Общая физика. Часть 2

Сегодня:
понедельник, 11
сентября 2023 г.

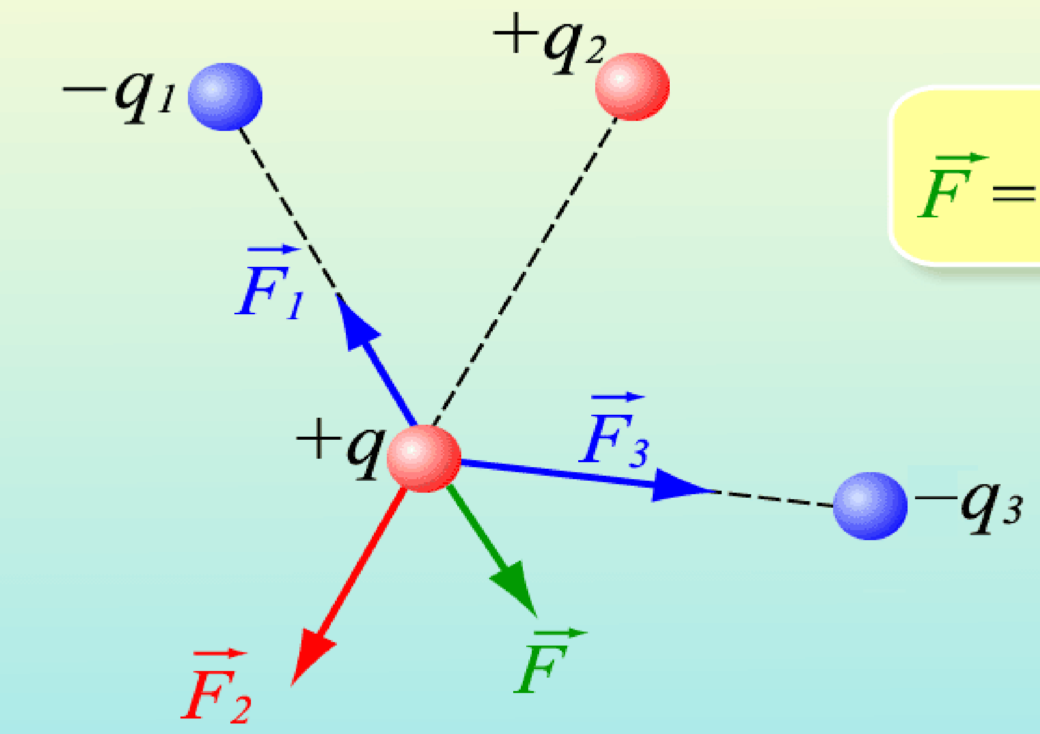
Лекция 3

Заряды и электрическое поле

1. Теорема Остроградского-Гаусса
2. Потенциал

доцент ОЭФ ИЯТШ ТПУ, к.ф.-м.н.
Купрекова Елена Ивановна

Принцип суперпозиции для сил взаимодействия точечных зарядов

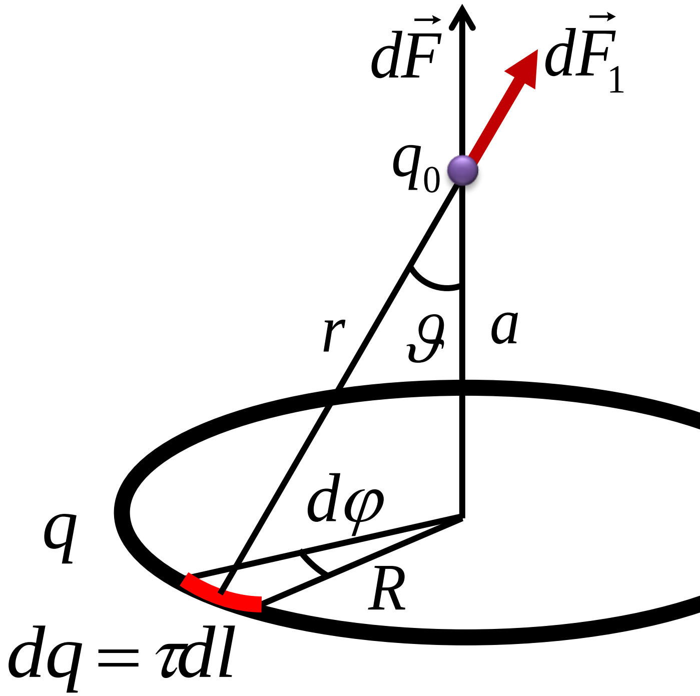


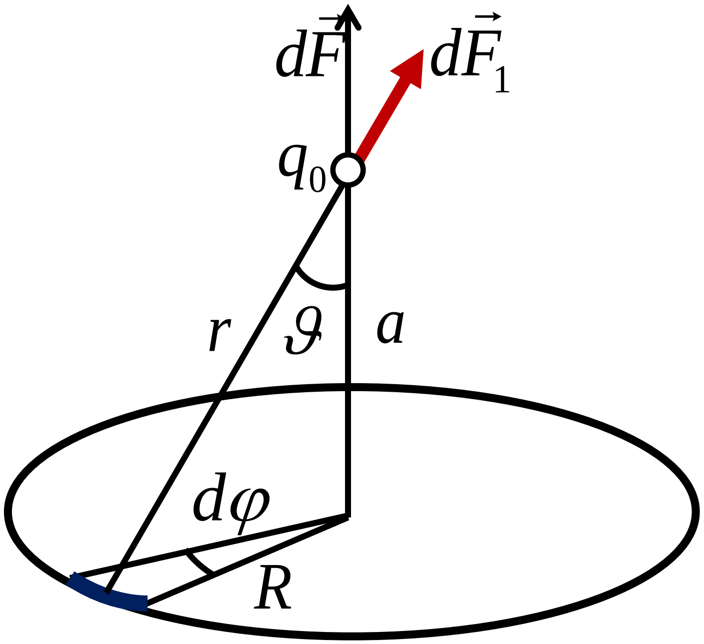
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N-1} \vec{F}_{ai}$$

При взаимодействии трех и более зарядов результирующая сила, действующая на каждый заряд, определяется геометрической суммой сил, действующих на него со стороны других зарядов

Задача. **Вычислить силу, действующую на заряд q_0, со стороны тонкого кольца радиуса R, по которому равномерно распределен заряд q, если q_0 расположен на оси кольца на произвольном расстоянии a от его плоскости.**





$dq = \tau dl$

$$dF = \frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r = \sqrt{R^2 + a^2}$$

