Сегодня:
понедельник, 20
ноября 2023 г.

Семинар 11

Явления электромагнитной индукции. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции. Энергия МП

1. Магнитный поток, пронизывающий площадку *S*:

$$\Phi = \int_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \int_S B_n \cdot dS \qquad \alpha = \angle\left(\vec{B}, \vec{n}\right)$$

$$A = I\Delta\Phi$$

2. Работа перемещения замкнутого контура с током в магнитном поле:

где ΔΦ – приращение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром, *I* – сила тока.

3. Закон Фарадея для ЭМИ: (интегральная форма)

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Электродвижущая сила индукции в рамке (*N* витков, площадь *S*, частота вращения ω) в однородном магнитном поле *B* :

$$\varepsilon_i = NB\omega S\sin\omega t,$$

$$\varepsilon_i = NB\omega S\sin\left(2\pi n t\right)$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E}_{\text{вихр}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

4. Закон электромагнитной индукции (дифференциальная форма)

$$\varepsilon_i = -\frac{LdI}{dt},$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = -\frac{L\Delta I}{\Delta t}$$

Мгновенное значение ЭДС самоиндукции в контуре при изменении силы тока в нем:

L – индуктивность контура.

Потокосцепление :

$$\boxed{\Psi = LI}$$

$$\boxed{L = \mu\mu_0 nV, \quad n = \frac{N}{V}}$$

Индуктивность соленоида:

$$\boxed{\Phi = LI}$$ L (Гн) – индуктивность контура.

5. Энергия магнитного поля линейного контура с током:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\Phi I = \frac{1}{2}LI^2}$$

Коэффициент взаимной индуктивности:

$$\boxed{\Phi_j(I_i) = L_{ij}I_i}$$

$$\boxed{L_{ji} = L_{ij}}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{j,i} L_{ij}I_jI_i}$$

Энергия МП системы контуров с током:

$$W = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i} L_{ii}I_i^2}_{\text{Собственная энергия контуров}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\substack{j,i \\ j\neq i}} L_{ji}I_jI_i}_{\text{Энергия взаимодействия}}$$

$$\boxed{I_d = I_0 \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)}$$

Сила экстратока при размыкании цепи:

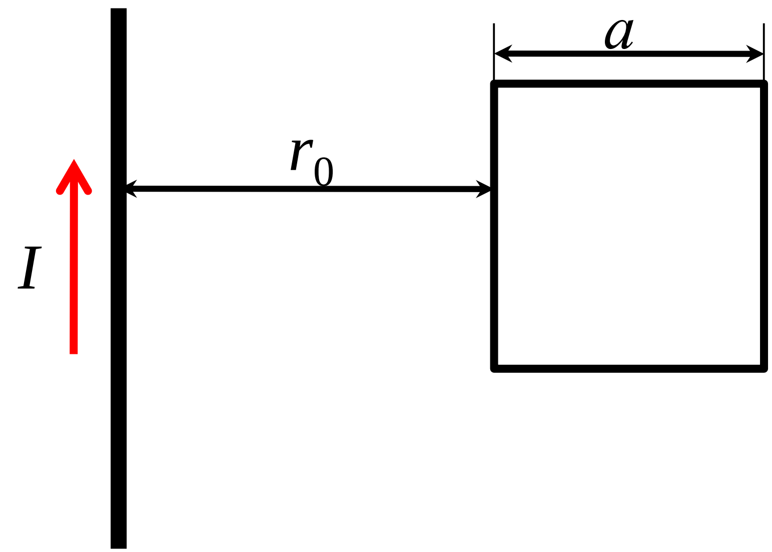
Сила экстратока при замыкании цепи:

$$\boxed{I_c = I_0\left(1-\exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)\right)}$$

$$\boxed{\begin{gathered} Q = -\frac{\Delta\Psi}{R}, \\ Q = -\frac{1}{R}\int d\Psi = \frac{1}{R}\left(\Psi_2 - \Psi_1\right) \end{gathered}}$$

Заряд, протекший в контуре при изменении магнитного потока:

Задача 1. В плоскости квадратной рамки с омическим сопротивлением R и стороной a расположен на расстоянии r_0 от рамки прямой бесконечный проводник. Сила тока в проводнике изменяется по закону $I = bt^3$, где $b > 0$ и $b = const$. Проводник параллелен одной из сторон рамки. Определить:



1) магнитный поток, пронизывающий площадь рамки;
2) ЭДС индукции, наведенную в рамке;
3) силу тока в рамке в момент времени t.

