Сегодня: понедельник, 1 апреля 2024 г.

Лекция 14. Волновые свойства микрочастиц

1. Проблема равновесного электромагнитного излучения
2. Формула Рэлея-Джинса. «Ультрафиолетовая катастрофа»
3. Необходимость квантовых представлений. Формула Планка
4. Законы теплового излучения

Вероятностная интерпретация ψ

Ψ(*r*, t) - комплексная функция

Плотность вероятности обнаружить частицу в окрестности точки *r* в момент времени *t*

$$\rho\left(\vec{r},t\right)=\left|\Psi\left(\vec{r},t\right)\right|^{2}$$

Вероятность нахождения частицы в некоторой области пространства в интервале от *r до r + dr* в момент времени *t*

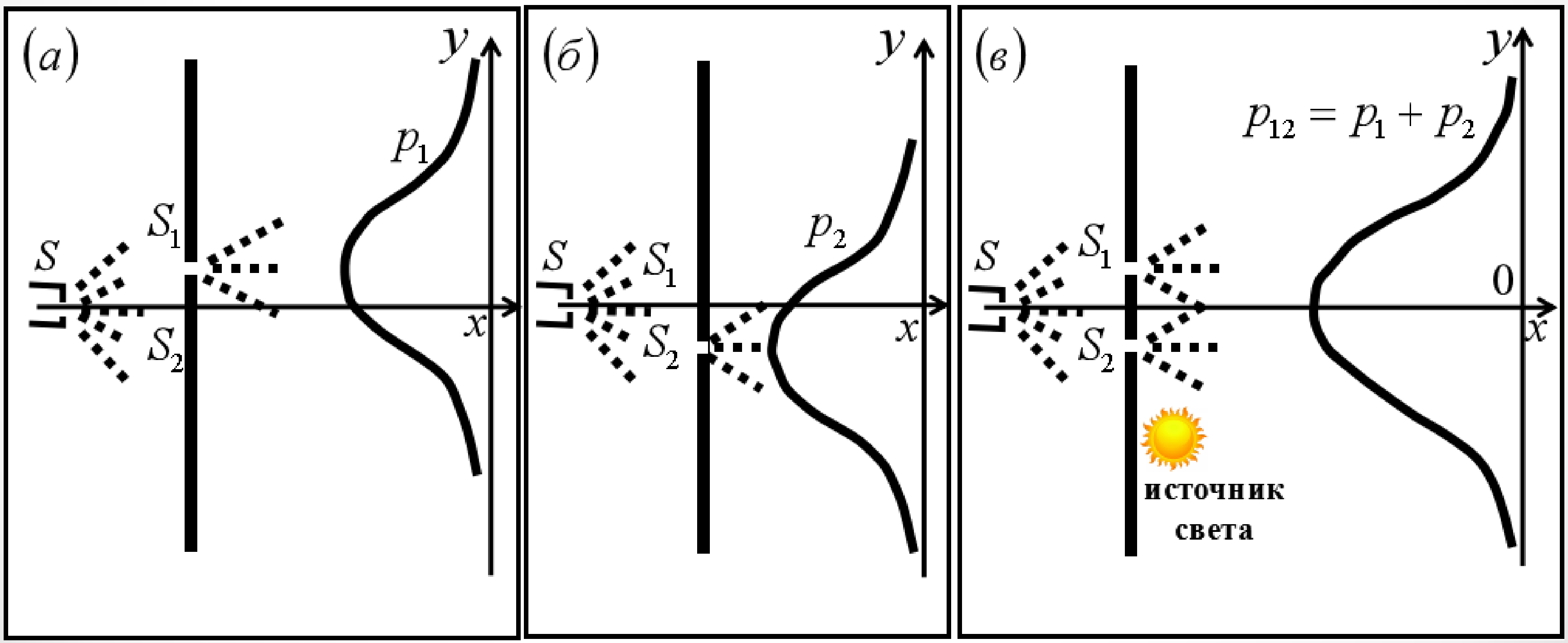
[redacted]

Условие нормировки: если интегрировать по всему пространству с достоверностью 100%, что частица находится где-то в нем, то полная вероятность обнаружения частицы

$$\int\limits_{space}\left|\Psi\left(\vec{r},t\right)\right|^{2}dV=1$$

Электроны - «хамелеоны»

Использование слабых пучков позволяет узнать через какое отверстие прошёл электрон. Разместим сильный источник света за пластиной с отверстиями. Заряды рассеивают свет, увидим вспышку у S_1 или S_2, или у обеих одновременно.



