

**Сегодня: среда, 13
марта 2024 г.**

Общая физика
Модуль: Волновая оптика

Лекция 7. Дифракция света

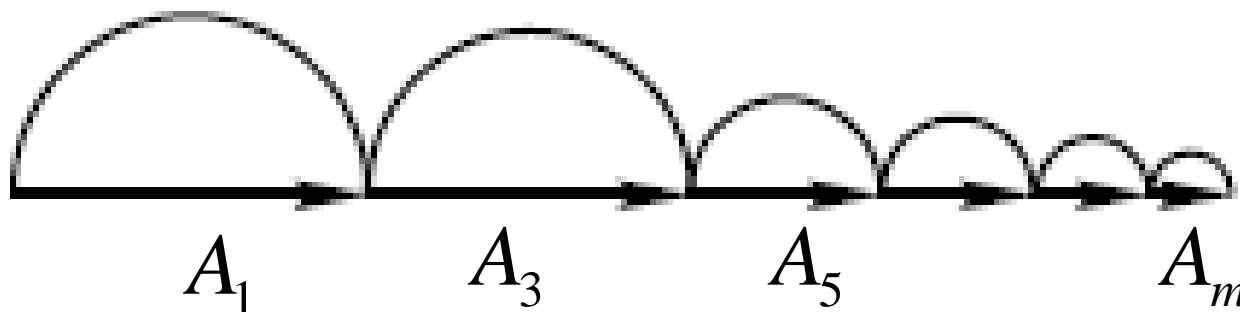
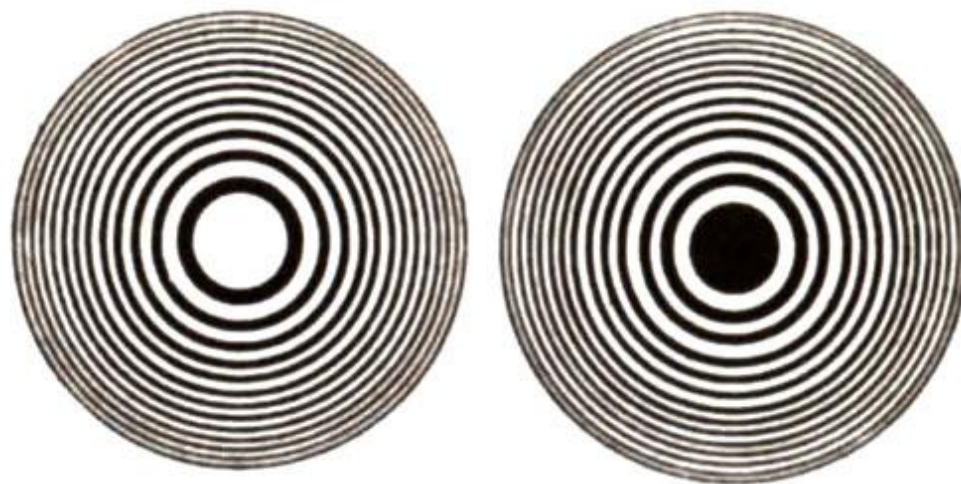
- 1. Дифракция Фраунгофера**
- 2. Дифракционная решетка**

Зонная пластинка

Если на стеклянную пластинку нанести концентрические темные кольца, закрывающие либо только четные, либо только нечетные зоны Френеля, получится зонная пластинка.

Амплитуда возмущения
будет значительно
больше, чем

$$A(P) = \frac{C}{a+b}$$



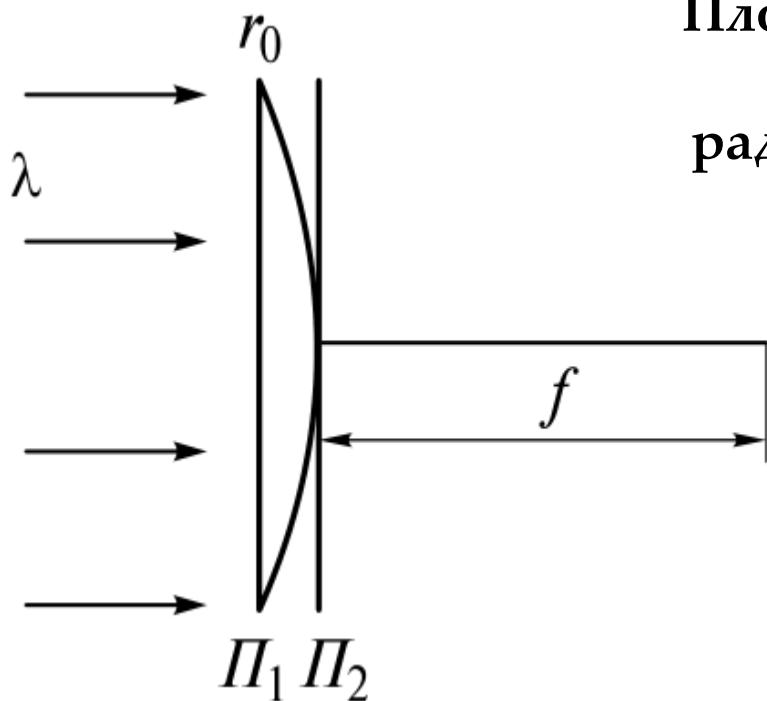
Линза

Плоская волна ($a \rightarrow \infty$) падает на тонкую собирающую линзу с поперечным радиусом r_0 и фокусным расстоянием f .

$$\text{Амплитуда волны } A_0 = \frac{c}{a}$$

Если точка Р находится в фокусе, то число открытых зон

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda f}$$



В отличие от зонной пластинки линза вносит существенную коррекцию в фазовые соотношения. Из-за разности путей между плоскостями Π_1 и Π_2 набег фазы у периферии будет меньше, чем на оси. Это отставание нарастает при удалении от оси пучка

