Общая физика. Часть 2

Сегодня: вторник, 12 сентября 2023 г.

Лекция 4

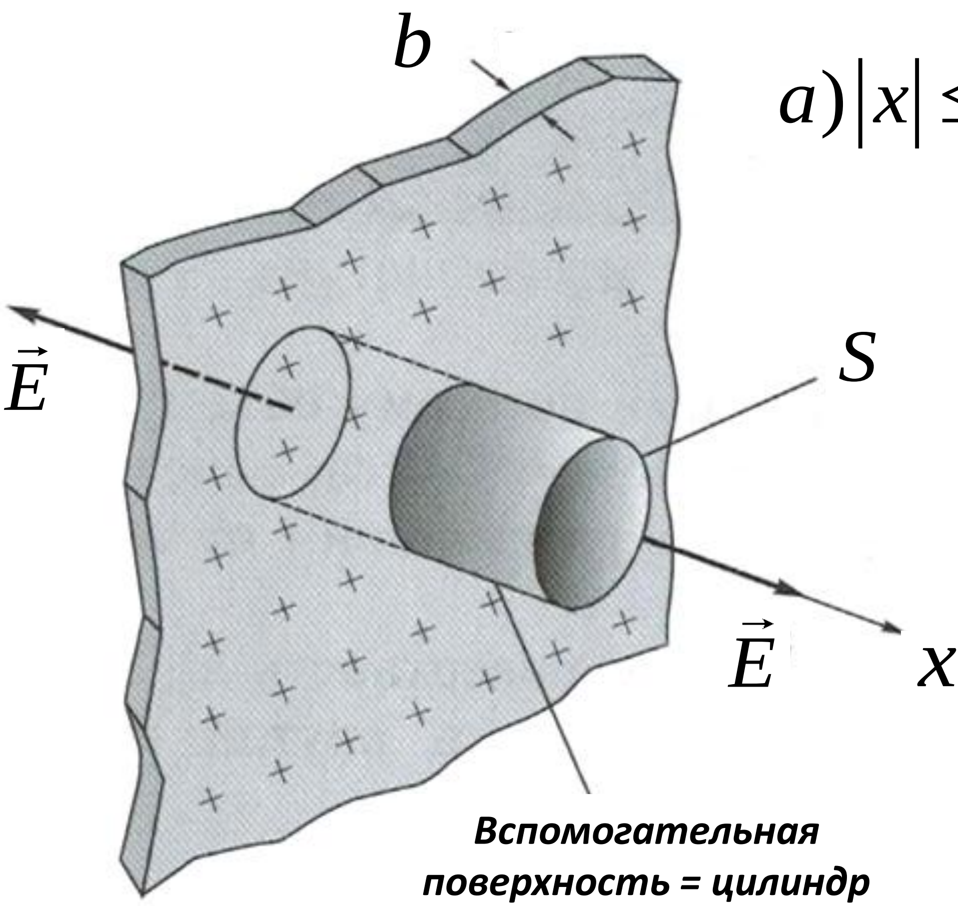
Заряды и электрическое поле

1. Потенциал, напряжение, энергия
2. Поле в веществе

доцент ОЭФ ИЯТШ ТПУ, к.ф.-м.н.
Купрекова Елена Ивановна

Применение теоремы Остроградского–Гаусса к расчету напряженности

1. Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным по объему плоским слоем толщиной b, если известна объемная плотность заряда