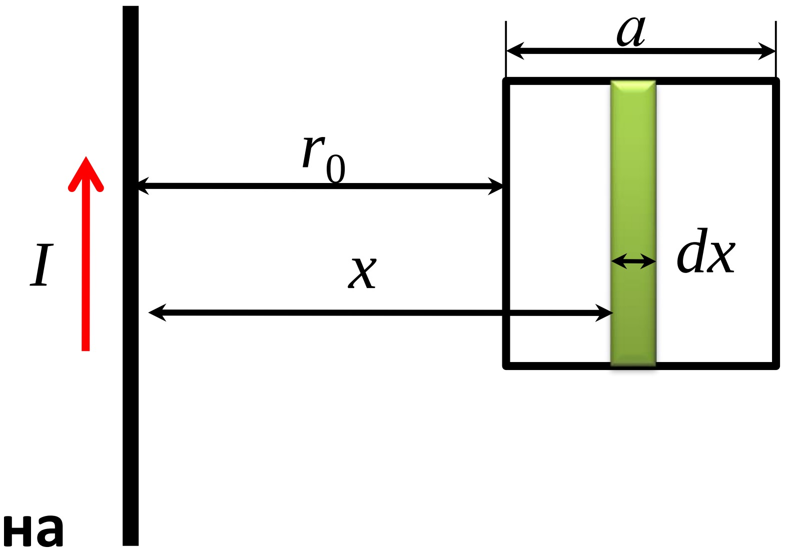
Дано: R, a
r_0
$I = bt^3$,
$b > 0$
$b = const.$

Определить:

1) Φ - ?;
2) ε_i - ?;
3) $I(t)$.

$$I\sim \rightarrow \Phi\sim \rightarrow I_i$$

Рамка находится в неоднородном магнитном поле, поэтому метод ДИ.



Делим площадь рамки на узкие полоски *dx* (в пределах каждой из них МП можно считать однородным).

По закону Био-Савара-Лапласа

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

Элементарный магнитный поток

$$d\Phi = Badx = adx\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{r_0}^{r_0+a} a dx \frac{\mu_0 I}{2\pi x} = \frac{\mu_0 b t^3 a}{2\pi} \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{dx}{x}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 b t^3 a}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0 + a}{r_0} \right)$$

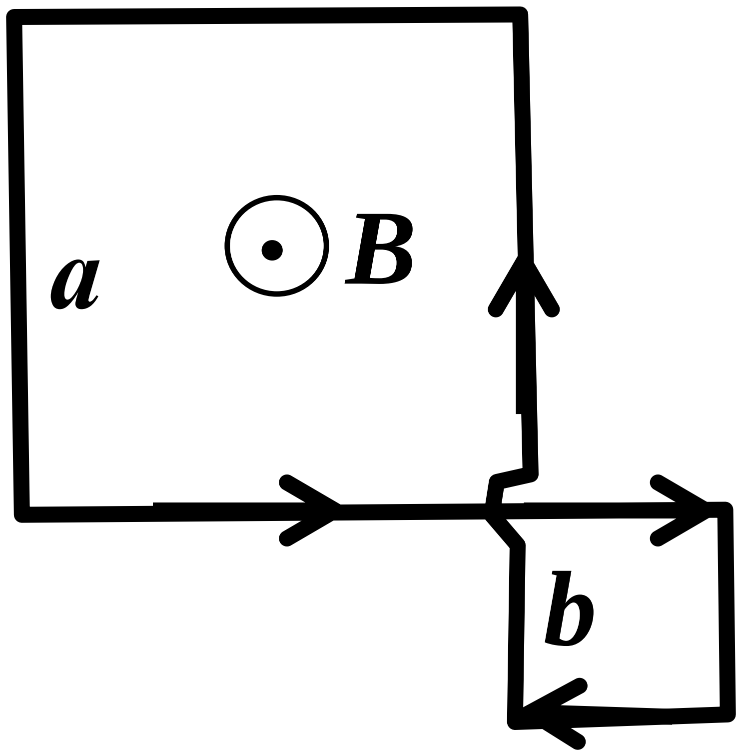
По закону Фарадея ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = 3t^2 a \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0 + a}{r_0} \right)$$