Если выпуклая поверхность линзы параболическая, все dA будут иметь одинаковое направление = векторная диаграмма получается вытягиванием m полуколец спирали:

$$A_F = \frac{\pi}{2} (A_1 + A_2 + \dots + A_m)$$

$\pi/2$ как раз равен отношению длины половины витка к его диаметру

При небольшом числе витков: $A_1 + A_2 + \dots + A_m = mA_1$

И принимая: $A_1 = 2A_0$

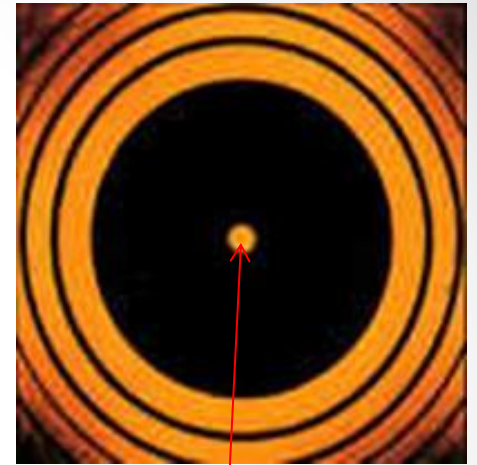
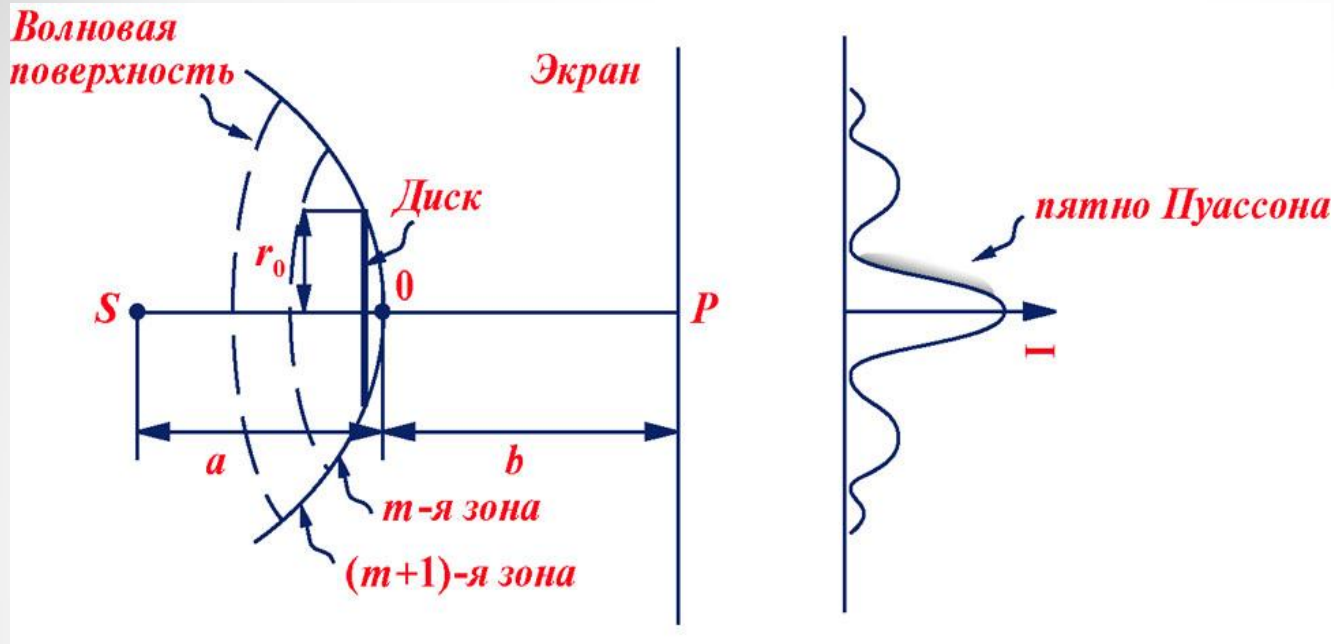
Оценим радиус фокального пятна. Из условия сохранения мощности пучка:

$$A_F = A_0 \frac{\pi r_0^2}{\lambda f}$$

$$A_0^2 \pi r_0^2 = A_F^2 \pi r_F^2$$

$$r_F = \frac{\lambda f}{\pi r_0}$$

Дифракция на непрозрачном диске



«Пятно Пуассона»

$$z \ll L_0 = \frac{r_0^2}{\lambda} \text{ и } I=0$$

$$z > L_0 \text{ и } I \approx I_0$$

$$A = A_m - A_{m+1} + A_{m+2} - \dots = \frac{A_m}{2} + \left(\frac{A_m}{2} - A_{m+1} + \frac{A_{m+2}}{2} \right) + \dots$$