$$a)\ |x| \le \frac{b}{2} \Rightarrow$$

$$\Phi_E = \oint\!\!\oint \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

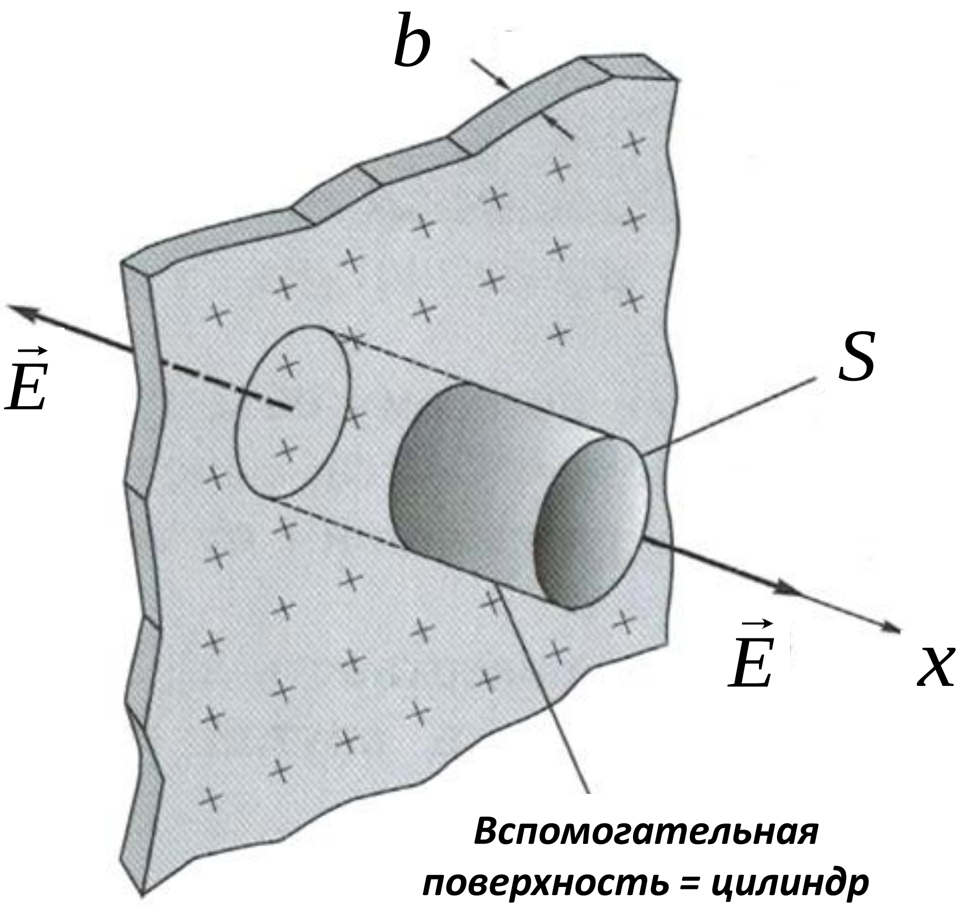
$$E \cdot 2S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-x}^{x} \rho S dx$$

$$E \cdot 2S = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho S \cdot 2x$$

$$\boxed{E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho x, \quad |x| \le \frac{b}{2}}$$

1. Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным по объему плоским слоем толщиной b, если известна объемная плотность заряда



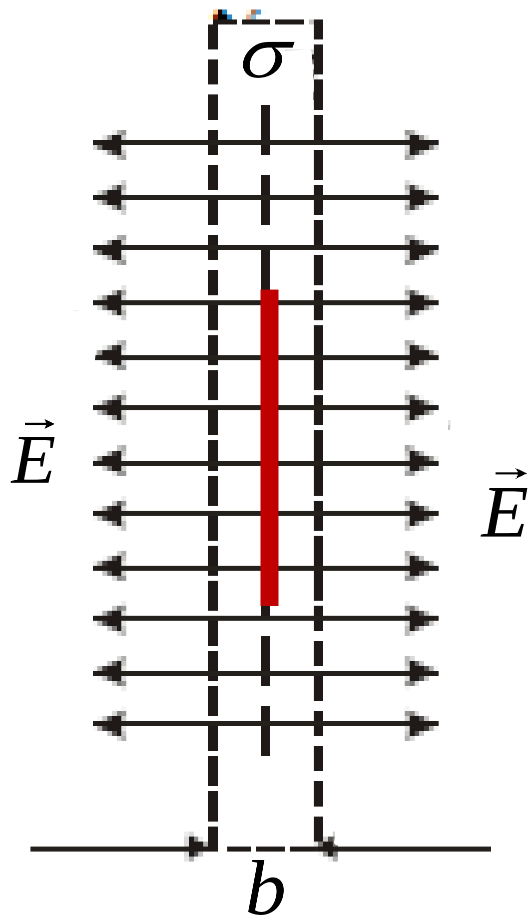
$$б)\ |x| > \frac{b}{2} \Rightarrow$$

$$\Phi_E = \oiint \left(\vec{E}, d\vec{S}\right)$$

$$|E| \cdot 2S = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} Sb$$

$$\boxed{|E| = \frac{1}{2\varepsilon_0}\rho b, \quad |x| > \frac{b}{2}}$$

2. Бесконечная равномерно заряженная (σ > 0) плоскость



Простейшая замкнутая поверхность = параллелепипед с основанием «плоскость» и высотой *b* →0. *Ф* идет через два основания площадью, равной плоскости *S*:

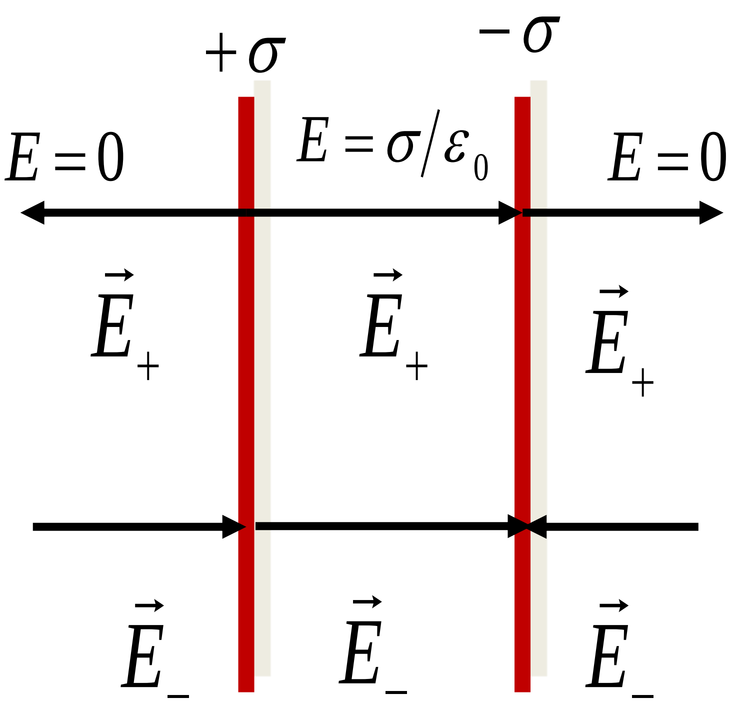
$$\Phi_E = \oiint \left(\vec{E}, d\vec{S} \right)$$

$$E \cdot 2S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 2S = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon\varepsilon_0}}$$

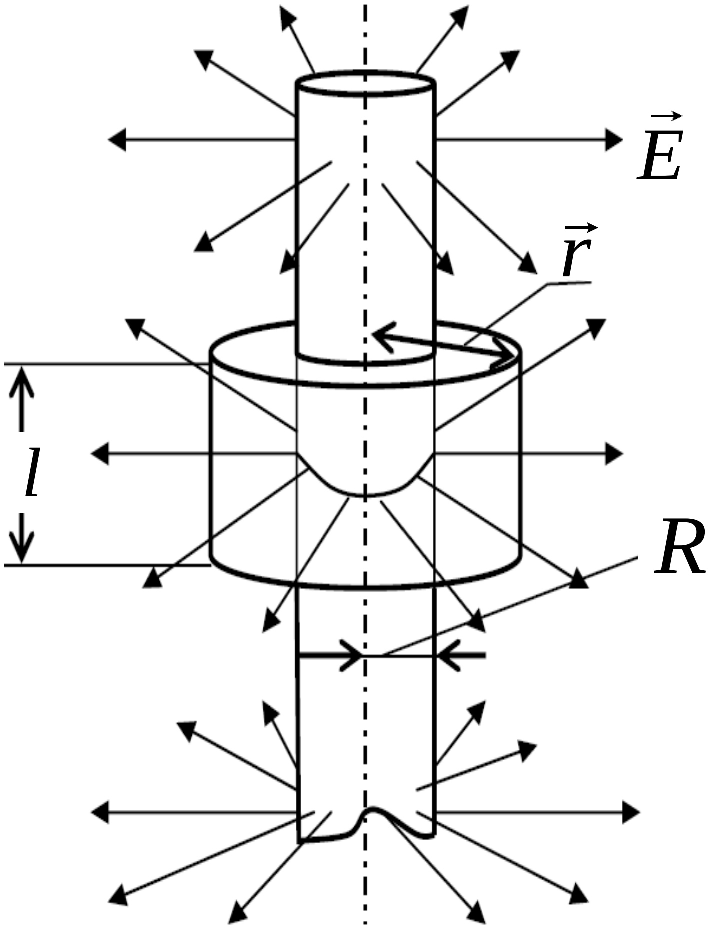
3. Две одинаковые бесконечные равномерно заряженные ($\sigma_1 < 0$ и $\sigma_2 > 0$) плоскости, расположенные на расстоянии (плоский конденсатор).