Сила тока из закона Ома :

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = 3t^2 a \frac{\mu_0 b}{2\pi R} \ln\left(\frac{r_0 + a}{r_0} \right)$$

Задача 2. Плоский контур, имеющий вид двух квадратов со сторонами a и b соответственно, находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен его плоскости и меняется по закону $B(t) = B_0 \cos \omega t$. Найти зависимость от времени силы тока I в контуре, если сопротивление единицы длины провода равно r. Индуктивностью контура пренебречь.



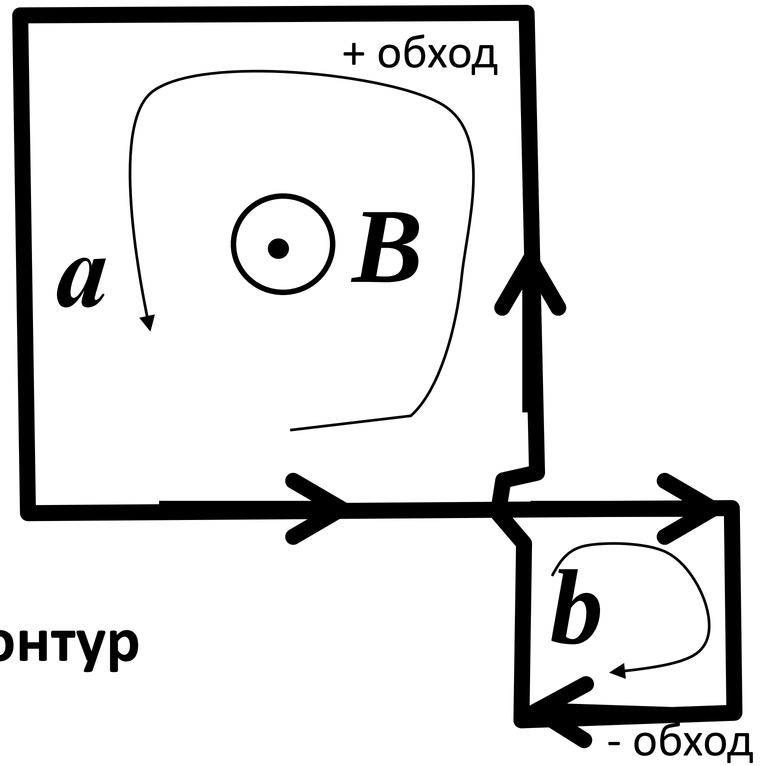
Дано:

a **и** ***b***

$B(t) = B_0 \cos \omega t.$

R

Найти: $I\,(t)$



Полный магнитный поток через контур

$$\Phi = \Phi_{бол} + \Phi_{мал}$$

$$\Phi = Ba^2 - Bb^2 = B\left(a^2 - b^2\right)$$

ЭДС

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left(a^2 - b^2\right)\frac{dB}{dt}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left(a^2 - b^2\right)\frac{dB}{dt}$$

$$\mathbf{B(t) = B_0 \cos \omega t}$$

$$\varepsilon = -\left(a^2 - b^2\right)\frac{dB}{dt} = \left(a^2 - b^2\right)\omega B_0 \sin \omega t$$