$$A = \frac{A_m}{2}$$

Условие наблюдения дифракции

- область геометрической тени, если

$$b \ll \frac{R^2}{\lambda}$$

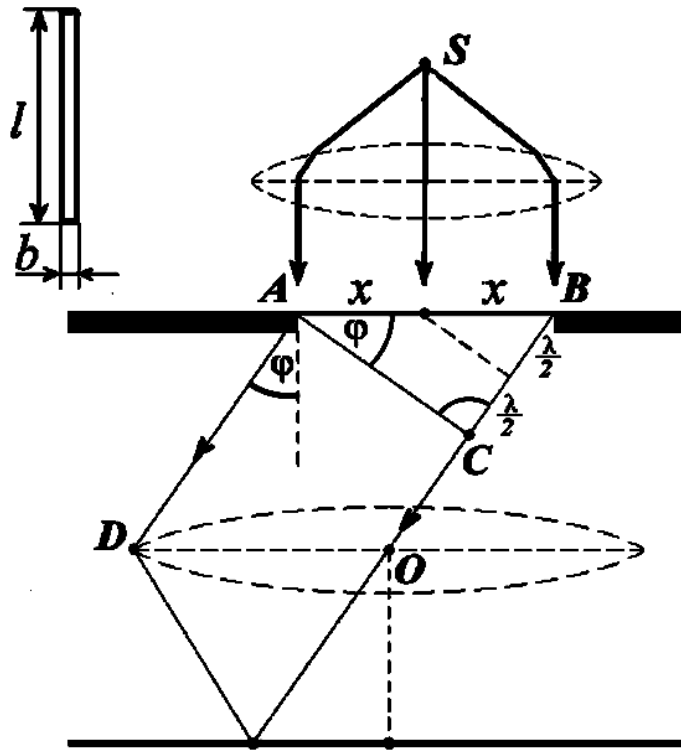
R - размеры
препятствия

- дифракция Френеля, если $b \cong \frac{R^2}{\lambda}$

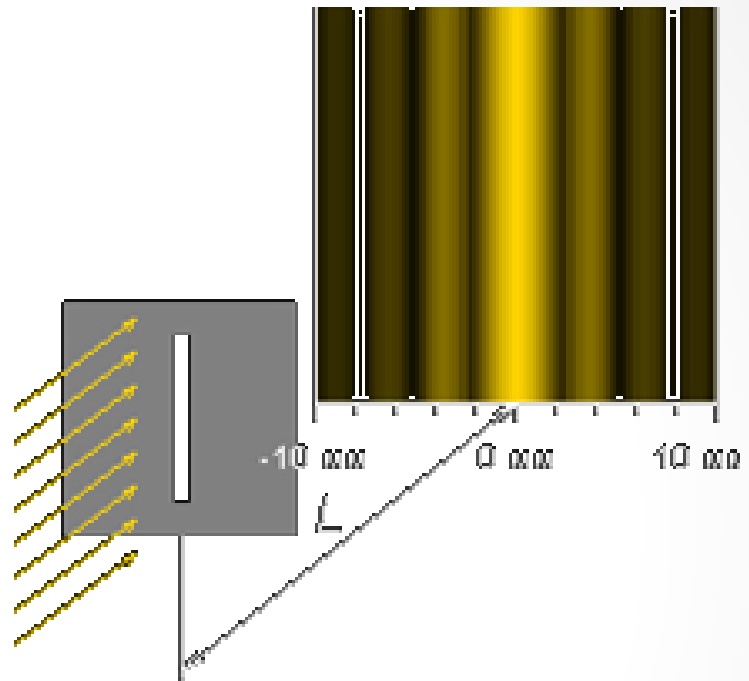
- граница области дифракции Фраунгофера

$$b \gg \frac{R^2}{\lambda}$$

Дифракция Фраунгофера на щели



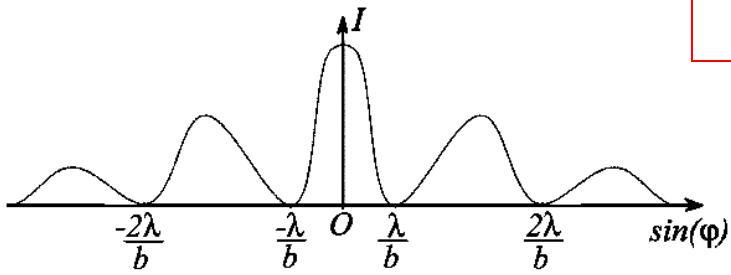
F_φ F_0
 побочный главный
 фокус фокус
 линзы линзы

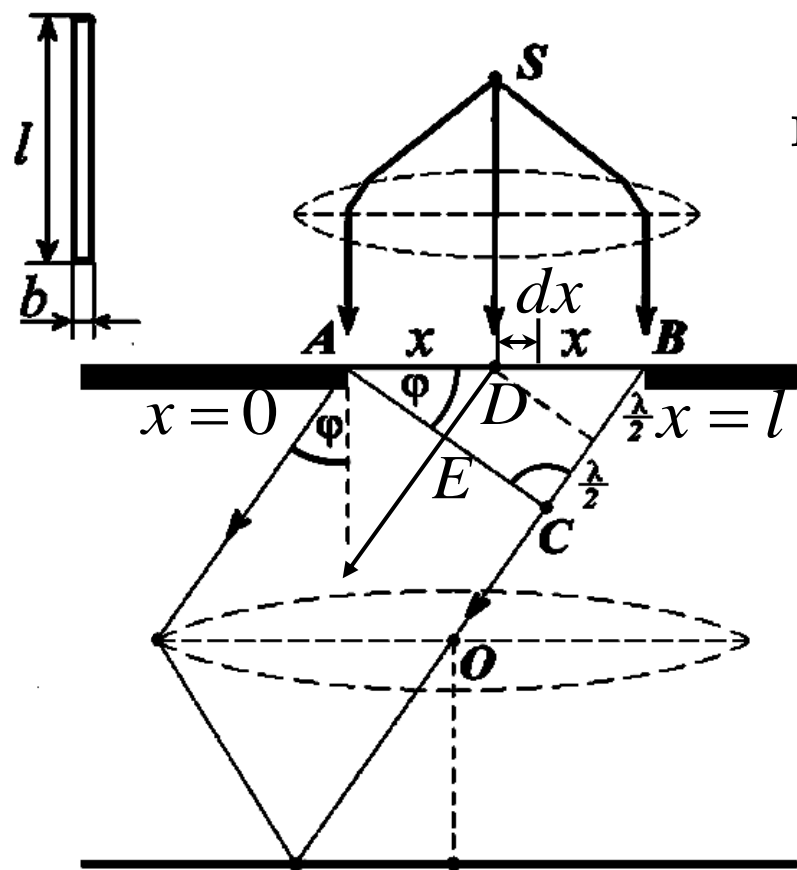


$$N = \frac{2l \sin \varphi}{\lambda}$$

Число открытых зон Френеля из ΔABC

φ - угол дифракции,
 l - ширина щели





Задача - получить формулу для интенсивности дифрагированных волн в зависимости от угла дифракции

Разобьем плоскость щели на ряд узких параллельных полосок равной ширины

$$dA = \frac{A_0}{l} \cdot dx \cdot \cos \omega t,$$

$$DE = x \cdot \sin \varphi, \quad \psi = \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \varphi.$$

$$dA = \frac{A_0}{l} \cdot dx \cdot \cos \left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \varphi \right)$$

$$A_\varphi = \frac{A_0}{l} \int_0^l \cos\left(\omega t + \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda} x\right) \cdot dx$$

$$= \frac{A_0}{l} \cdot \frac{\sin\left(\omega t + \frac{2\pi x \sin \varphi}{\lambda}\right) \Big|_0^l}{\frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda}} =$$

$$= \frac{A_0}{l} \cdot \frac{\sin\left(\omega t + \frac{2\pi l \sin \varphi}{\lambda}\right) - \sin \omega t}{\frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda}} =$$

$$= \frac{A_0}{l} \cdot \frac{\sin \omega t \left(\cos \frac{2\pi l \sin \varphi}{\lambda} - 1 \right) + 2 \cos \omega t \sin \frac{\pi l \sin \varphi}{\lambda} \cos \frac{\pi l \sin \varphi}{\lambda}}{\frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda}}$$

$$= \frac{2A_0}{l} \cdot \frac{\sin \frac{\pi l \sin \varphi}{\lambda} \left(\sin \omega t \sin \frac{\pi l \sin \varphi}{\lambda} + \cos \omega t \cos \frac{\pi l \sin \varphi}{\lambda} \right)}{\frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda}}$$

$$A_\varphi = A_0 \frac{\sin \left(\frac{\pi l \sin \varphi}{\lambda} \right)}{\frac{\pi l \sin \varphi}{\lambda}} \cdot \cos \left(\omega t + \frac{\pi l}{\lambda} \sin \varphi \right)$$

амплитуда результирующего
колебания

$$A_{\varphi} = A_0 \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi l \sin \varphi}{\lambda}\right)}{\frac{\pi l \sin \varphi}{\lambda}} \right|$$

ИНТЕНСИВНОСТЬ СВЕТА

I_0 - интенсивность света,
излучаемого щелью в
перпендикулярном
направлении.

$$I_{\varphi} = I_0 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi l \sin \varphi}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi l \sin \varphi}{\lambda}\right)^2} = I_0 \cdot \frac{\sin^2 Z}{Z^2}$$

$$Z = \frac{\pi l \sin \varphi}{\lambda}$$

Определим углы, под которыми будет наблюдаться полное взаимное гашение дифрагированных волн: $I_\varphi = 0$
 $\sin Z = 0$, при $Z \neq 0$.