$$\boxed{E_{внутри} = E_+ + E_- = \\ = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{E_{вне} = 0}$$

4. Бесконечный равномерно заряженный ($\tau > 0$) тонкий стержень радиуса R



Замкнутая поверхность - цилиндр $r > R$. Т.к. стержень бесконечно длинный, торцов не достигнуть. Считаем, что весь поток вектора напряженности идет через боковую поверхность вспомогательного цилиндра

$$\oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

$$2\pi E r \cdot l = \frac{\tau \cdot l}{\varepsilon_0}$$

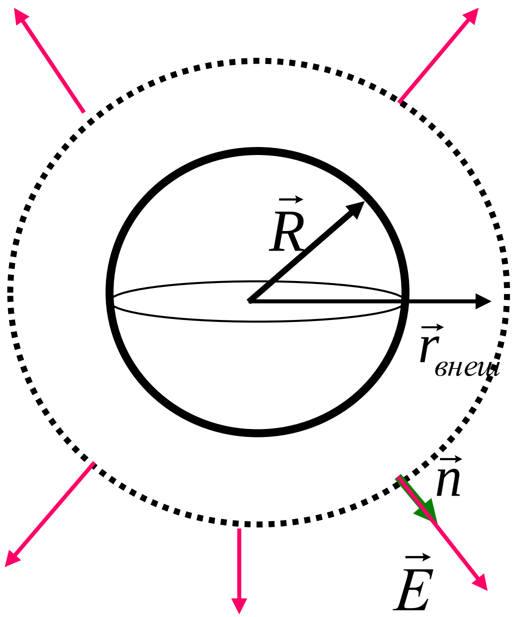
При $r \le R$ внутри цилиндра E = 0, так как нет зарядов, охватываемых поверхностью

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}, \qquad (r \ge R)$$

$$E = 0, \qquad (r \le R)$$

5. Поле равномерно заряженной сферы

Все направления от ее центра равноправны и при любом вращении сферы вокруг центра в системе зарядов ничего не изменится. Не изменится и электрическое поле. Это возможно только в том случае, если *E*↑↑*R*, а *E* зависит только от величины *r* радиуса-вектора.



$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi R^2}$$

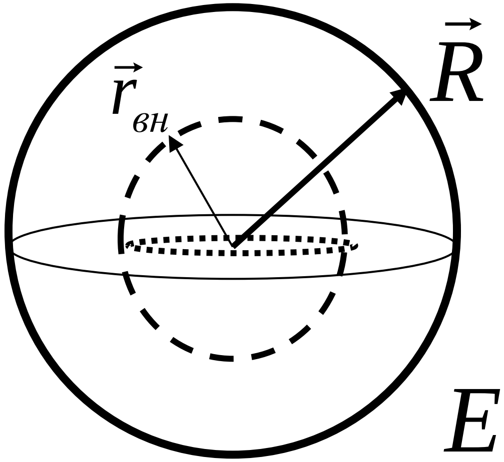
$$\Phi = E \cdot 4\pi r_{внеш}^2$$

$$\Phi = E \cdot 4\pi r_{внеш}^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{внеш}^2}}$$