$$dF = dF_1 \cos\vartheta$$

$$\cos\vartheta = \frac{a}{r}$$

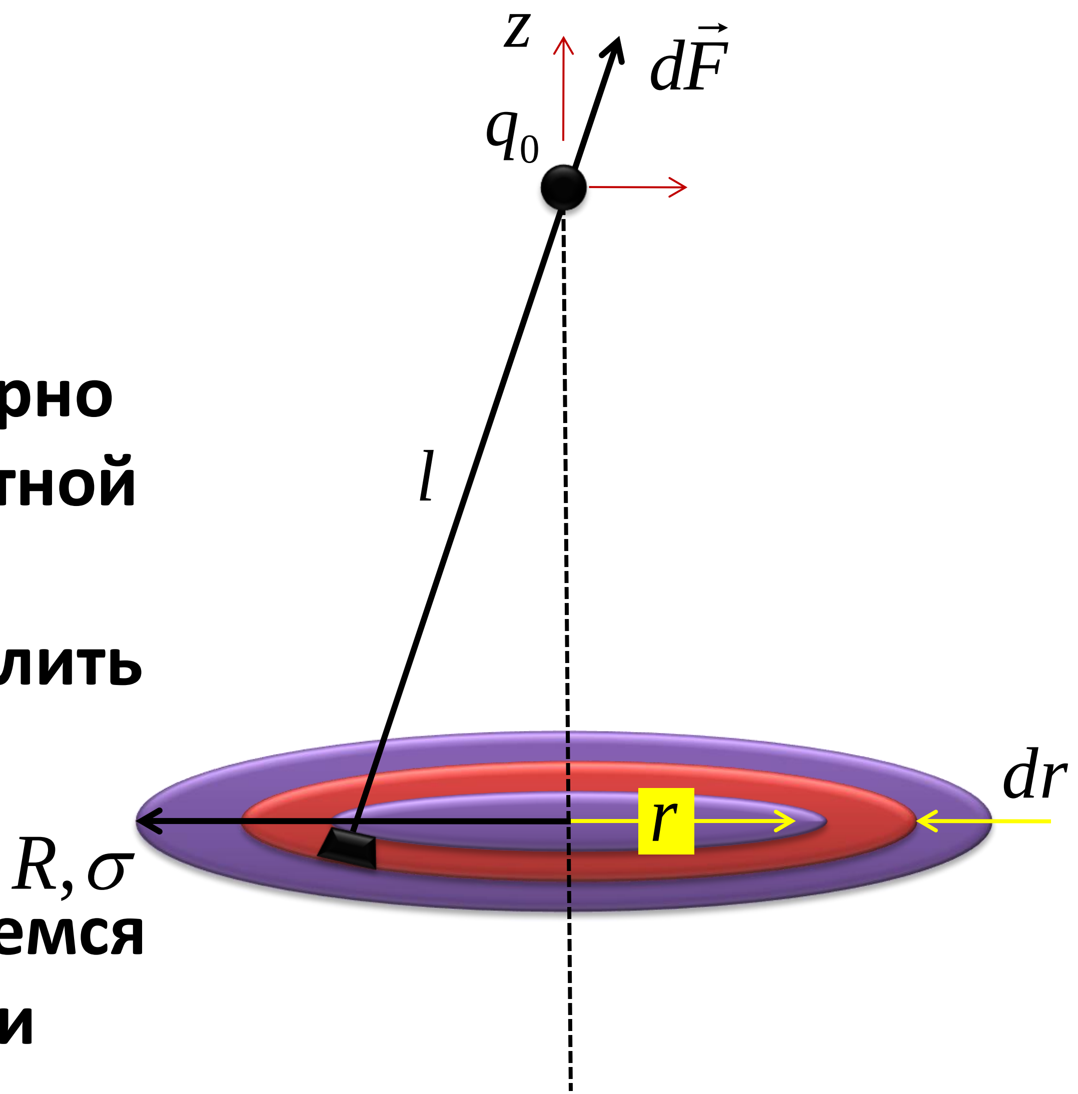
$$F = \int dF = \int_0^q \frac{kq_0 dq}{r^2}\frac{a}{r} = \frac{kqaq_0}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