Наблюдения:

1. раздаётся щелчок на детекторе, наблюдается вспышка на S_1 или S_2, но никогда у обеих щелей одновременно при любом положении детектора.

⇒электрон не разделяется

2. Вероятности попадания электрона в произвольную точку y на экране $p_1(y)$ и $p_2(y)$ аналогичны распределению пуль и электронов.

⇒никаких блужданий электрона не существует

3. Полная вероятность $p_{12}(y)$ аналогична классических пуль: интерференционная картина исчезла !

Но если выключить свет, интерференция появится снова.

⇒Процесс наблюдения оказывает влияние на распределение электронов на экране.

Квантово-механический принцип: измерения интерферируют с состояниями микрообъектов

Соотношение неопределённостей

$$\boxed{\Delta p_x \Delta x \geq \hbar, \quad \Delta p_y \Delta y \geq \hbar, \quad \Delta p_z \Delta z \geq \hbar}$$

Не существует способа, который позволил бы провести измерение пассивно, не изменив импульс частицы

Δp_x, Δp_y, Δp_z –отклонения проекций импульса
Δx, Δy, Δz –отклонения проекций радиус-вектора

Замечание 1

Постоянная Планка имеет размерность действия *J*

$$[\hbar] = [p][x] = \text{кг·м}^2/\text{с}$$

$$[\hbar] = [E][t] = \text{Дж·с}$$

Следствие: $\hbar$ - элементарное количество действия, единица действия в атомном мире

Замечание 2

Действие $J = \hbar/2$ = произведение двух величин, имеющих:

- ✓ **геометрическую природу (x),**
- ✓ **динамическую природу (p)**

В квантовой физике:
это взаимодополняющие переменные.

В классической физике:
это канонически сопряжённые пары.

Обобщенный принцип неопределённостей

невозможно разработать эксперимент, который мог бы измерять одновременно две сопряжённые динамические переменные с заранее заданной точностью

$$J = \int \sum_i p_i \, dq_i \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ – **полный набор обобщённых координат, характеризующих систему (** ***конфигурационное пространство*****), не обязательно совпадающих с декартовыми;**

$\vec{p} = \{p_1, p_2, \ldots p_n\}$ **– канонически сопряжённые этим координатам импульсы.**

Задача 1

Согласно гипотезе де Бройля любой частице с ненулевой массой покоя *m* и импульсом p можно поставить в соответствие волну:

$$\Psi(\vec{r},t)=Ce^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r}-Et)}$$

$$C = const$$

Получите уравнение движения для свободной нерелятивистской частицы, описываемой волной де Бройля.

В классическом случае

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

В квантовом случае - плоская волна де Бройля

$$\Psi(\vec{r},t) = Ce^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r}-Et)}$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad E = \hbar\omega$$

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad \boxed{\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$$ **дисперсионное соотношение**

Продифференцируем волну один раз по ***t***

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi\Big($$ [redacted]

и дважды по r

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi\left(\vec{r},t\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)Ce^{i\left(k_x x+k_y y+k_z z-Et\right)}$$

$$=\left(i\right)^2\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)\Psi\left(\vec{r},t\right)=-k^2\Psi$$

Сопоставим эти два уравнения с дисперсионным соотношением

$$\left\{\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi\left(\vec{r},t\right)&=\hbar\omega\Psi\left(\vec{r},t\right)\\ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi\left(\vec{r},t\right)&=-\frac{\hbar^2k^2}{2m}\Psi\left(\vec{r},t\right)\end{aligned}\right.$$

$$\hbar\omega=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

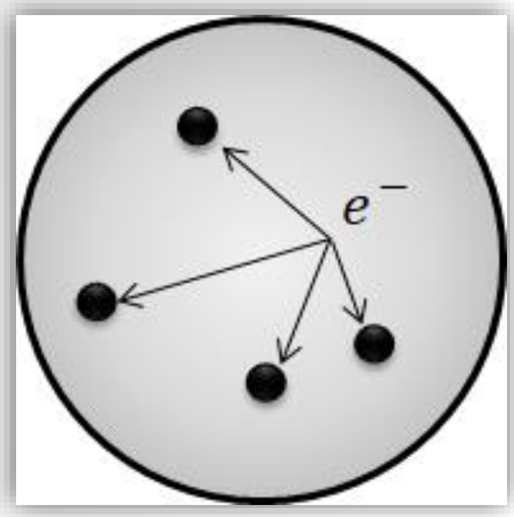
$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi\left(\vec{r},t\right)=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi\left(\vec{r},t\right)}$$