Эти значения равны

$$Z = \pm 2k \cdot \frac{\pi}{2}, k = 1, 2, 3, \dots$$

Такие направления и соответствующие им темные полосы на приемном экране называются **дифракционными минимумами.**

Условие минимумов дифракции на щели

$$l \sin \varphi = \pm 2k \cdot \frac{\lambda}{2}, k = 1, 2, 3, \dots$$

Для получения условия максимумов найдем экстремум функций:

$$\frac{dI_{\varphi}}{dZ} = 0; \quad \frac{d \sin^2 Z}{dZ Z^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \operatorname{tg} Z = Z$$

Это уравнение имеет последовательность решений:

$$Z_0 = 0; \quad Z_1 = 1,43\pi; \quad Z_2 = 2,46\pi; \quad Z_3 = 3,47\pi; \quad Z_4 = 4,48\pi$$

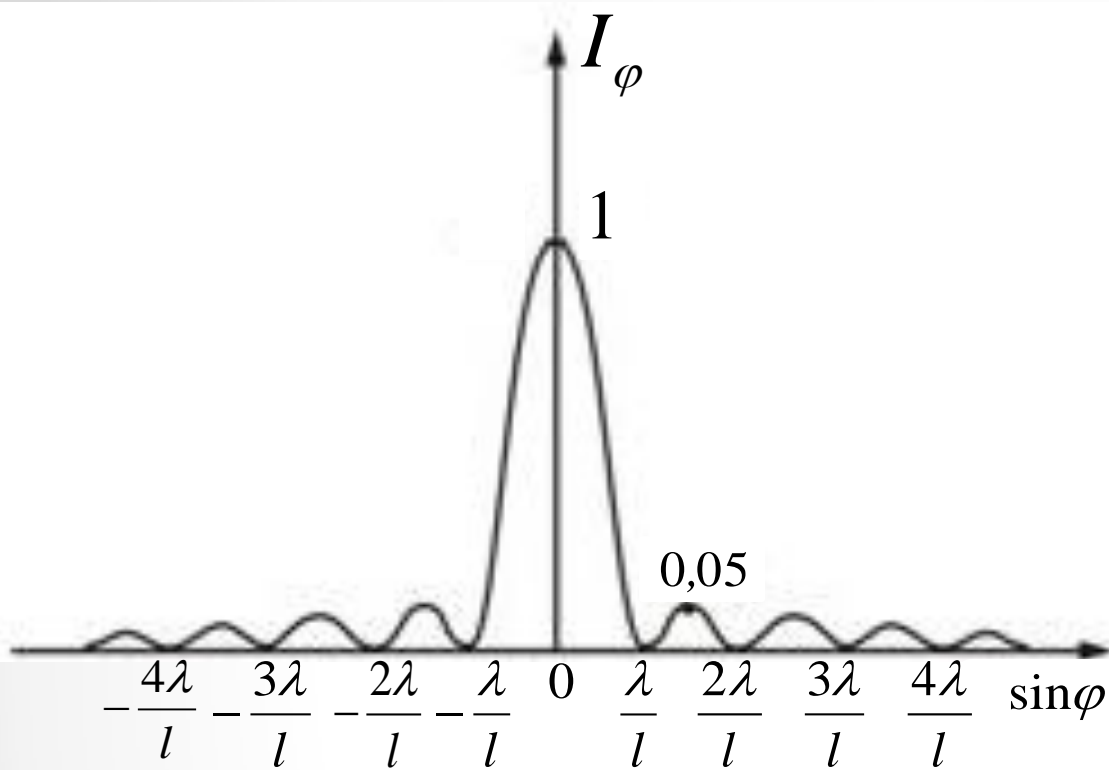
Точное условие максимумов:

$$l \sin \varphi = \pm \frac{\lambda Z_m}{\pi}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Решение $Z_0 = 0$ определяет **главный максимум** I_0 , для которого $\varphi = 0$ и соответствует **прямому прохождению света** через щель.

Максимумы для остальных $Z \neq 0$ называются **вторичными**. Их интенсивности малы по сравнению с главным максимумом.

$$1 : 0,045 : 0,016 : 0,008 : 0,005 \dots$$



При наличии линзы
параллельное
перемещение щели
не меняет картины
на приемном экране.

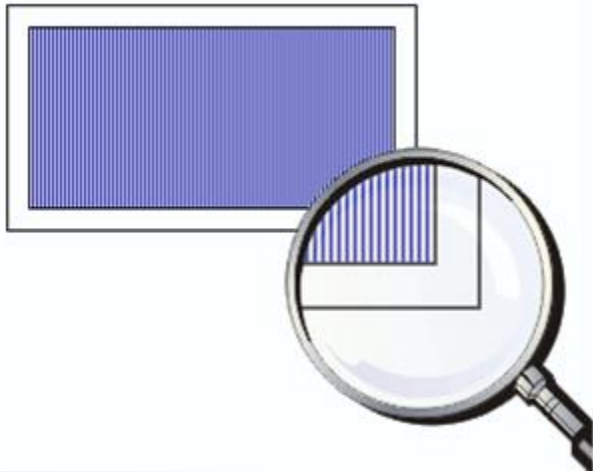


Приближенное условие вторичных максимумов :

$$l \sin \varphi = \pm (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}, k = 1, 2, 3, \dots$$

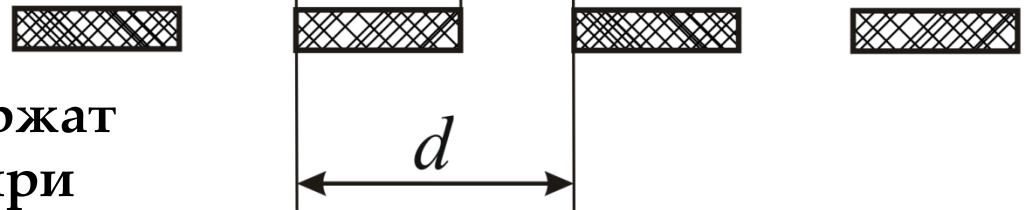
Дифракционная решетка

совокупность из параллельных щелей, разделенных непрозрачными промежутками.