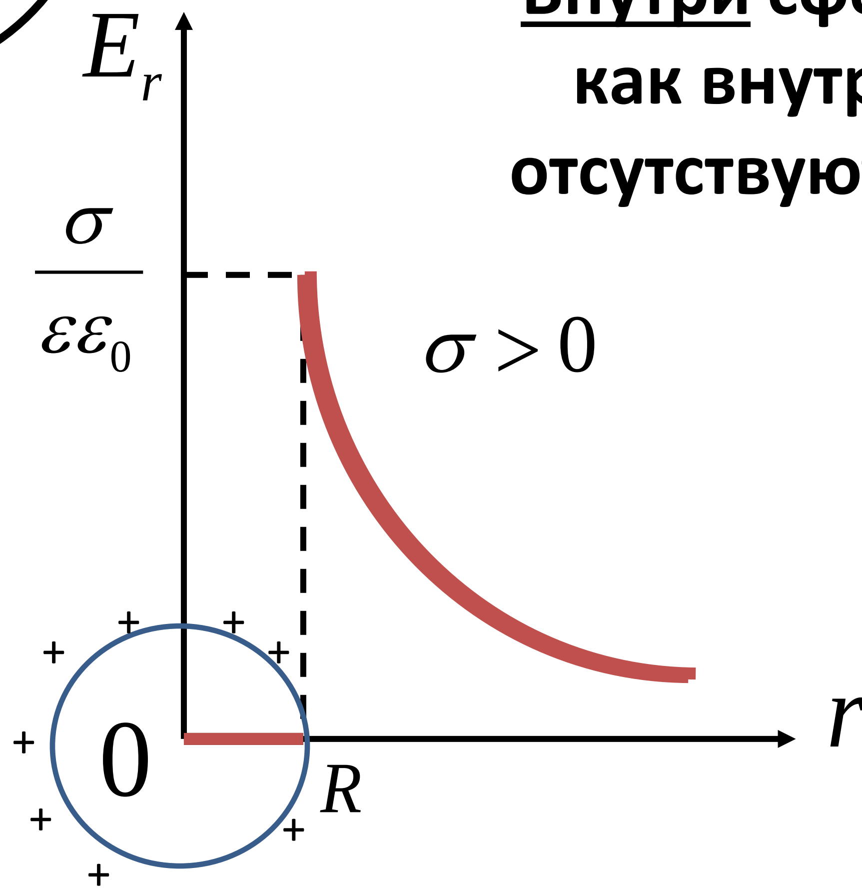
Поле <u>вне</u> сферы совпадает с полем точечного заряда, помещенного в центр сферы (!).

Вблизи поверхности сферы



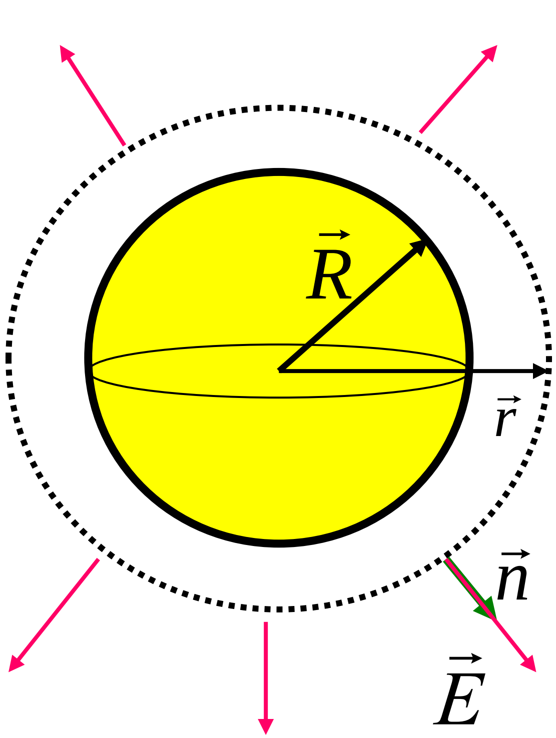
$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

<u>Внутри</u> сферы поля нет, так как внутри сферы заряды отсутствуют, т.о. для $r_{вн} < R$:



$$E = 0$$

5. Поле равномерно заряженного шара



$$\Phi = \oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2$$

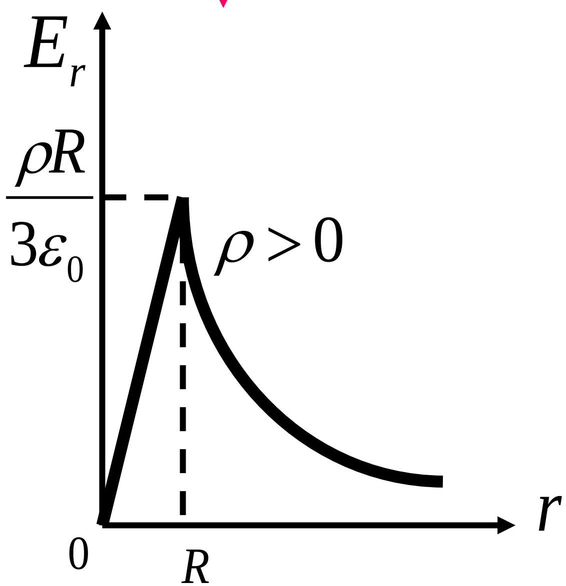
внутри вспомогательной сферы:

$$q = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

Тогда <u>вне шара</u>

$$\boxed{E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}}$$



<u>Внутри шара</u>

$$\boxed{E = \frac{\rho R}{3\varepsilon\varepsilon_0}}$$

Электрическое напряжение

При перемещении заряда q_0 в поле E из точки 1 в точку 2, поле совершает работу

$$A_{12} = q_0 \int_1^2 \left(\vec{E}, d\vec{r}\right)$$

Электрическое напряжение = Энергетическая характеристика поля = работа поля по перемещению положительного пробного заряда

$$U_{12} = \frac{A}{q_{пр}} = \int_1^2 \left(\vec{E}, d\vec{r}\right)$$

1 В = 1Дж/1Кл

Если поле создано неподвижными зарядами, то напряжение не зависит от формы пути и может быть представлено в виде разности потенциалов

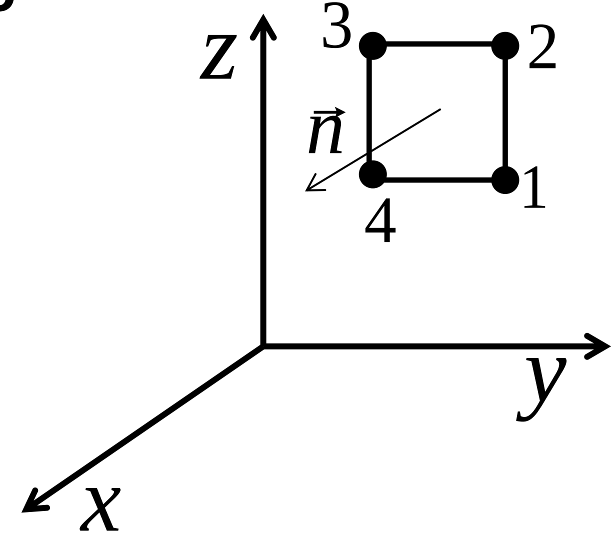
$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Электростатическое поле потенциально

$$\oint \left(\vec{E}, d\vec{r}\right) = 0$$

Условие потенциальности поля: равенство нулю циркуляции вектора напряженности

Если размеры контура стягивать в точку, то **дифференциальная форма потенциальности** электрического поля



$$\left(\mathrm{rot}\vec{E}\right)_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \left(\vec{E}, d\vec{r}\right)}{\Delta S}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0$$

ΔS – площадь маленького контура,
n – нормаль к площадке, направленная туда же, куда и острие буравчика, рукоятка которого вращается в положительном направлении обхода.

Электродвижущая сила (ЭДС)

Вихревое электростатическое поле = напряжение зависит от формы пути

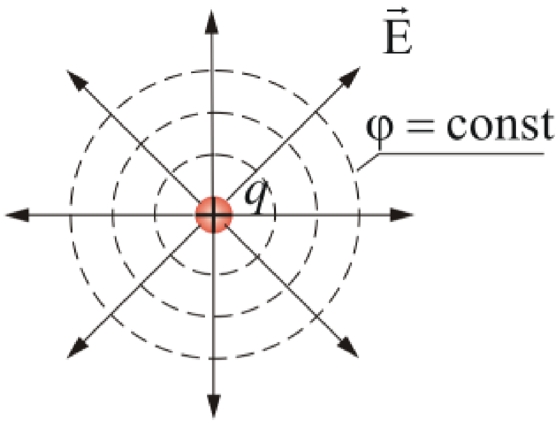
$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 \left(\vec{E}, d\vec{r}\right)$$