Простейшие модели атома водорода

Модель Томсона

«Атомы состоят из нескольких отрицательно заряженных корпускул, заключённых в сферу, имеющую однородно распределенный положительный электрический заряд, равным по величине суммарному заряду корпускул»

$R \approx 1\ \text{Å}$



$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$$

При смещении электрона из положения равновесия появляется возвращающая сила, направленная к центру шара.

Без учета затухания, атом водорода имеет дискретный спектр, состоящий из одной линии.

Проблема 1. Модель Томсона

дискретный спектр

В модели Томсона атом водорода – это равномерно заряженный шар $R = 1$ Å с общим зарядом $q = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, в центре которого находится один электрон. Найдите *длину волны* излучения такого атома.

Найдем *E* внутри шара.
По теореме Гаусса:

$$\oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

$$\sum_i q_i = e\frac{r^3}{R^3}$$

$$4\pi r^2 \cdot E(r) = \frac{e}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{R^3}}$$

$$\vec{F}(r) = -e\vec{E}(r)$$

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \; e\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{R^3} + m\ddot{\vec{r}} = 0$$

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}\vec{r} = 0$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}}$$

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 4\pi c\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mR^3}{e^2}}$$

$$= 4\pi\left(3\cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}\right)\sqrt{\frac{\pi\left(8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{\Phi}{\text{м}}\right)\left(9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{кг}\right)\left(10^{-10}\,\text{м}\right)^3}{\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл}\right)^2}}$$

$$= 1{,}185\cdot 10^{-7}\,\text{м} \approx 120\ \text{нм}$$

Ответ: 120 нм.

Проблема 2. Модель Томсона

эффект Зеемана

Для атома водорода в модели Томсона в виде гармонического осциллятора с частотой ω_0, определите частоты ω излучения в <u>слабом</u> однородном стационарном магнитном поле с напряжённостью B.

В магнитном поле сила Лоренца:

$$\vec{F} = -e\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow -e\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right] + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{R^3} + m\ddot{\vec{r}} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} + \frac{e}{m}\left[\dot{\vec{r}}, \vec{B}\right] + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r} = 0$$

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} + \frac{e}{m}\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right] + \omega_0^2\vec{r} = 0}$$

Направим ось $z\uparrow\uparrow B$

$$\begin{cases} \ddot{x}+\dfrac{e}{m}\dot{y}B+\omega_0^2 x=0 \\ \ddot{y}-\dfrac{e}{m}\dot{x}B+\omega_0^2 y=0, \\ \ddot{z}+\omega_0^2 z=0 \end{cases}$$

$$x(t)=x_0e^{i\omega t},$$
$$y(t)=y_0e^{i\omega t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(\omega_0^2-\omega^2\right)x_0+i\frac{eB\omega}{m}y_0=0 \\ &-i\frac{eB\omega}{m}x_0+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)y_0=0 \end{aligned}}$$

$$\begin{vmatrix} \left(\omega_0^2-\omega^2\right) & i\dfrac{eB\omega}{m} \\ -i\dfrac{eB\omega}{m} & \left(\omega_0^2-\omega^2\right) \end{vmatrix}=0$$