$$dl = Rd\varphi$$

$$\tau = \frac{q}{2\pi R}$$

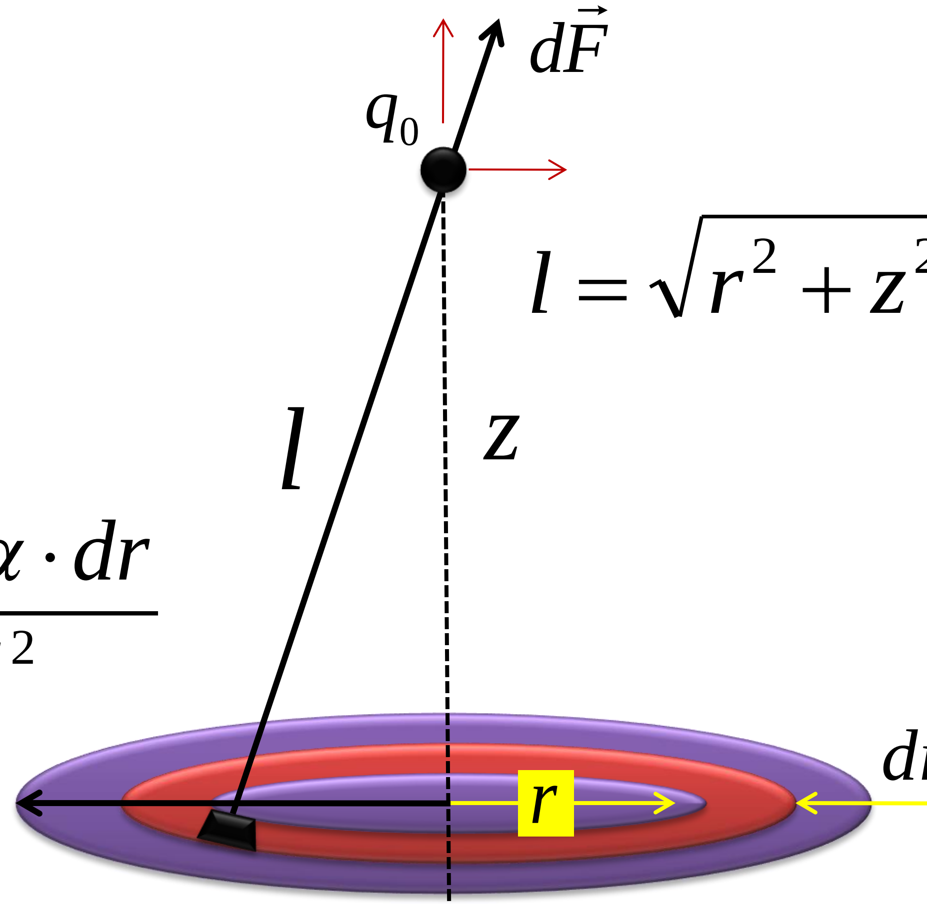
$$\boxed{F_{ring} = \frac{kqaq_0}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}}}$$

Задача. Тонкий однородный диск радиусом R равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ. Диск неподвижен. Определить силу взаимодействия диска с точечным зарядом q_0, находящемся на расстоянии z на оси диска.



$$dF_K = dF \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$



$$l = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$dS = dl \cdot dr \;\; = r d\alpha \cdot dr$$

$$dF = \frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{q_0 \sigma \cdot r d\alpha \cdot dr}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

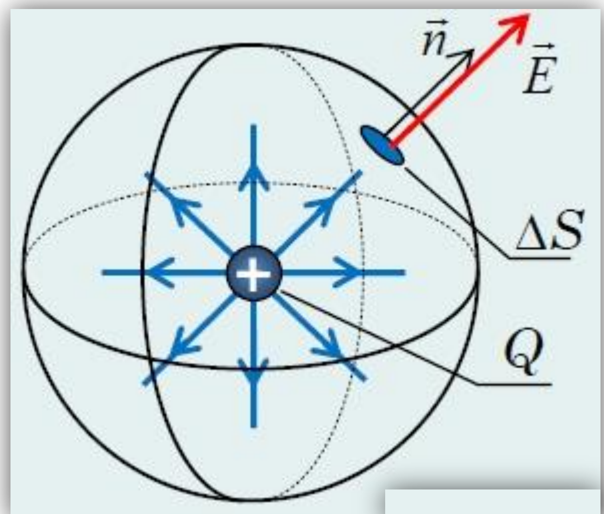
$$dq = \sigma \cdot dS$$

$$dF_K = \frac{q_0 \sigma \cdot r d\alpha \cdot dr}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

$$F_K = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \frac{q_0 \sigma \cdot r \cdot dr}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}} \boxed{= \frac{q_0 \sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]}$$

Теорема Остроградского–Гаусса

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



$$\oint\limits_{S_V}\left(\vec{E}d\vec{S}\right)=\frac{\sum\limits_i q}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_V \rho dV$$

Поток вектора напряженности суммарного ЭП через произвольную замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри поверхности

Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

$$:\Delta V \quad \oint_{\Delta S}\left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \frac{\Delta q}{\varepsilon_0} \quad :\Delta V$$

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S}\left(\vec{E}, d\vec{S}\right)}{\Delta V} = \frac{1}{\varepsilon_0} \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

$$\boxed{\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S}\left(\vec{E}, d\vec{S}\right)}{\Delta V} = \mathbf{div}\vec{E}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{dq}{dV}}$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

