Сегодня: среда, 27 сентября 2023 г.

Общая физика. Часть 2

Семинар 4

ПРОВОДНИКИ и ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

- Метод зеркальных отображений
- Энергия электрического поля

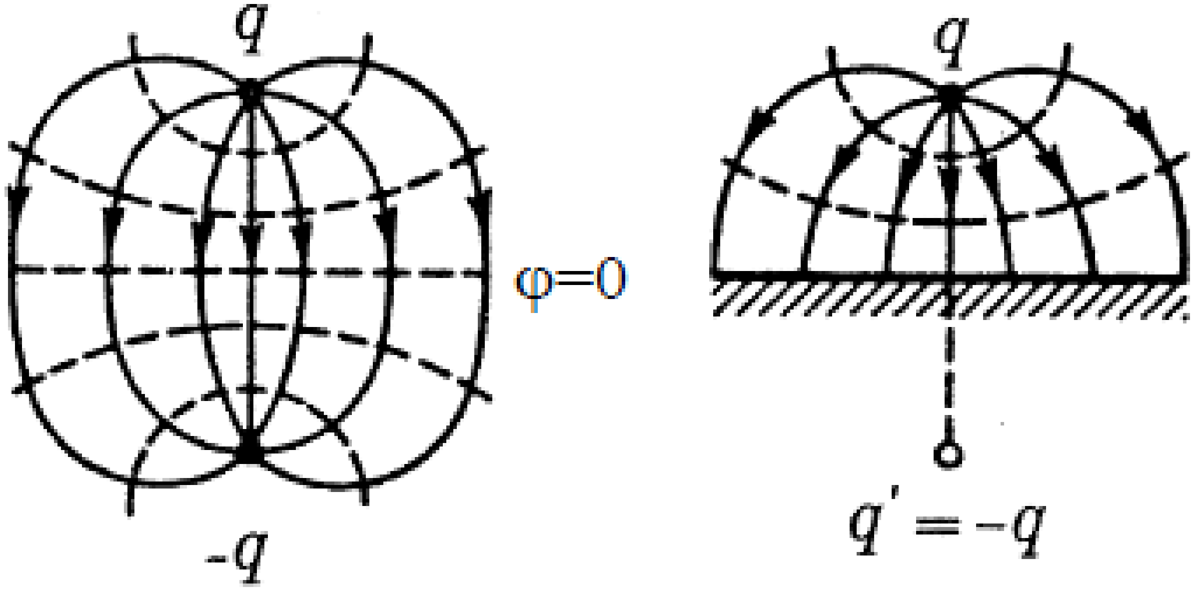
Сегодня: среда, 27 сентября 2023 г.

Общая физика. Часть 2

Семинар 4

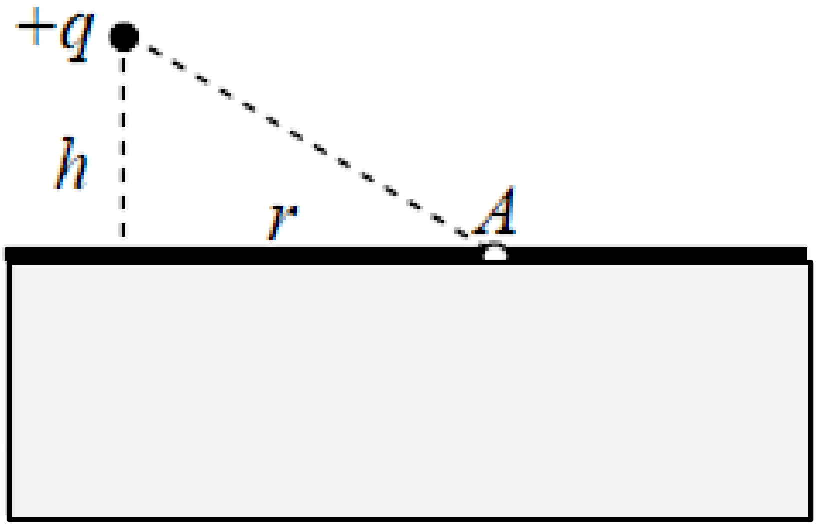
ПРОВОДНИКИ и ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Метод зеркальных отображений



