Сегодня: понедельник, 9 октября 2023 г.

Лекция 9: Классическая теория электропроводности.

1. Теория электропроводности Друде
2. Волновые свойства частиц

КЛАССИФИКАЦИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

По величине электропроводности

$$U = IR$$

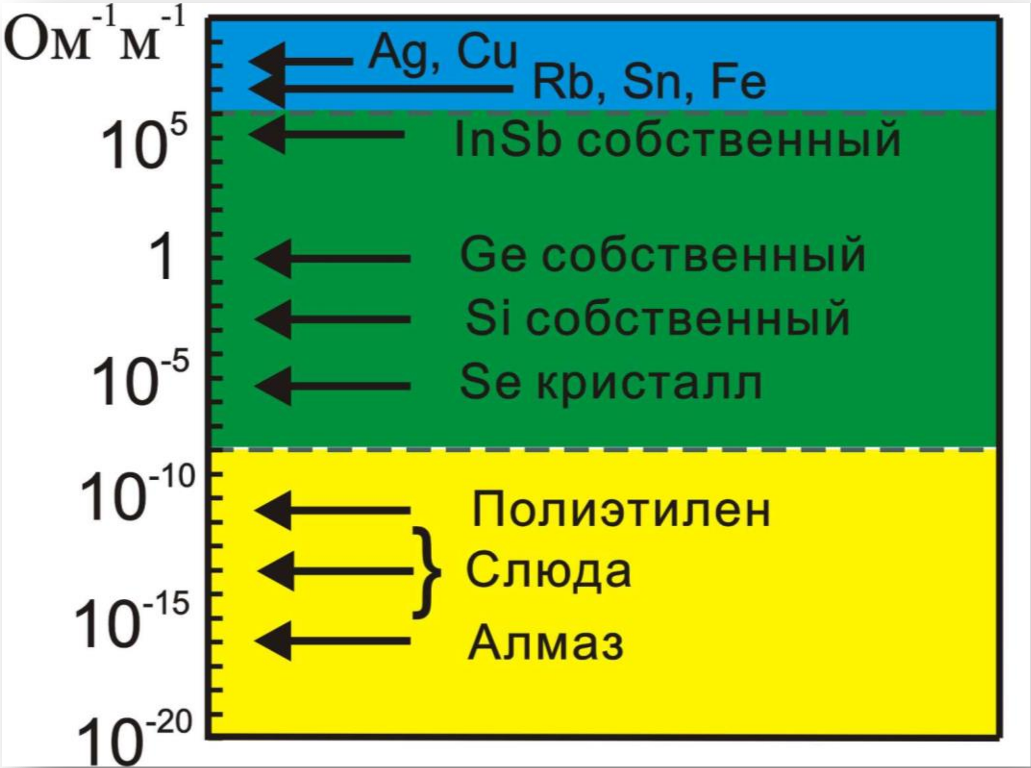
$$J = \sigma E$$

$$\rho = \frac{RS}{l}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

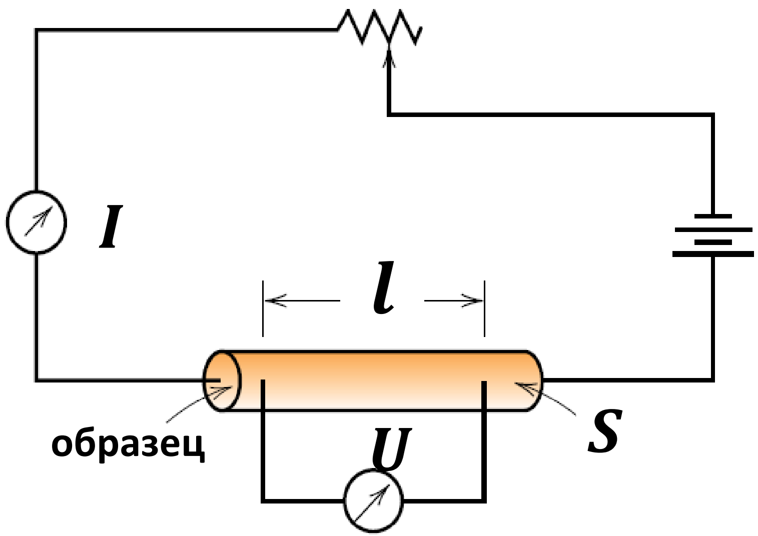
$$J = \frac{I}{S}$$

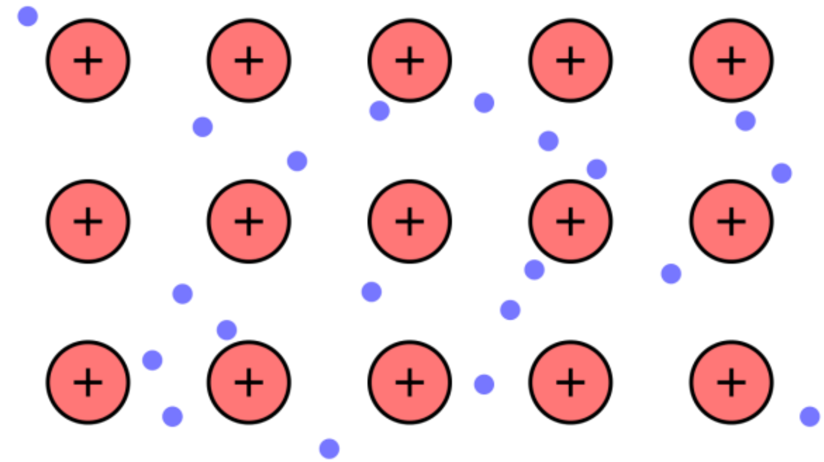
$$E = \frac{U}{l}$$

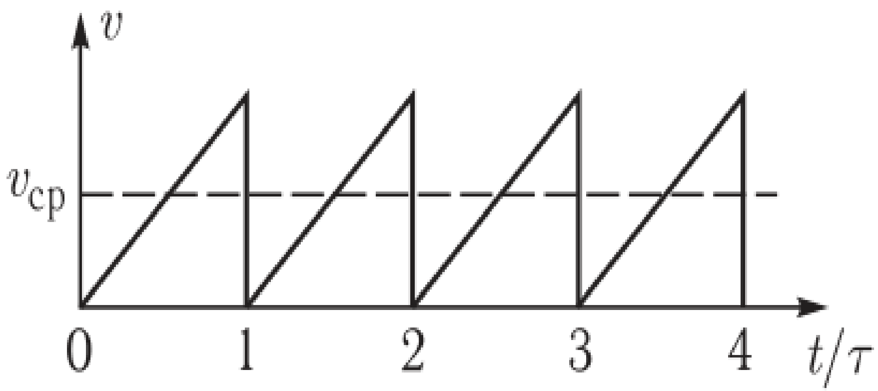


Для твердых тел диапазон значений проводимости - 27 десятичных порядков. Ни одно другой физическое свойство не изменяется в столь широком диапазоне

Теория Друде







После столкновения

$\upsilon_{min} = 0$, $F = eE = ma$

перед столкновением

$\upsilon_{max} = a\tau = eE\tau/m$

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{\upsilon_{\max} + \upsilon_{\min}}{2} = \frac{eE\tau}{2m} = \frac{eE\lambda}{2m\bar{u}}$$

n ~10^{28} -10^{29} м$^{-3}$

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{\upsilon_{\max} + \upsilon_{\min}}{2} = \frac{eE\tau}{2m} = \frac{eE\lambda}{2m\overline{u}}$$

$$\boxed{j = en\langle \upsilon \rangle = en\frac{e\lambda}{2m\overline{u}}E = \frac{ne^2\lambda}{2m\overline{u}}E}$$

$$\boxed{j = \sigma E}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2m\langle u \rangle} = \frac{ne^2}{2m}\tau, \quad \rho = \frac{2m\langle u \rangle}{ne^2\lambda}}$$