Сумма ширины щели « a » и непрозрачного промежутка « b » называется **периодом решетки**

$$d = a + b$$



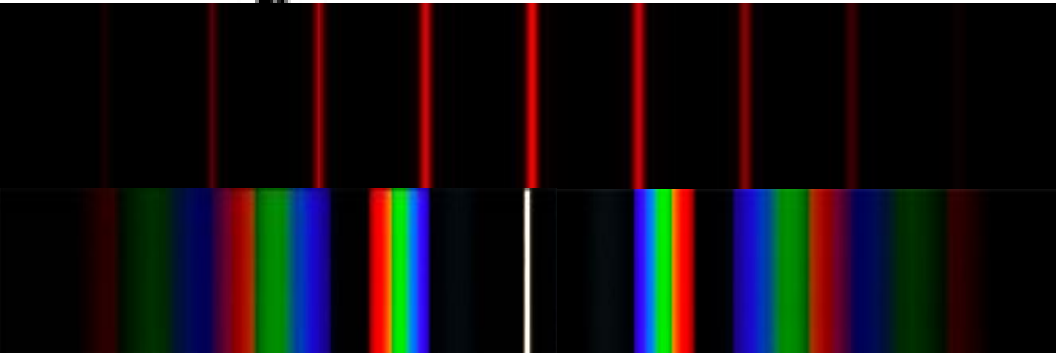
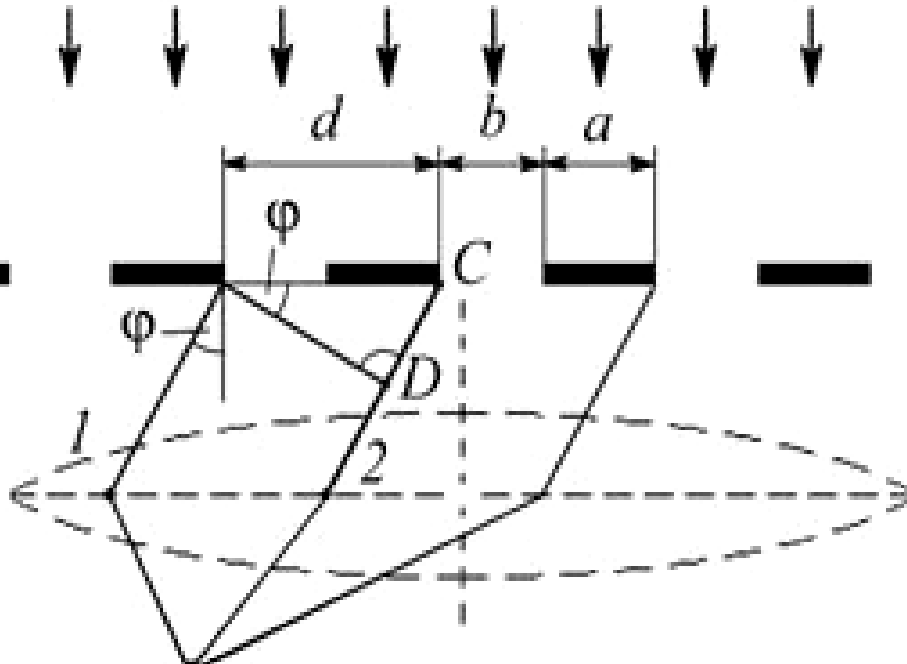
Современные решетки содержат свыше 100 штрихов на 1 мм при полном числе штрихов до 200 000.

Два вида интерференции

при прохождении световых лучей через дифракционную решетку:

1. Интерференция лучей, дифрагировавших на каждой щели в отдельности.

2. Интерференция лучей, дифрагировавших от разных щелей.

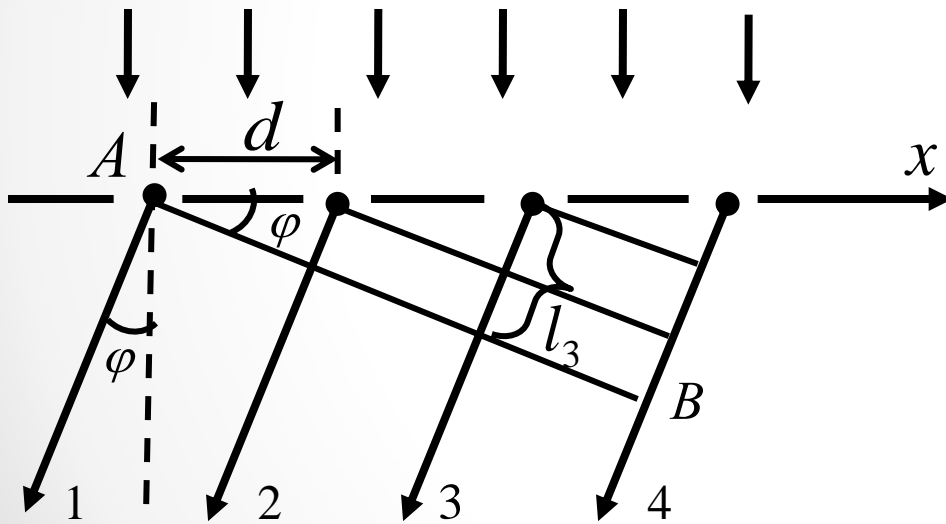


При наличии линзы параллельное перемещение щели не меняет картины на приемном экране.

Поэтому если бы на решетке имел место только один первый вид интерференции, то расположение минимумов и максимумов на экране было бы таким же как и при дифракции на одной щели, только интенсивность максимумов была бы в N раз больше.

Минимумы, соответствующие дифракции на одной щели, останутся минимумами и при дифракции на N щелях.

Соответственными называются лучи, идущие в заданном направлении от геометрически подобных точек всех щелей решетки.



Рассмотрим соответственные лучи, дифрагировавшие под углом φ и идущие от средних точек щелей. Результат интерференции после сведения линзой определяется соотношением их фаз на уровне перпендикуляра АВ.

Длина путей, проходимых лучами от щелей до АВ

$$l_s = (S - 1) \cdot d \cdot \sin \varphi, S = 1, 2, 3, \dots, N$$

Результат интерференции лучей, дифрагировавших на разных щелях, определяется интерференцией соответственных лучей.