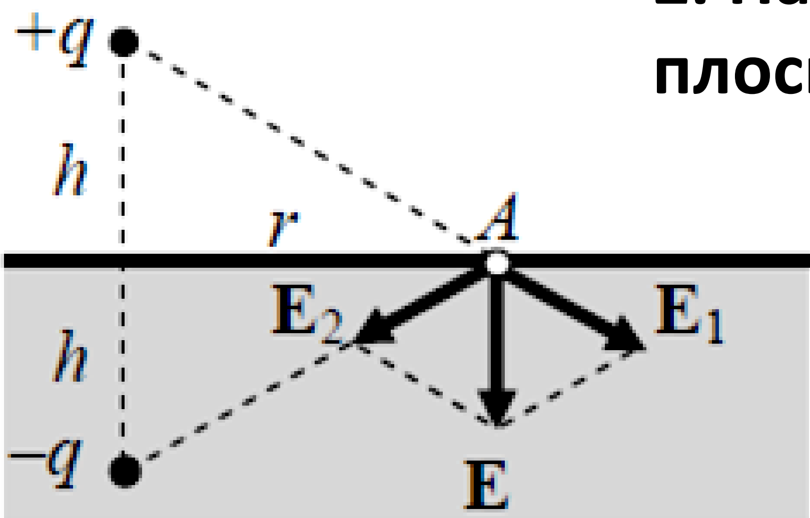
Единственность решения уравнения Пуассона при наличии соответствующих граничных условий позволяет свести некоторые задачи электростатики к эквивалентным, но более простым. Метод состоит в подборе таких дополнительных фиктивных зарядов – "изображений", которые вместе с заданными зарядами создавали бы поле, у которого одна из эквипотенциальных поверхностей совпала бы с поверхностью данного проводника. В области вне проводника поле фиктивных зарядов полностью моделирует поле, создаваемое поверхностными зарядами, расположенными на проводнике, так что поле вне проводника полностью совпадает с полем исходной системы.

Задача. На расстоянии h = 1 см от заземленной проводящей бесконечной плоскости находится точечный заряд q = 2 нКл. Определить плотность индуцированного заряда в произвольной точке А (r = 2 см) на плоскости.



Решение

1. Строим заряд-изображение *–q*



2. Напряженность в точке *A* на плоскости

$$E_1 = k\frac{q}{h^2 + r^2}$$

3. Учитывая, что $E_1 = E_2$, находим полную напряженность E в точке A:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\Rightarrow E = 2E_1 \cos\alpha = \left\{\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}\right\}$$

$$E = k\frac{2qh}{\left(h^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

Е направлен перпендикулярно плоскости от положительного заряда к отрицательному = в сторону плоскости. Вблизи проводника

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$k\frac{2qh}{\left(h^2 + r^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Ответ:

$$\sigma(r) = -\frac{qh}{2\pi\left(h^2 + r^2\right)^{3/2}} \approx 40\ \text{пКл/м}^2$$

Задача 2. Заряд q = 20 нКл распределен равномерно по поверхности сферы радиуса R = 3 см. Найти собственную электрическую энергию системы.

Решение:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho dV + \frac{1}{2}\int_S \varphi\sigma dS}$$

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\int_V \cancel{\varphi\rho dV}^{\rho=0}+\frac{1}{2}\int_S \varphi\sigma dS} \qquad \varphi=k\frac{q}{R}, \qquad \sigma=\frac{dq}{dS}$$

заряд находится только на поверхности сферы

$$W=\frac{1}{2}\int_S k\frac{q}{R}\frac{dq}{dS}dS=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R}$$

$$=\frac{\left(20\cdot 10^{-9}\right)^2}{8\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 3\cdot 10^{-2}}=60\,\text{мкДж}$$

2 способ

$$W = \int_R^\infty \omega dV = \left\{ \omega = \frac{\left(\vec{E}, \vec{D}\right)}{2} \right\}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

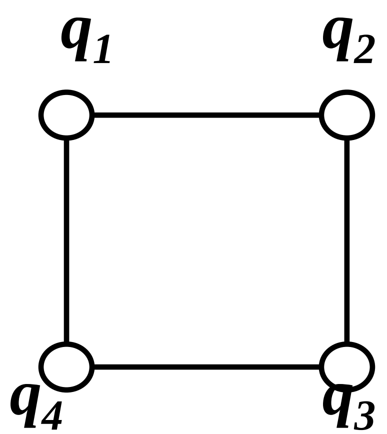
$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

Вся энергия поля сосредоточена в пространстве вне сферы

$$W = \int_R^\infty \omega dV = \int_R^\infty \omega 4\pi r^2 dr = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R}$$

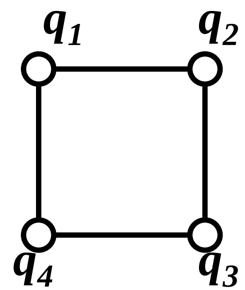
Задача 3. **В вершинах квадрата со стороной** ***a*** **находятся точечные заряды** q_1, q_2, q_3, q_4. **Найти потенциальную энергию этой системы зарядов.**