Достоинства теории Друде

$$\boxed{j = \sigma E}$$

1. Объяснение закона Ома
2. Получение формулы для расчета σ
3. Объяснение закона Джоуля–Ленца

$$\boxed{\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2m\langle u\rangle} = \frac{ne^2}{2m}\tau}$$

$$W_e = \frac{m\upsilon^2_{\max}}{2} = \frac{me^2E^2\tau^2}{2m^2} = \frac{e^2E^2\tau^2}{2m}$$

$$\boxed{\omega = nW_e = \frac{W_e n}{\tau} = \frac{ne^2\tau}{2m}E^2 = \frac{ne^2\lambda}{2m\bar{u}}E^2 = \sigma E^2}$$

4. Объяснение закона Видемана–Франца

$$\kappa = \frac{1}{2} n k \bar{u} \lambda \Big/ \sigma = \frac{n e^2 \lambda}{2 m \bar{u}}$$

$$\boxed{\frac{\kappa}{\sigma} = AT}$$

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{n k \bar{u} \lambda 2 m \bar{u}}{2 n e^2 \lambda} = \frac{k \bar{u}^2 m}{e^2} = \left\{ \frac{m \bar{u}^2}{2} = \frac{3}{2} kT \right\} = \frac{3k^2}{e^2} T$$

$$\frac{3k^2}{e^2} = A = \frac{3 \cdot \left(1{,}38 \cdot 10^{-23}\right)^2}{\left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2} = 2{,}23 \cdot 10^{-8} \ \textbf{Вт/К}^2$$

Недостатки теории Друде

Не в состоянии объяснить:

- ✓ **сверхпроводимость;**
- ✓ **температурную зависимость металлов от температуры.**
- ✓ **закон Дюлонга и Пти**
- ✓ **среднее значение длины свободного пробега электрона** (в сотни раз превышает расстояние между узлами решетки)

$$\boxed{\rho = \frac{2m}{ne^2\lambda}\sqrt{\frac{3kT}{m}}}$$

$$\boxed{\rho = \rho_0\,(1 + \alpha t)}$$

$$\boxed{C = 3R}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2m\langle u\rangle}}$$

Причина – чрезмерные упрощения модели свободных электронов:

- Не учитывает влияние остова на движение
- Не учитывает взаимодействие электронов

Волновые свойства частиц

Гипотеза де Бройля корпускулярно–волновой дуализм должен быть универсальным, присущ всем частицам вещества – электронам, протонам, атомам, причём количественные характеристики свободных частиц такие же, что и для квантов света