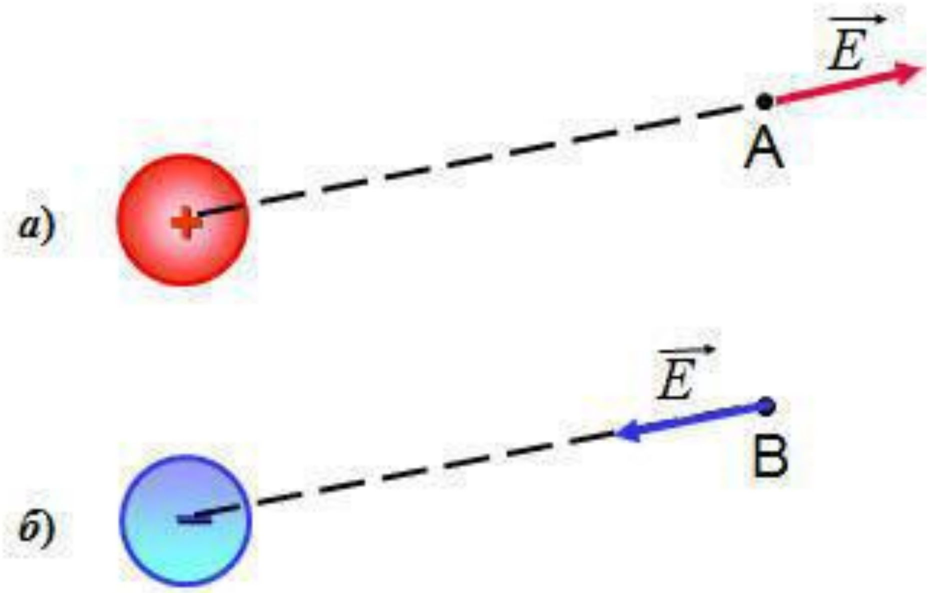
дифференциальная (локальная) форма
теоремы Остроградского-Гаусса

Физический смысл : закон создания электрических полей действием неподвижных электрических зарядов в линейных однородных и изотропных средах.

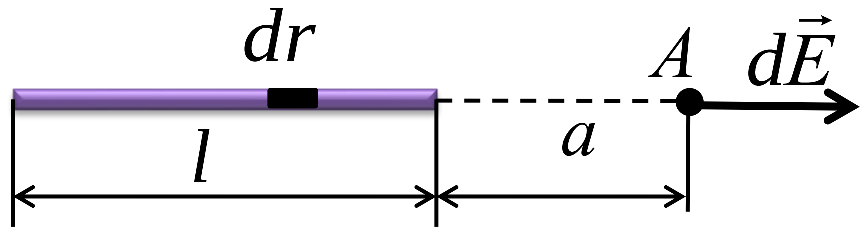
В интегральной форме закон выражен применительно к замкнутой поверхности конечных размеров, в дифференциальной – применительно к точке.

Практический смысл: рассчитывают электростатические поля, создаваемые симметричными распределениями зарядов.

Вычисление Напряженности ЭП



1. Равномерно заряженный ($\tau > 0$) тонкий стержень ($R \to 0$) длины l, точка А лежит на продолжении оси стержня на расстоянии a от его ближайшего конца



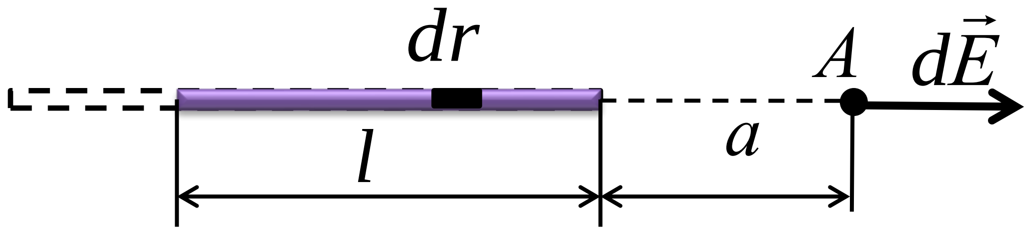
$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \left\{\tau = \frac{dq}{dr}\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dr}{r^2}$$