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2=\left(\frac{eB}{m}\right)^2\omega^2$$

$$\boxed{\Delta\omega\approx\pm\frac{eB}{2m}=\pm\Omega}$$

$$|e|B<<m\omega_0$$

$$\Omega=\frac{eB}{2m}$$

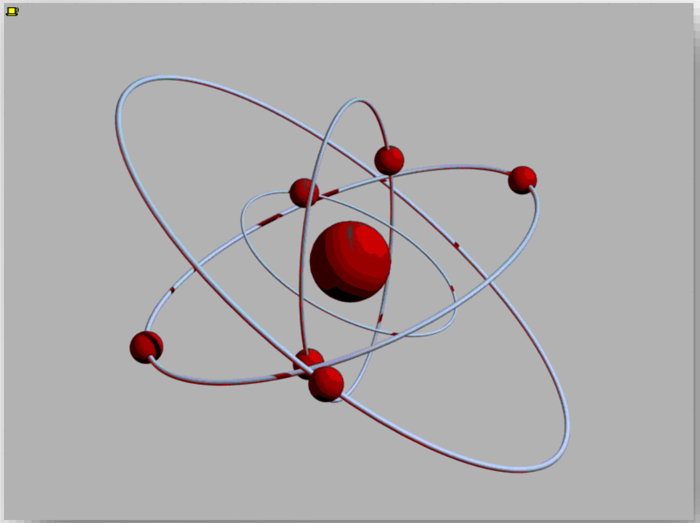
$$\Delta\omega=\omega-\omega_0$$

$$|\Delta\omega|<<\omega_0$$

Ответ: $\omega_0, \omega_0\pm\Omega$ – нормальный эффект Зеемана

$$4\omega_0^2\left(\Delta\omega\right)^2\approx\left(\frac{eB}{m}\right)^2\omega_0^2$$

Планетарная модель Резерфорда



Атом - система зарядов, в центре которой тяжёлое положительное ядро с размерами $\leq 10^{-14}$ м, вокруг вращаются электроны.
Время жизни $\sim 10^{-11} \div 10^{-8}$ с
Спектр излучения должен быть сплошным: электронная орбита коллапсирует, т.е. её орбитальная частота непрерывно возрастает.

$$\boxed{\tau = \frac{4\pi^2 \varepsilon_0^2 m_e^2 c^3 r_0^3}{e^4}}$$

$$\boxed{\upsilon = \omega R}$$

Проблема 3. Модель Резерфорда

Время жизни

Оцените время падения электрона на ядро в рамках модели Резерфорда.

$$E=\frac{m\upsilon^2}{2}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\ddot{r}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r^2}=\frac{\upsilon^2}{r}$$

$$\boxed{\upsilon^2=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r}}$$

$$E=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

$$P=-\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}\right)$$

$$=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{dr}{dt}$$

$$P=\frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{c^3}\ddot{r}^2$$

$$=\frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r^2}\right)^2$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt}=\frac{e^4}{12\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 c^3 r^2}}$$

$$dt = \frac{12\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 c^3 r^2}{e^4} dr$$

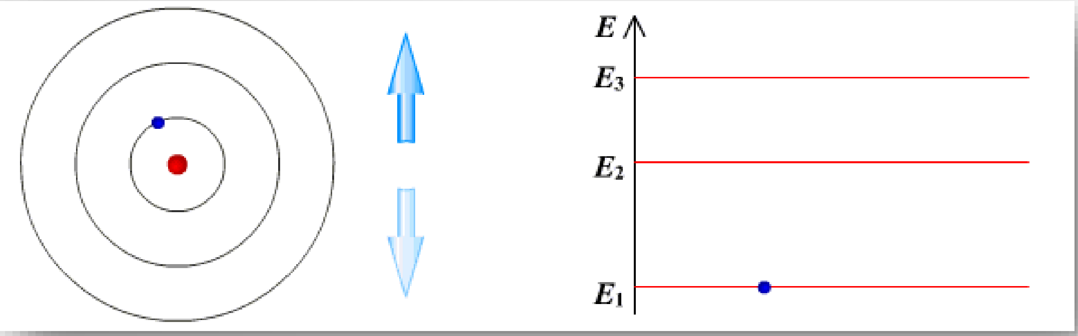
Интегрируем: при $t = 0 \rightarrow r = r_0$,
при $t = \tau$ упадет на ядро $r = 0$

$$\tau = \frac{4\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 c^3 r_0^3}{e^4}$$

$$= \frac{4\pi^2\left(8,85\cdot10^{-12}\ \text{Ф/м}\right)^2\left(9,1\cdot10^{-31}\text{кг}\right)^2\left(3\cdot10^8\ \text{м/с}\right)^3\left(0,053\cdot10^{-9}\right)^3}{\left(1,6\cdot10^{-19}\text{Кл}\right)^4}$$