Фазы лучей на уровне перпендикуляра АВ

$$\psi_s = (S - 1) \cdot \frac{2\pi d \cdot \sin\varphi}{\lambda}, S = 1, 2, 3, \dots, N$$

Фазы равномерно нарастают по мере увеличения номера. Т.е., после сведения лучей линзой имеет место сложение гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и равномерно нарастающими фазами.

$$I = I_\varphi \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d \sin\varphi}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d \sin\varphi}{\lambda}\right)}$$

$$I_\varphi = I_0 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin\varphi}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a \sin\varphi}{\lambda}\right)^2}$$

Для углов φ , удовлетворяющих условию

$$a \sin \varphi = \pm 2k \cdot \frac{\lambda}{2}, k = 1, 2, 3, \dots$$

$$I_{\varphi} = 0, I = 0$$

Это условие главных минимумов

Условие

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda, m = 1, 2, 3, \dots$$

Условие главных максимумов дифракционной решетки

$$I = I_{\varphi} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{N \pi d \sin \varphi}{\lambda} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda} \right)} = I_{\varphi} \cdot \frac{\sin^2 (N \pi m)}{\sin^2 (m \pi)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow m\pi} \frac{\sin^2 (N \alpha)}{\sin^2 \alpha} = N^2$$

$$I = I_{\varphi} \cdot N^2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow \infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow \infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Правило Лопиталья

Число главных максимумов определяется требованием

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda, m = 1, 2, 3, \dots$$

=1

$$m_{max} = \left\{ \frac{d}{\lambda} \right\}$$

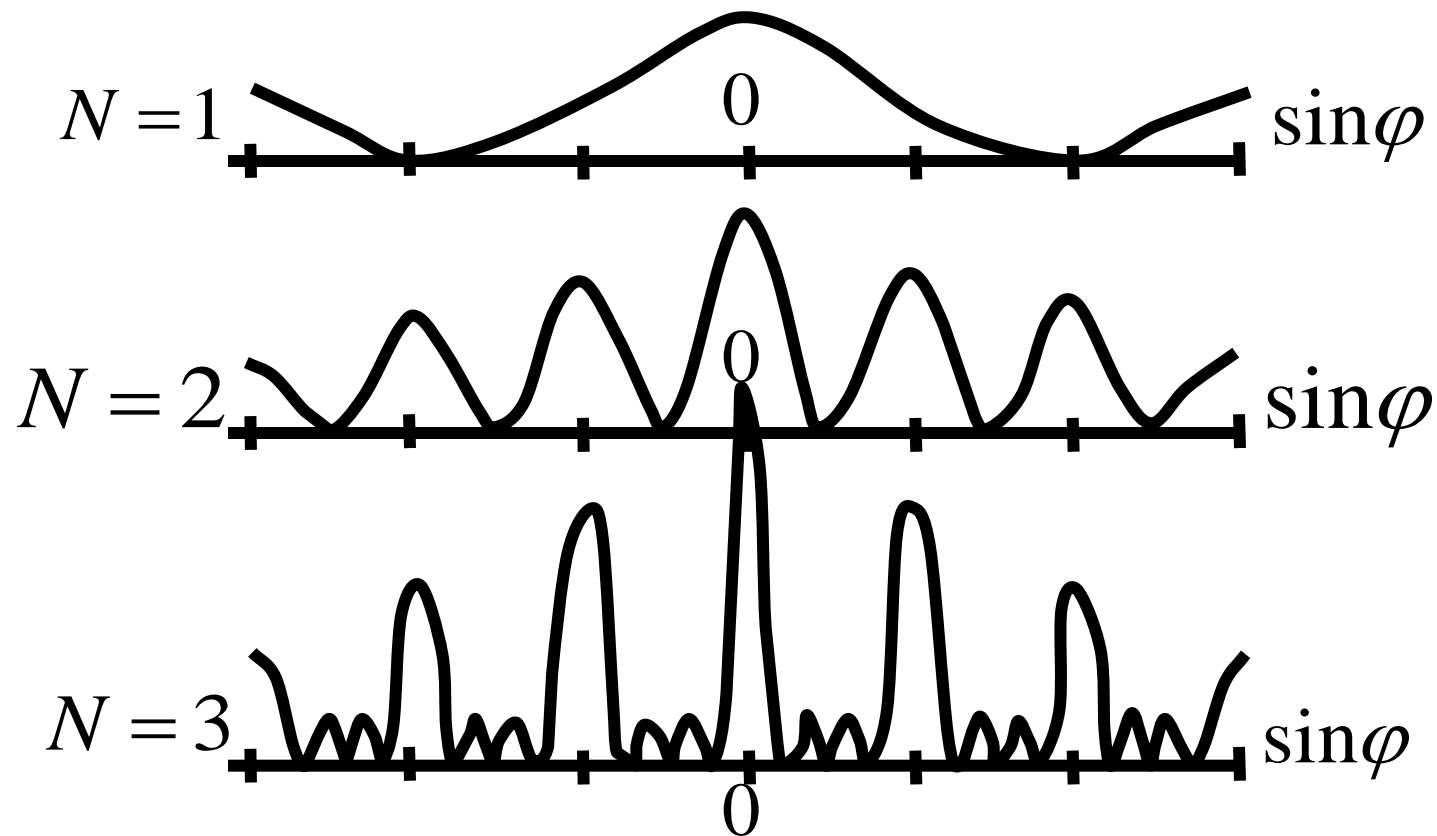
Целое число, ближайшее к отношению с меньшей стороны