dE для всех элементов dr сонаправлены:

$$E = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{a+l}\frac{dr}{r^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_a^{a+l}$$

$$\boxed{E = \frac{\tau \cdot l}{4\pi\varepsilon_0 a\left(a+l\right)}}$$

2. Для бесконечного равномерно заряженного стержня на его оси



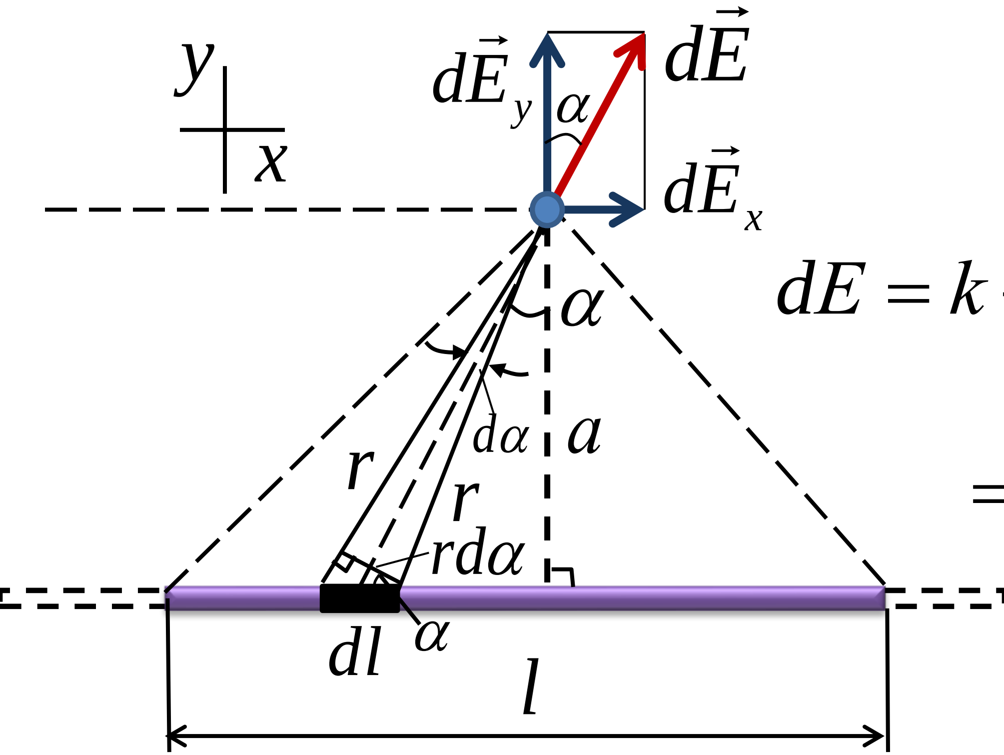
$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \left\{\tau = \frac{dq}{dr}\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dr}{r^2}$$

dE **для всех элементов *dr* сонаправлены:**

$$E = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_a^\infty$$

$$\boxed{E = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}}$$

3. Конечный равномерно заряженный ($\tau > 0$) тонкий стержень ($R \to 0$) длины l, точка A лежит на перпендикуляре к стержню на расстоянии a



$$dr = \frac{rd\alpha}{\cos\alpha}, \quad r = \frac{a}{\cos\alpha}$$

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = \left\{\tau = \frac{dq}{dr}\right\} = k\frac{\tau dr}{r^2} =$$