$$\boxed{\varepsilon = h\nu = \hbar\omega}$$

$$\boxed{p = \frac{h\nu}{c} = \hbar k}$$

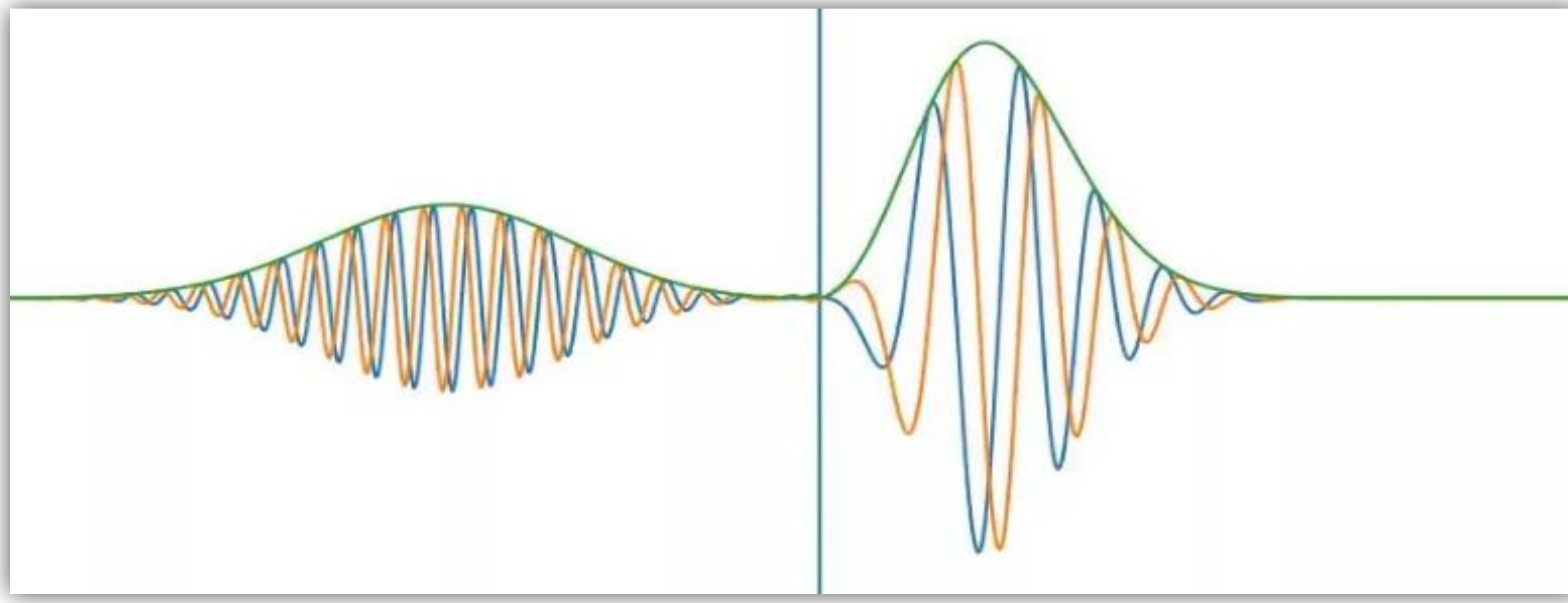
Поиск математической схемы

Классическая физика	Квантовая механика
частица	волна
$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$, $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$, E	$\Psi(\vec{r}, t) = C exp\{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\}$
Хорошо фиксируется в пространстве	**Проблема(!):** **волновые функции «размазаны» по пространству , они не могут быть зафиксированы**

Решение: **волна материи должна исчезать везде, кроме окрестности частицы или «классической траектории»**

Волновой пакет

Локализованная волновая функция, состоящая из группы интерферирующих волн с незначительно отличающимися длинами волн, фазы и амплитуды которых такие, что результирующая амплитуда усиливается там, где вероятность нахождения частицы велика, и исчезает вдали



Групповая и фазовая скорость

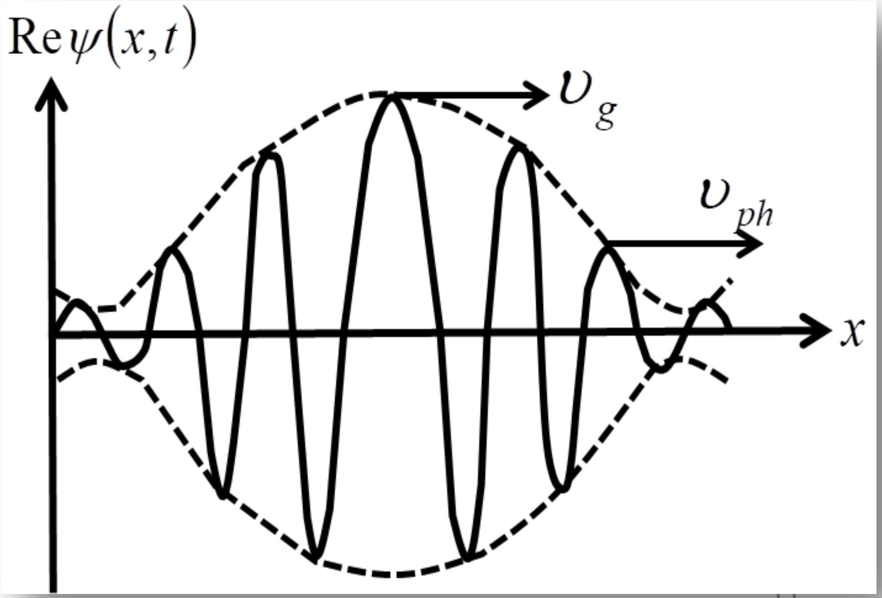
- каждая из волн группы имеет свою **фазовую скорость**:

$$\upsilon_{ph} = \frac{\omega(k)}{k}$$

- волновой пакет движется с **групповой скоростью**:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega(k)}{dk}$$

Групповая скорость может быть как больше, так и меньше или равна фазовой. Зависит от среды распространения



$$\upsilon_g = \upsilon_{ph} + k\frac{d\upsilon_{ph}}{dk}$$

Связь между фазовой и групповой скоростью

Задача 1

Вычислите групповую и фазовую скорости волнового пакета, соответствующего частице, движущейся в постоянном потенциале U = const

Решение

$$E(p) = \frac{p^2}{2m} + U$$

$$E = \hbar\omega \qquad p = \hbar k$$

$$\boxed{\upsilon_g = \frac{dE(p)}{dp}, \qquad \upsilon_{ph} = \frac{E(p)}{p}}$$

$$\upsilon_g = \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{2m} + U\right) = \frac{p}{m} = \upsilon_{частицы}$$

$$\upsilon_{ph} = \frac{1}{p}\left(\frac{p^2}{2m} + U\right) = \frac{p}{2m} + \frac{U}{p}$$

Групповая скорость равна классической скорости частицы → **центр будет перемещаться по «классической траектории»**

Задача 2

Вычислите групповую и фазовую скорости волнового пакета, соответствующего свободной частице

Замечание: **свободный электрон может иметь любое значение импульса и соответствующей энергии и не ограничен в своем местоположении**

Решение

$$E(p) = \frac{p^2}{2m}$$

$$E = \hbar\omega \qquad p = \hbar k$$

$$\boxed{\upsilon_g = \frac{dE(p)}{dp}, \qquad \upsilon_{ph} = \frac{E(p)}{p}}$$

$$\upsilon_g = \frac{p}{m}, \qquad \upsilon_{ph} = \frac{p}{2m} = \frac{1}{2}\upsilon_g .$$

Фазовая скорость не имеет физического значения (!)

Задача 1

Согласно гипотезе де Бройля любой частице с ненулевой массой покоя *m* и импульсом р можно поставить в соответствие волну:

$$\Psi\left(\vec{r},t\right)=Ce^{\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}\vec{r}-Et\right)}$$

$$C = const$$

Получите уравнение движения свободной нерелятивистской частицы, описываемой волной де Бройля.

В классическом случае

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

В квантовом случае - волна де Бройля

$$\Psi(\vec{r},t) = Ce^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)}$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad E = \hbar\omega$$

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad \boxed{\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$$ **дисперсионное соотношение**

Продифференцируем волну один раз по *t*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}Ce^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = -i\omega\Psi(\vec{r},t) \quad \boxed{\times i\hbar}$$

Продифференцируем волну дважды по r

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(\vec{r},t)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)Ce^{i\left(k_x x+k_y y+k_z z-Et\right)}$$

$$=(i)^2\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)\Psi(\vec{r},t)=-k^2\Psi \qquad \boxed{\times\frac{\hbar^2}{2m}}$$

Сопоставим эти два уравнения с дисперсионным соотношением

$$\hbar\omega=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)=\hbar\omega\Psi(\vec{r},t) \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r},t)=-\dfrac{\hbar^2k^2}{2m}\Psi(\vec{r},t) \end{cases}$$

уравнение движения свободной нерелятивистской частицы, описываемой волной де Бройля = уравнение Шредингера

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r},t)}$$