Условие

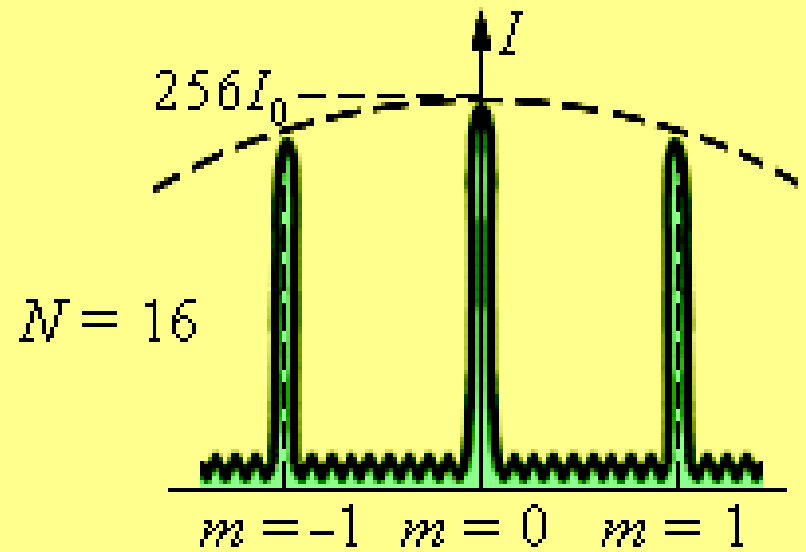
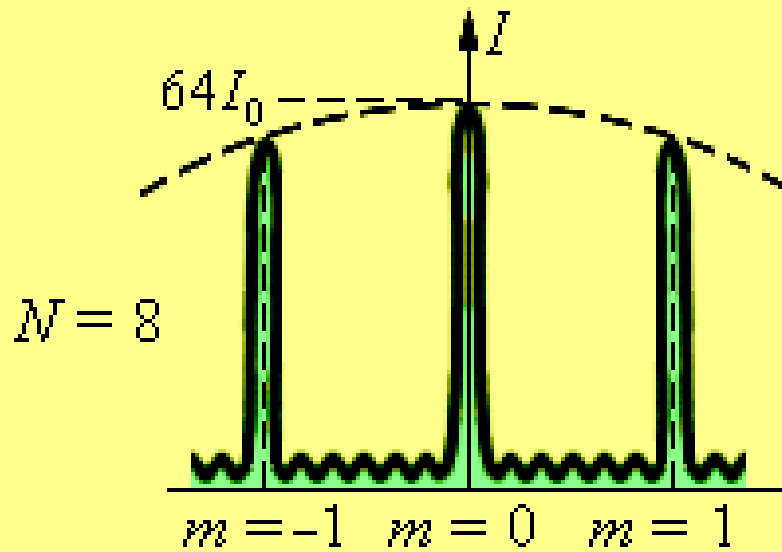
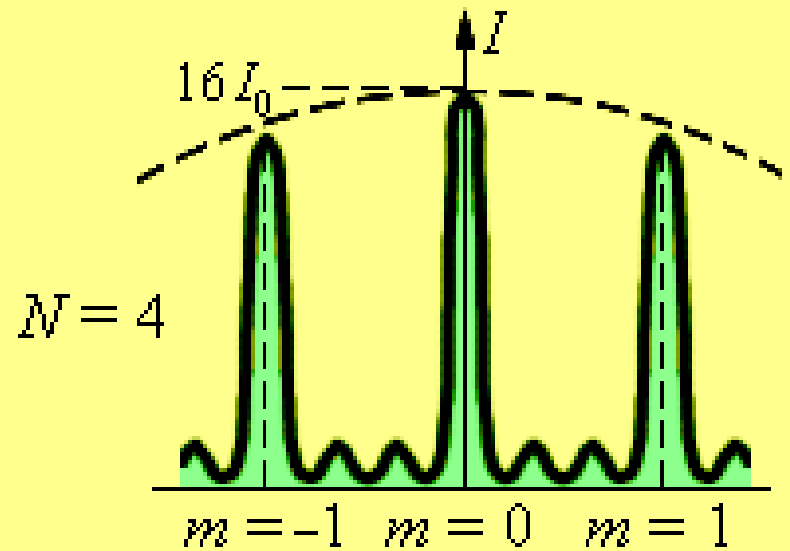
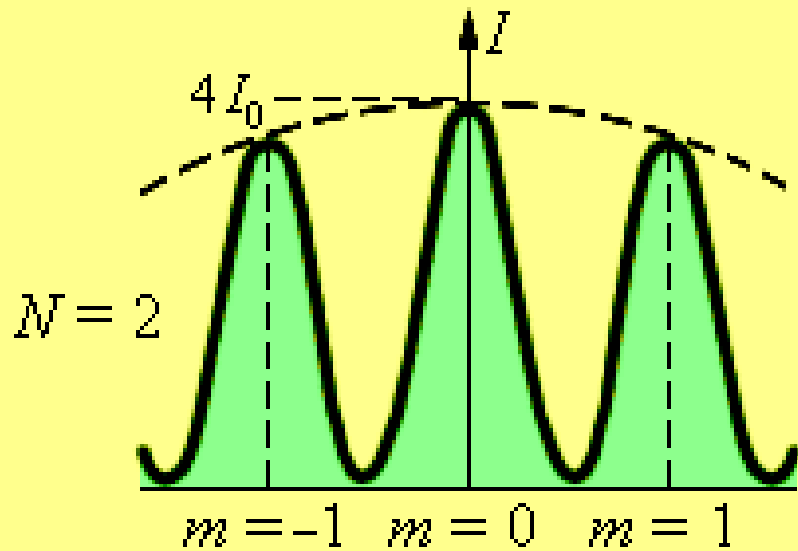
$$d \sin \varphi = \pm \frac{n}{N} \lambda, n = 1, 2, 3, \dots, n \neq N, 2N, 3N, 4N, \dots$$

$$I = I_{\varphi} \cdot \frac{\sin^2(n\pi)}{\sin^2\left(\frac{n\pi}{N}\right)} = 0$$

Определяет положение добавочных минимумов

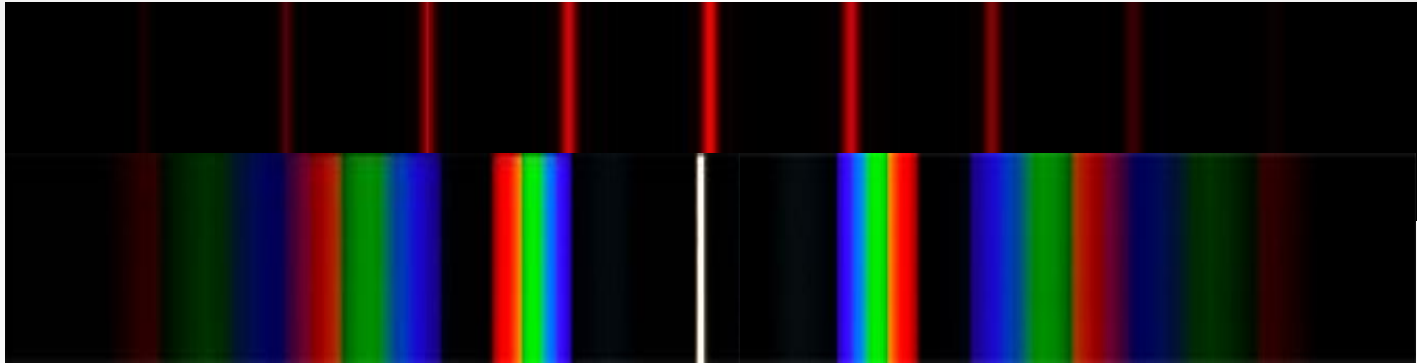


В случае N щелей между двумя главными максимумами располагается $N-1$ дополнительных минимумов, разделенных $N-2$ вторичными максимумами



Распределение интенсивности при дифракции монохроматического света на решетках с различным числом щелей.

I_0 – интенсивность света при дифракции на одной щели.



Положение главных максимумов зависит от длины волны. Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального, **разлагаются в спектр, фиолетовый конец которого обращен к центру дифракционной картины, а красный – наружу.**

Спектральная призма сильнее всего отклоняет фиолетовые лучи, дифракционная решетка, наоборот, сильнее отклоняет красные лучи.

Характеристики спектральных приборов

1. Рассмотрим в спектре порядка « m » две длины волны λ и $\lambda + \delta\lambda$, которым соответствуют углы φ и $\varphi + \delta\varphi$.

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = D$$

Чем больше угловая дисперсия, тем больше угловое разделение лучей для разных длин волн, образующих спектр и тем выше класс прибора.