$$= k\frac{\tau \cdot rd\alpha}{r^2\cos\alpha} = k\frac{\tau \cdot d\alpha}{a}$$

$$dE_y = dE\cos\alpha,$$

$$dE_x = dE\sin\alpha$$

$$\boxed{E_y = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)}$$

$$\boxed{E_x = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

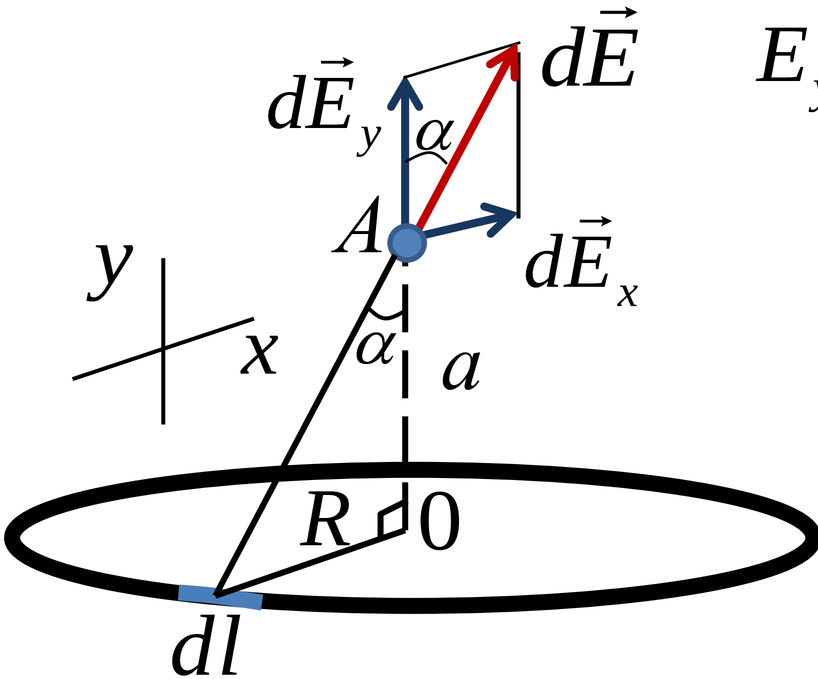
4. В случае бесконечного равномерно заряженного (τ>0) тонкого стержня можно считать точку А лежащей против его середины

$$E_p = 2\int_0^{\pi/2} dE_y = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha =$$

$$= \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$$

$$\boxed{E_p = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$

5. Равномерно заряженное ($\tau > 0$) тонкое кольцо радиуса R, точка A лежит на перпендикуляре к центру кольца на расстоянии a от него



$$E_y = \int dE_y$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2 + a^2\right)} \cos\alpha \int_0^{2\pi R} dl =$$

$$= \left\{ \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right\}$$

$$\boxed{E_y = \frac{\tau R a}{2\varepsilon_0 \sqrt{\left(R^2 + a^2\right)^3}}}$$