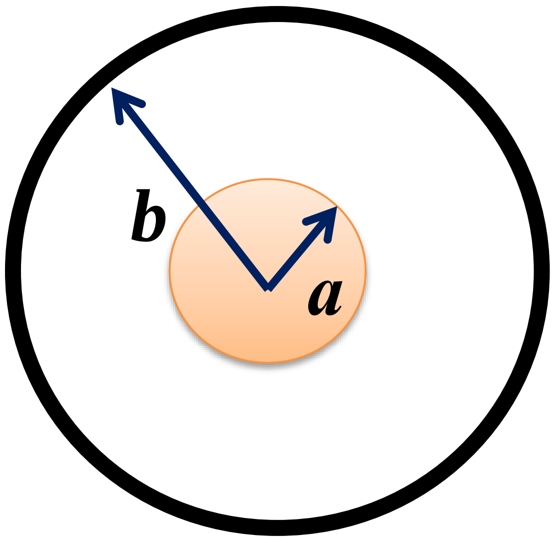
Индуктивностью по условию можно пренебречь, ЭДС самоиндукции учитывать не надо, т.е. сила тока по закону Ома

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}$$

$$= \left\{R = 4ra + 4rb\right\} = \frac{\left(a^2 - b^2\right)\omega B_0 \sin\omega t}{4r\left(a+b\right)}$$

$$I(t) = \frac{\left(a^2 - b^2\right)\omega B_0 \sin\omega t}{4r\left(a+b\right)} = \boxed{\frac{1}{4r}\left(a-b\right)\omega B_0 \sin\omega t}$$

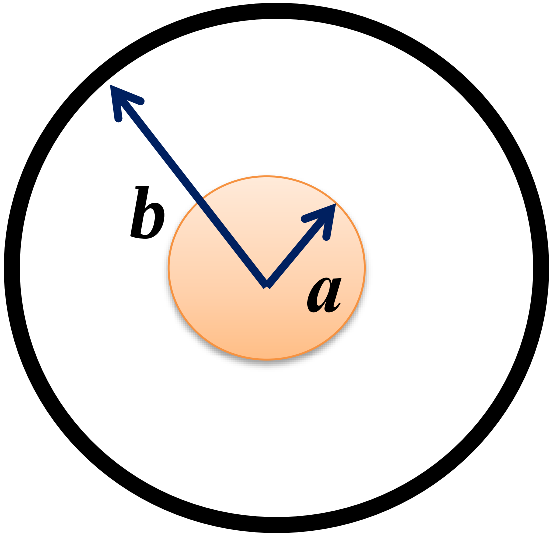
Задача 3. Коаксиальный кабель состоит из сплошного внутреннего проводника радиуса a и тонкого внешнего цилиндрического проводника радиуса b. Найти индуктивность единицы длины кабеля. Считать, что магнитная проницаемость материала проводников и зазора между ними $\mu = 1$, ток распределен по проводникам равномерно.



Дано.
a , b.
$\mu = 1$
Найти: L

Пусть по проводникам текут токи *I* в противоположных направлениях

Суммарный ток равен нулю, поэтому вне кабеля магнитное поле отсутствует.



Внешний проводник кабеля поле внутри себя не создает

Внутри центрального цилиндрического проводника ($r < a$)

$$\oint_L \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \pi r^2 j$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \pi r^2 \frac{I}{\pi a^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r$$

Снаружи (*a* < *r* < *b*)

$$\oint_L \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Плотность энергии магнитного поля

$$\omega = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Внутри (*r* < *a*)

$$W_1 = \int_V \omega dV$$

$$W_1 = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\right)^2 \int_0^a r^2 \cdot l \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{16\pi} l I^2$$

Вне *r* > *a*:

$$W_2 = \int_V \omega dV = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)^2 \int_a^b \frac{1}{r^2} \cdot l \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{4\pi} l I^2 \ln\frac{b}{a}$$