Решение:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} \varphi_i q_i}$$

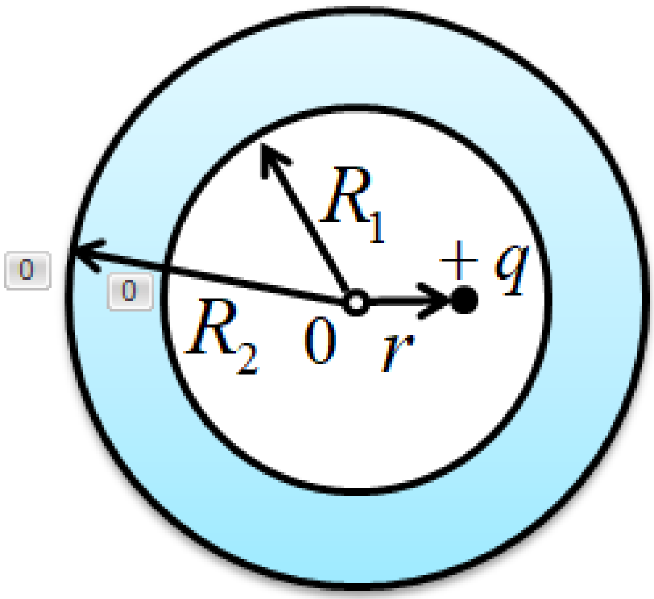
$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\varphi_i q_i}$$



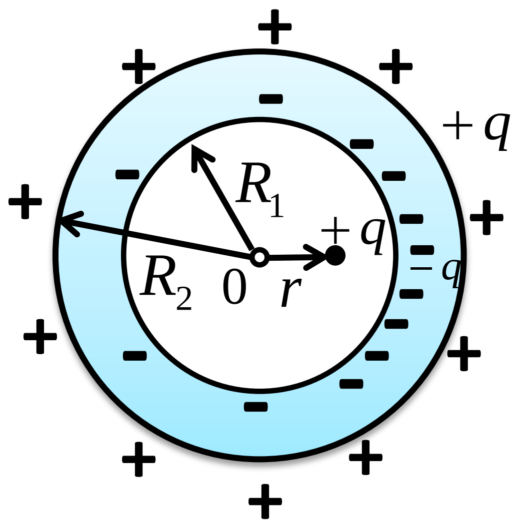
содержится шесть слагаемых
по числу пар взаимодействующих частиц

$$W = k\frac{q_1 q_2}{a} + k\frac{q_2 q_3}{a} + k\frac{q_3 q_4}{a} + k\frac{q_1 q_4}{a} + k\frac{q_1 q_3}{a\sqrt{2}} + k\frac{q_2 q_4}{a\sqrt{2}}$$

Задача 3. **Точечный заряд q находится на расстоянии r от центра O незаряженного сферического слоя проводника, внутренний и наружный радиусы которого равны соответственно R_1 и R_2. Найти потенциал φ_0 в точке O, если $r < R_1$.**



Решение: **потенциал в центре сферического слоя складывается из трех вкладов:**



$$\varphi_0 = \underbrace{\varphi_{+q}}_{\text{внешняя поверхность слоя}} + \underbrace{\varphi_{-q}}_{\text{внутренняя поверхность слоя}} + \underbrace{\varphi_{+q}}_{\text{от заряда внутри на r от центра}}$$

$$\varphi_0 = \underbrace{k\frac{q}{R_2}}_{\text{заряд, равномерно распределенный по внешней поверхности слоя}} + \underbrace{\left(-k\frac{q}{R_i}\right)}_{\text{заряд, неравномерно распределенный по внутренней поверхности слоя}} + \underbrace{k\frac{q}{r}}_{\text{от заряда внутри слоя на r от центра}}$$

Так как все индуцированные заряды на внутренней поверхности расположены от центра на одинаковом расстоянии $R_i = R_1$, то

$$\varphi_0 = kq\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{r}\right)$$

Ответ:

$$\varphi_0 = kq\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{r}\right)$$

Задача 4. Металлическая сфера радиуса R, несущая заряд q, расположена в безграничной однородной диэлектрической среде с проницаемостью ε. Определить вектор поляризации $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ в произвольной точке среды, плотность поверхностных σ' и объемных ρ' связанных зарядов в диэлектрике

Решение:

1. Внутри сферы ($r < R$) зарядов нет, поэтому по теореме Гаусса

$$E_{внутри} = 0$$

Вне сферы $r > R$, напряженность поля будет как от точечного заряда q, помещенного в центр сферы

$$E(r) = k\,\frac{q}{\varepsilon r^2}$$

$$\vec{P}_{внутри}(\vec{r}) = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{P}_{вне}(\vec{r}) = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\,\frac{kq}{\varepsilon r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

2. Диэлектрик изотропный и сторонних зарядов внутри него нет, поэтому объемных связанных зарядов в нем не возникает:

$\rho' = 0$.

3. Для вычисления σ' запишем два эквивалентные выражения для напряженности поля в диэлектрике.

- ✓ **поле точечного заряда, эквивалентное полю заряженной сферы, в диэлектрике в ε раз меньше, чем в той же точке в отсутствие диэлектрика**

$$E(r) = k\frac{q}{\varepsilon r^2}$$

- ✓ **напряженность поля реально создается сторонним q и поляризационным q′ зарядами, образовавшимся на сферической границе диэлектрика**

$$E = E_q + E_{q'} = k\frac{q+q'}{r^2}$$

Приравниваем

$$k\frac{q}{\varepsilon r^2} = k\frac{q+q'}{r^2}$$

$$q' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q$$

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}, \ \sigma' = \frac{q'}{4\pi R^2}$$

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma$$