Ответ: $= 1,57\cdot10^{-11}\text{с}$

Модель Бора



$$\boxed{L = n\hbar}$$

$$\boxed{\hbar\omega = E_n - E_m}$$

$$E = \frac{1}{2}m_e\upsilon^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r},$$

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m_e\frac{\upsilon^2}{r}$$

- Существует **дискретный набор стационарных состояний** с $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, где атом не излучает и не поглощает энергию.
- **Стационарные состояния** - орбиты, где угловой момент электрона = целое число, кратное $\hbar$:
- Испускание/поглощение излучения при переходах атома из одного состояния E_n в другое E_m и осуществляется фотоном
- Динамика электрона на орбите определяется уравнениями классической физики.

$$\boxed{E_n = -\frac{m_e}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{n^2} = -\frac{\Re}{n^2}}$$

$$\Re = \frac{m_e}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 = 13{,}6 \text{ эВ}$$

$$\boxed{r_n = \left(\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}\right)n^2 = n^2 a_0}$$

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu e^2} n^2,$$

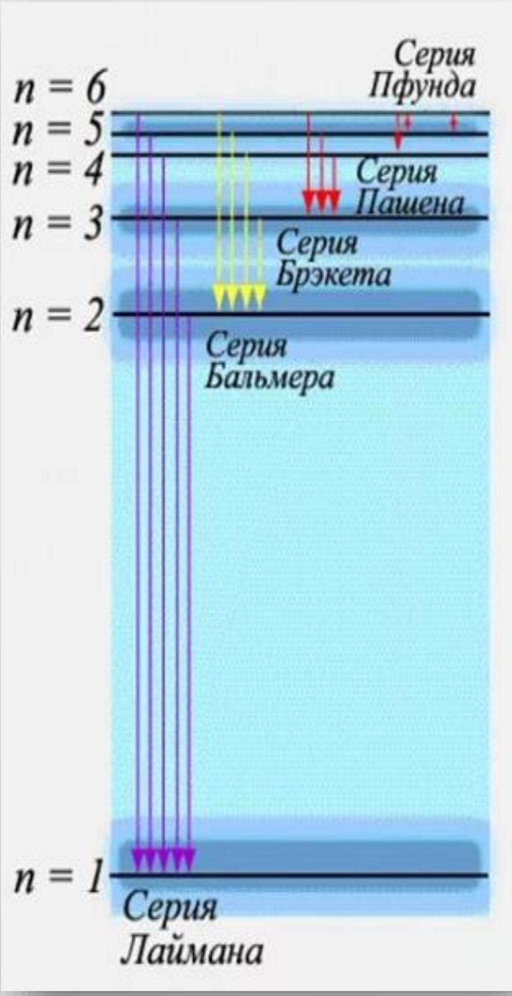
$$E_n = -\frac{\mu}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{n^2},$$

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$$

Недостатки теории Бора

- ✓ Логическая противоречивость теории: ни последовательно классическая, ни последовательно квантовая теория.
- ✓ Постулаты и схема «квантования» имеют произвольный характер и не вытекают из первых принципов теории.
- ✓ Постулат стационарных состояний противоречит законам классической электродинамики
- ✓ Где находится электрон в процессе перехода с одной орбиты на другую, если промежуточные состояния «запрещены»?
- ✓ Не объясняет интенсивность спектральных линий,
- ✓ Не объясняет поведение электрона в атоме в присутствии внешнего магнитного поля,
- ✓ Справедлива только для водородоподобных атомов