Полная энергия:

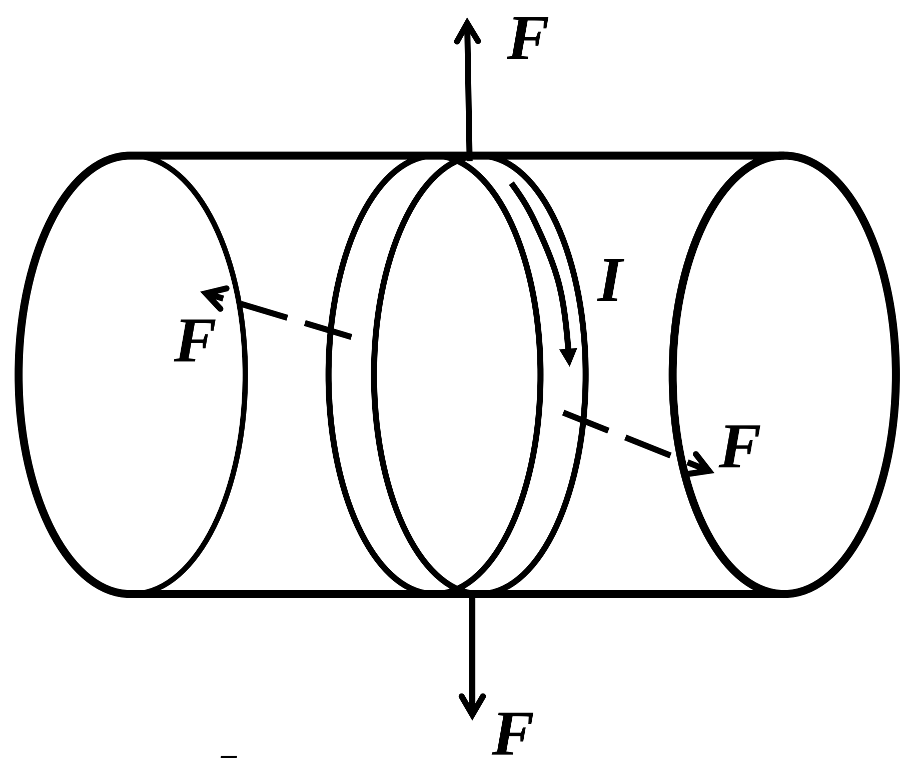
$$W = W_1 + W_2 = \frac{\mu_0}{16\pi} l I^2 \left(1 + 4\ln\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2} L I^2$$

$$\boxed{L' = \frac{L(l)}{l} = \frac{\mu_0}{8\pi}\left(1 + 4\ln\frac{b}{a}\right)}$$

Задача 4. По длинному однослойному соленоиду с n витками на единицу длины течет ток I. Определить давление, действующее на боковую поверхность соленоида.

Каждый из витков соленоида – это кольцо с током во внешнем однородном МП, перпендикулярном его плоскости, которое создаётся всеми остальными витками соленоида

Пондеромоторные силы *F* стремятся увеличить радиус соленоида.



Пусть радиус соленоида увеличился на *dR* при неизменной силе тока. Тогда работа сил давления на боковую поверхность

$$\delta A = pdV$$

$$= p \cdot 2\pi R \cdot ldR = dW$$

Энергия соленоида

$$W=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 VI^2=\frac{1}{2}\mu_0 n^2\pi R^2 lI^2$$

$$p=\frac{\delta A}{dV}=\frac{dW}{dV}=\frac{1}{2\pi Rl}\left.\frac{dW}{dR}\right|_{I=const}$$

$$p=\frac{1}{2\pi Rl}\frac{d}{dR}\left.\left(\frac{1}{2}\mu_0 n^2\pi R^2 lI^2\right)\right|_{I=const}=$$

$$=\frac{\mu_0 n^2 I^2}{4R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\right)$$

$$\boxed{p=\frac{\mu_0 n^2 I^2}{2}}$$