конденсатора находятся заряды ±q, тогда поверхностная плотность заряда

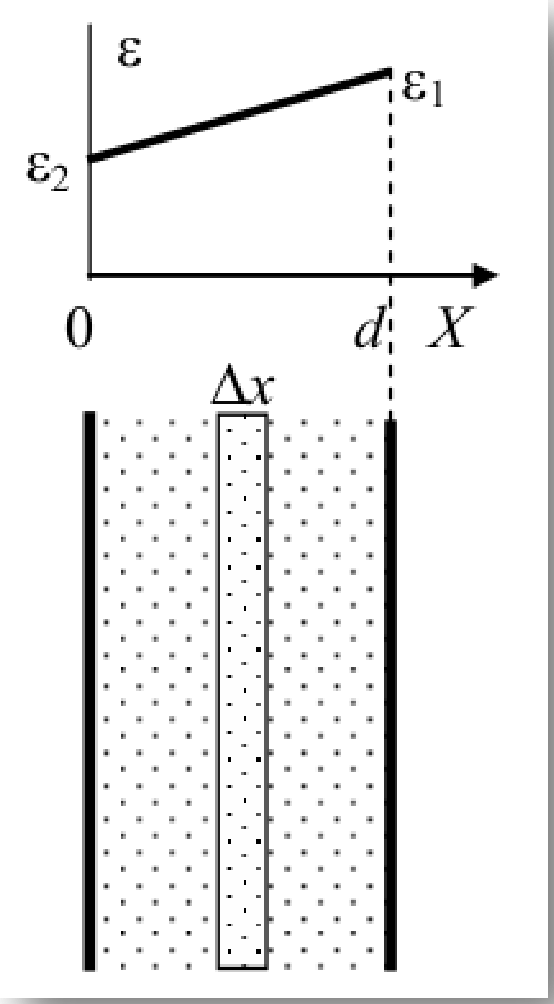


$$\sigma=\pm\frac{q}{S}\quad\Rightarrow D=\sigma$$

$$E(x)=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{1}{\varepsilon_2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\frac{x}{d}}$$

$$\Delta\varphi=\int_0^d E(x)\,dx=\frac{\sigma d}{\varepsilon_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\Delta\varphi = \int_0^d E(x)\,dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$



$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) S}{d \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$