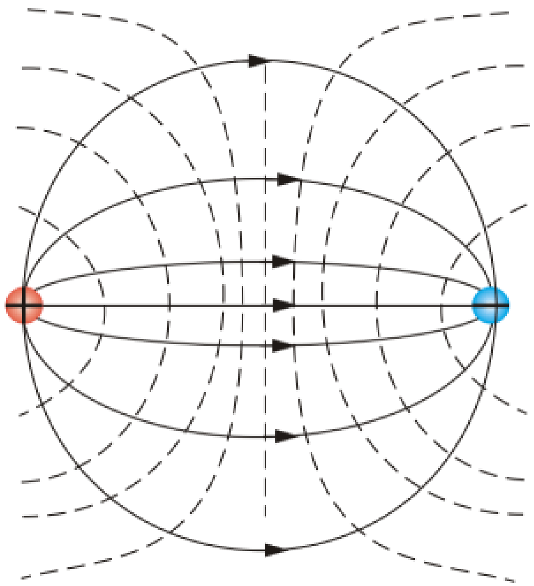
Нормировка потенциала: выбор r_0 из удобства. Для системы точечных зарядов $r_0 \to \infty$ и $\varphi_0 = 0$

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \left(\vec{E}, d\vec{r}\right) + \varphi_0$$

При перемещении заряда вдоль эквипотенциальной поверхности работа поля равна нулю.

Эквипотенциальные поверхности перпендикулярны силовым линиям

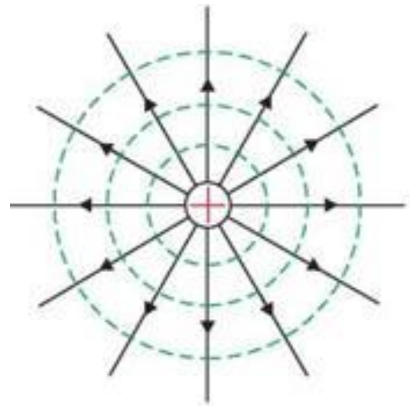


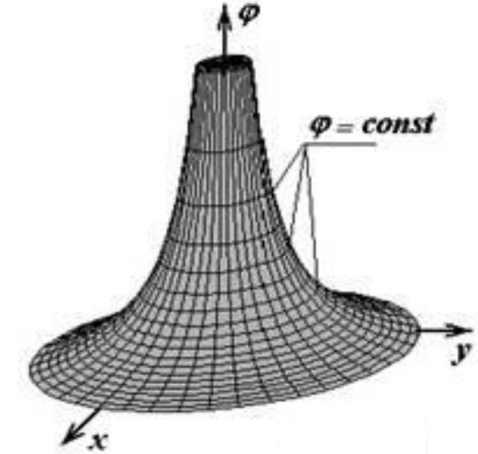


Потенциал разных систем

Потенциал поля точечного заряда

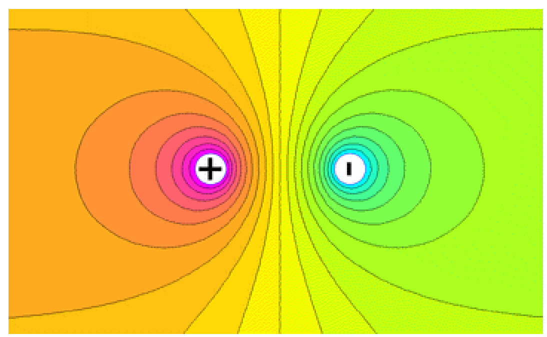
$$\varphi(r) = k\frac{q}{r}$$

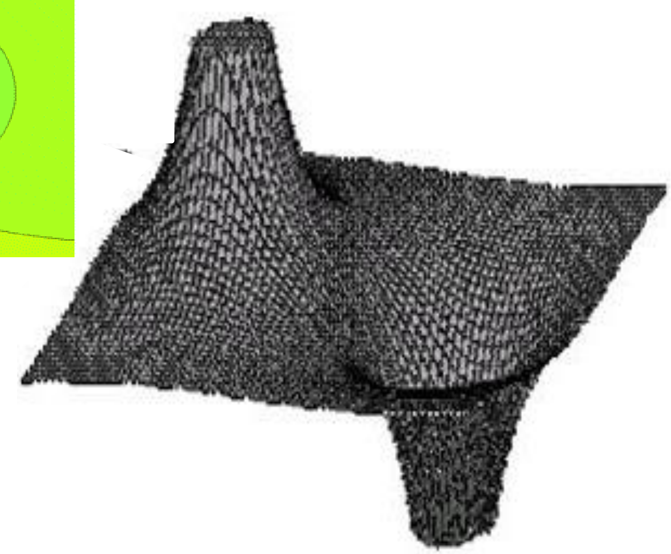




Потенциал поля системы N точечных зарядов

$$\varphi(r) = k\sum_{i=1}^{N}\frac{q}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}$$





Потенциал поля диполя

$$\varphi = kq\left[\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right] \approx k\frac{ql\cos\vartheta}{r^2} = k\frac{(\vec{p},\vec{r})}{\vec{r}}$$

Задача. Вычислить потенциал поля, создаваемого равномерно заряженной по объему бесконечно длинной нитью радиуса R, считая заданной объемную плотность заряда ρ.