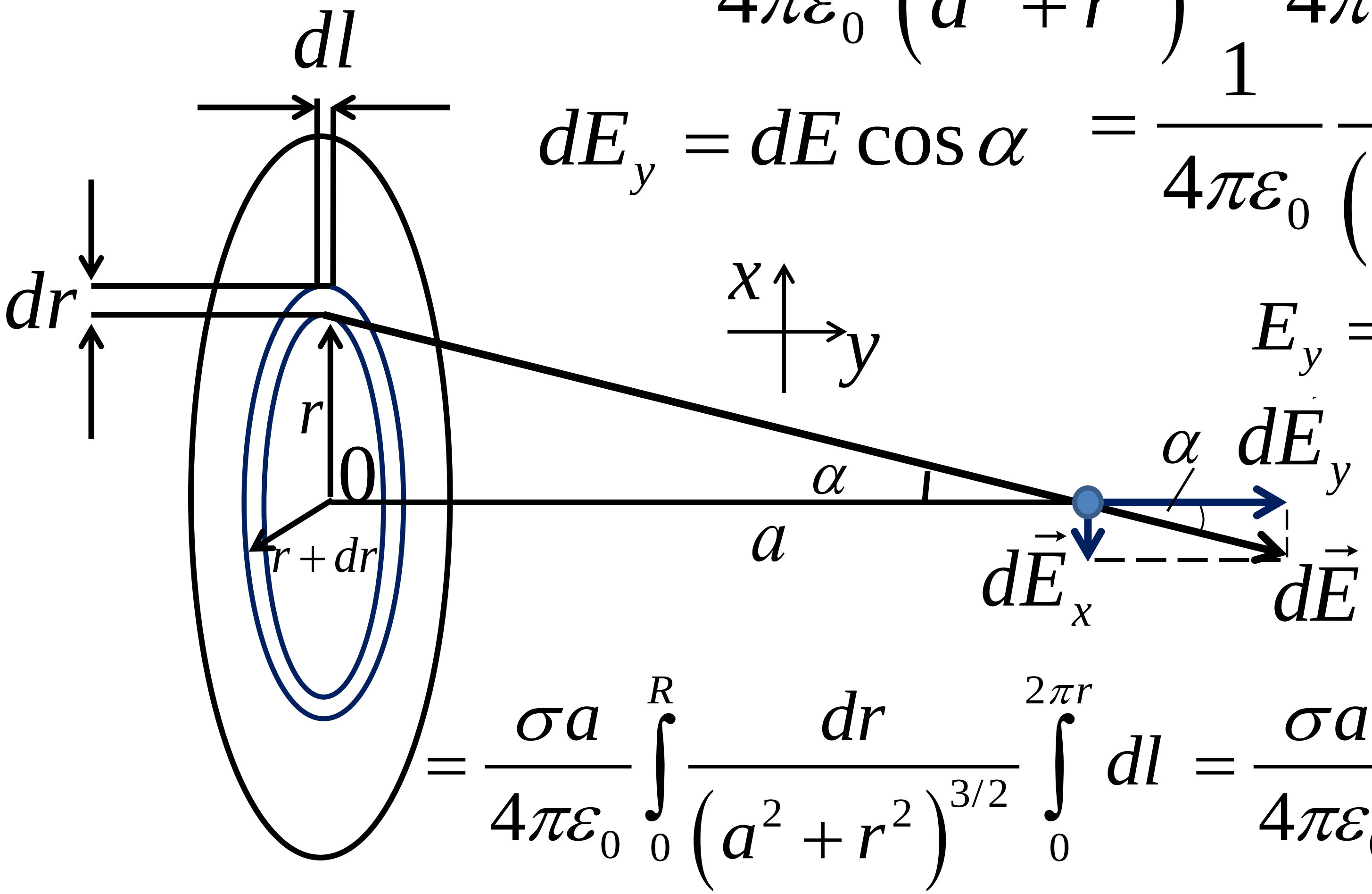
$$\boxed{E_x = \int_0^{2\pi R} dE_x = 0}$$

6. Круглая равномерно заряженная ($\sigma > 0$) пластинка радиуса R, точка A лежит на прямой, перпендикулярной к плоскости пластинки и проходящей через ее центр

$$dq = \sigma \cdot dr \cdot dl$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\left(a^2 + r^2\right)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma \cdot dr \cdot dl}{\left(a^2 + r^2\right)}$$

$$dE_y = dE\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma drdla}{\left(a^2 + r^2\right)^{3/2}}$$



$$E_y = \int dE\cos\alpha =$$

$$= \frac{\sigma a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{dr}{\left(a^2 + r^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi r} dl = \frac{\sigma a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{2\pi r dr}{\left(a^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{\left(a^2+r^2\right)^{3/2}} = \left\{\begin{matrix} a^2+r^2 = x \\ dx = 2rdr \end{matrix}\right\} = \frac{\sigma a}{4\varepsilon_0}\int_{a^2}^{a^2+R^2}\frac{dx}{x^{3/2}} =$$

$$= -\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}x^{-1/2}\Big|_{a^2}^{a^2+R^2} = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right) \equiv \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{a^2}}}\right)$$

Предельные случаи

А) Пусть $a>>R$. Пластинку можно считать точечным зарядом, т.к. ее линейные размеры малы по сравнению с расстоянием до точки А.

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)^{1/2}\right) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{a^2}\right)\right) = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0 a^2}}$$

Б) Пусть $a<<R$. Пластину можно считать бесконечно большой

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)^{1/2}\right) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$