Обобщенная формула Бальмера



$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

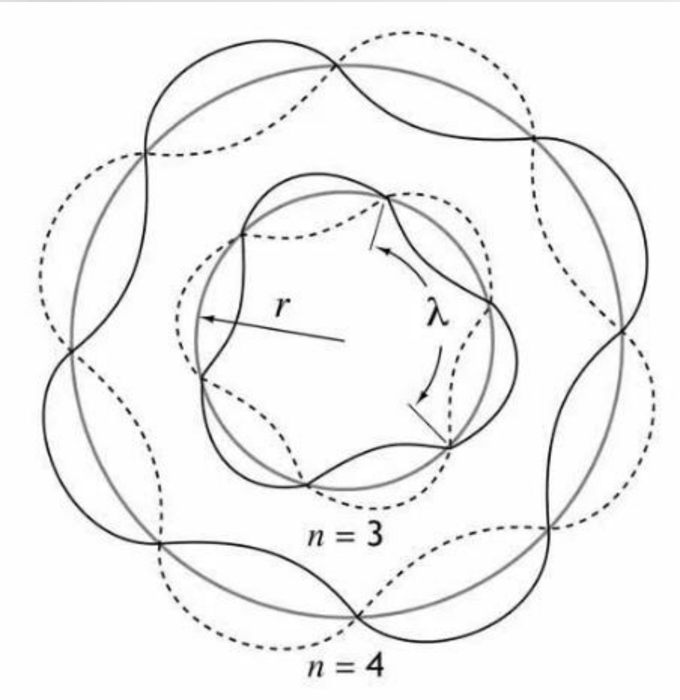
Позволяет рассчитать длины волн линий в спектре
Z – зарядовое число,
n и $m > n > 0$ – целые, числа,
- **$n = 1$ для серии Лаймана,**
- **$n = 2$ для серии Бальмера,**
- **$n = 3$ для серии Пашена,**
- **$n = 4$ для серии Брэкета, …**
- **$m = n + 1, n + 2, \ldots$,**

R – постоянная Ридберга

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$$

$$= 1{,}097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$$

Правила Вильсона – Зоммерфельда



Объединяет два правила квантования

$E = nh\nu$ – соотношение Планка, и

$L = n\hbar$ – соотношение Бора

через *квантование действия*:

n – квантовое число, p – обобщенный импульс, сопряжено связанный с q.

$$J = \oint p\,dq = nh,$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

Интеграл берётся за один период q. Правило применимо только к системам с периодическими во времени координатами

Проблема 4а. Правило Вильсона–Зоммерфельда

Условие Планка

Покажите, что из правила квантования Вильсона–Зоммерфельда следует правило квантования Планка $E = n\hbar\omega$

$$\oint p\,dx = 2\pi\hbar n$$

Рассмотрим одномерный гармонический осциллятор: частица *m* в интервале

$$-a \le x \le a$$

$$E(x,p)=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$\boxed{p(E,x)=\pm\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2}}$$

Точки поворота:

$$E=U(\pm a)=\frac{1}{2}m\omega^2a^2$$

$$\boxed{a=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}$$

$$\oint p\,dx = 2\int_{-a}^{a}\sqrt{2mE - m^2\omega^2x^2}\,dx = 4m\omega\int_{0}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

- **Перейдем к полярным координатам (x, φ), $\varphi \in$ (–π, π].**
- **Введем переменную $x = \sin\varphi$**
- **Пересчитаем пределы интегрирования**

$$= 4m\omega a^2\int_{0}^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi = 4m\omega\frac{a^2}{2}\int_{0}^{\pi/2}\left(1+\cos 2\varphi\right)d\varphi$$

$$= \frac{4m\omega\pi a^2}{4} = m\omega\pi a^2$$

$$J = \oint p\,dx = 4m\omega\pi a^2 = \frac{2Em\omega\pi}{m\omega^2} = \frac{2\pi E}{\omega}$$

$$\oint p\,dx = 2\pi\hbar n, \Rightarrow \frac{2\pi E}{\omega} = 2\pi\hbar n \Rightarrow E = n\hbar\omega$$

Проблема 4Б. Правило Вильсона–Зоммерфельда

Условие Бора

Покажите, что из правила квантования Вильсона–Зоммерфельда следует правило Бора для углового орбитального момента L = nħ

$$\boxed{\oint p\,dx = 2\pi\hbar n}$$

Для электрона на круговой орбите *r* используем (*r*, *φ*). Тогда *q* = *φ* = *f*(*t*), а сопряженный обобщенный импульс *p* = *L*:

$$\oint L d\varphi = 2\pi\hbar n$$

Для сферически симметричных потенциалов (движение в кулоновском поле): *L* = *const*.

$$L\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\hbar n \quad \Rightarrow \quad L = n\hbar$$