Решение: Использую теорему Гаусса

Окружаю нить цилиндрической поверхностью радиуса r и длиной l

Если $r \geq R$

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\rho \pi R^2 l}{\varepsilon_0}$$

Нормировка: на поверхности нити потенциал равен φ_0

$$\varphi_{r>R}(r) = \int_r^R E dr + \varphi_0 = \int_r^R \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r} dr + \varphi_0 = \varphi_0 - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln\frac{r}{R}$$

Если $r \le R$

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\rho \pi r^2 l}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi_{r \le R}(r) = \int_r^R E dr + \varphi_0$$

$$= \int_r^R \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr + \varphi_0$$

$$= \varphi_0 + \frac{\rho\left(R^2 - r^2\right)}{4\varepsilon_0}$$

Локальная связь между E и потенциалом

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \left(\vec{E}, d\vec{r}\right) + \varphi_0}$$

Если начальная и конечная точки интегрирования близки

$$\vec{r}_0 = \vec{r} + d\vec{r}$$

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi_0 = \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_x \cdot dx + E_y \cdot dy + E_z \cdot dz$$

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi_0 = \varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) = -d\varphi = -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz\right]$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},\ E_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\mathrm{grad}\,\varphi = -\nabla\varphi}$$

Уравнение Пуассона

Определяет связь между объемной плотностью заряда и потенциалом в локальном виде

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \; E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \; E_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\Delta\varphi = 0}$$

Уравнение Лапласа = частный случай уравнения Пуассона

Энергия системы зарядов

1. Система = два точечных заряда q_1 и q_2 на расстоянии r_{12}. Энергия взаимодействия = работе для сближения бесконечно удаленных зарядов на r_{12}. Допустим, что q_1неподвижен, а q_2 перемещается в поле первого из бесконечности $r_2 \to \infty$

$$W_{вз} = q_2 U = q_2 \left(k\frac{q_1}{r_{12}} - k\frac{q_2}{\infty} \right) = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{k\frac{q_1}{r_{12}}}_{\substack{\text{потенциал поля}\\ \text{1-го заряда}\\ \text{в точке}\\ \text{нахождения 2-го}}} q_2 + \underbrace{k\frac{q_2}{r_{12}}}_{\substack{\text{потенциал поля}\\ \text{2-го заряда}\\ \text{в точке}\\ \text{нахождения 1-го}}} q_1 \right) = \frac{1}{2}\left(\varphi_2 q_2 + \varphi_1 q_1\right)$$

$$\boxed{W_{вз} = \frac{1}{2} k \sum_{i \neq j} k \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i}$$

Энергия взаимодействия N точечных зарядов

Собственная энергия тела

Если имеется заряженное тело V и известна объемная плотность его заряда ρ, то энергия взаимодействия внутренних частиц = собственная энергия

$$W_{сб} = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho dV$$

Полная энергия системы N заряженных тел

$$W = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\int_V \varphi_i \rho_i d_i V = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\int_V \left(\underbrace{\varphi_i^{вз}}_{\substack{\text{внешние} \\ \text{ттел}}} + \underbrace{\varphi_i^{сб}}_{\substack{\text{заряды} \\ \text{тела}}} \right) \rho_i d_i V = W_{вз} + W_{сб}$$

Пример: шар R равномерно заряжен по поверхности зарядом q. Интеграл по объему $\rightarrow$ к интегралу по поверхности:

$$\varphi = \frac{kq}{R}$$

$$\boxed{W_{сб} = \frac{1}{2}\frac{kq}{R}\cdot\sigma S = \frac{1}{2}\frac{kq^2}{R}}$$

Пример: две разноименно заряженные параллельные пластины φ_1 и φ_2, и q и –q, полная энергия

$$\boxed{W = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)q}$$