**Угловая
дисперсия**

Возьмем производную от условия главных максимумов:

$$d\cos\varphi \cdot \delta\varphi = m \cdot \delta\lambda$$

$$D = \frac{m}{d\cos\varphi}$$

$D \sim 1/d$, поэтому у хороших решеток для прецизионных исследований период решетки мал: $d \approx 1$ мкм.

2. Рассмотрим на экране две полосы, соответствующие длинам волн λ и $\lambda + \delta\lambda$ и разделенные расстоянием δl .

$$\frac{\delta l}{\delta \lambda} = D_l$$

линейная дисперсия

3. Разрешающая способность.

Отношение длины волны к разности двух длин волн $\delta\lambda$, начиная с которой волны становятся различимыми, называется разрешающей способностью, или разрешающей силой спектрального прибора:

$$\frac{\lambda}{\delta \lambda} = R$$

Критерий Рэля (критерий различимости длин волн)

Длины волн становятся различимыми, если максимум кривой интенсивности одной волны совпадает с минимумом кривой интенсивности второй волны.

Условие максимума для первой волны $\lambda + \delta\lambda$

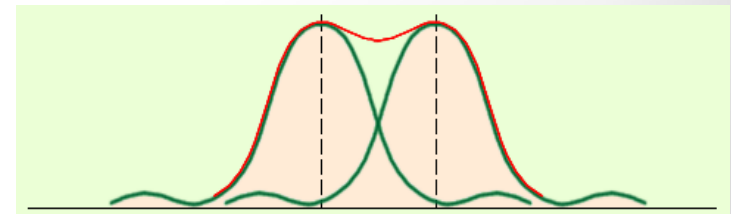
$$d \sin \varphi_{\max} = m(\lambda + \delta\lambda).$$

Условие минимума, совпадающего с ЭТИМ максимумом для второй волны λ :

$$d \sin \varphi_{\min} = \left(m + \frac{1}{N} \right) \lambda.$$

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$$

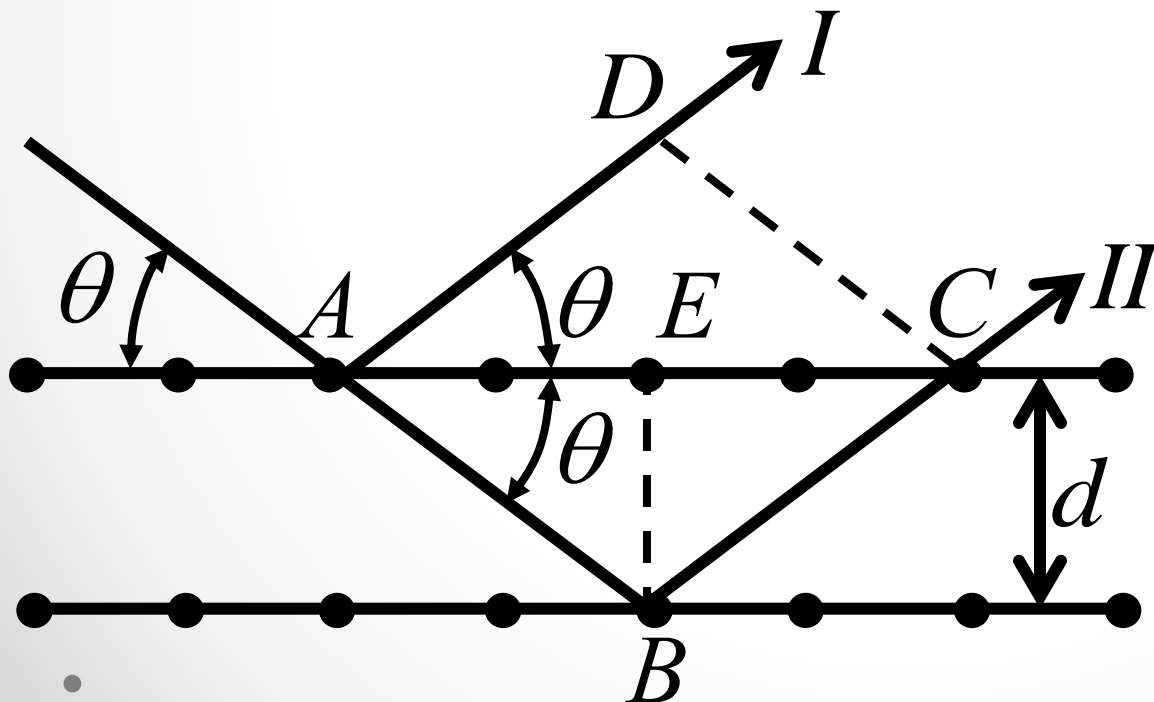
**Разрешающая способность
пропорциональна числу щелей (!)**



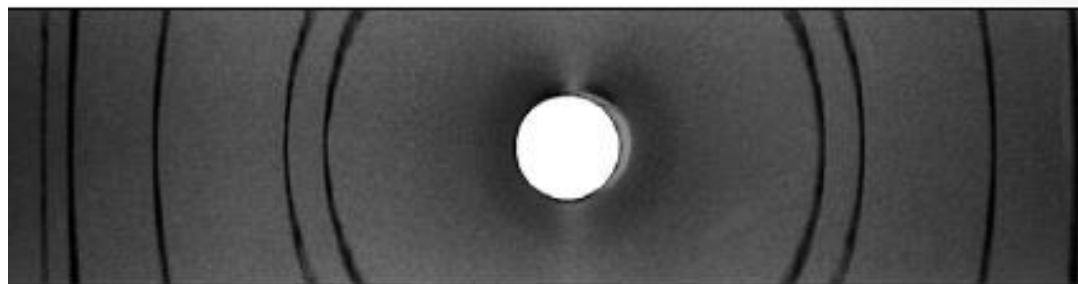
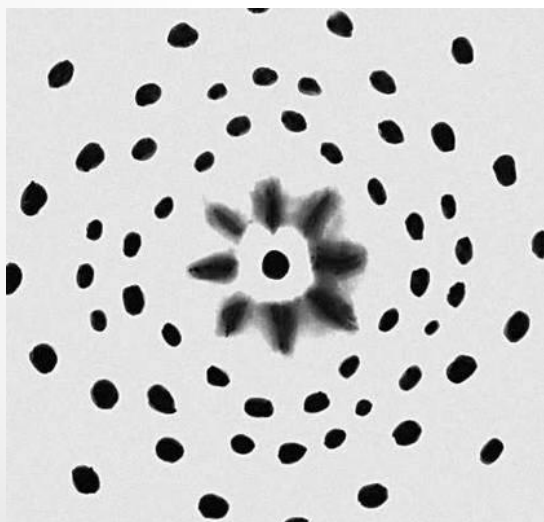
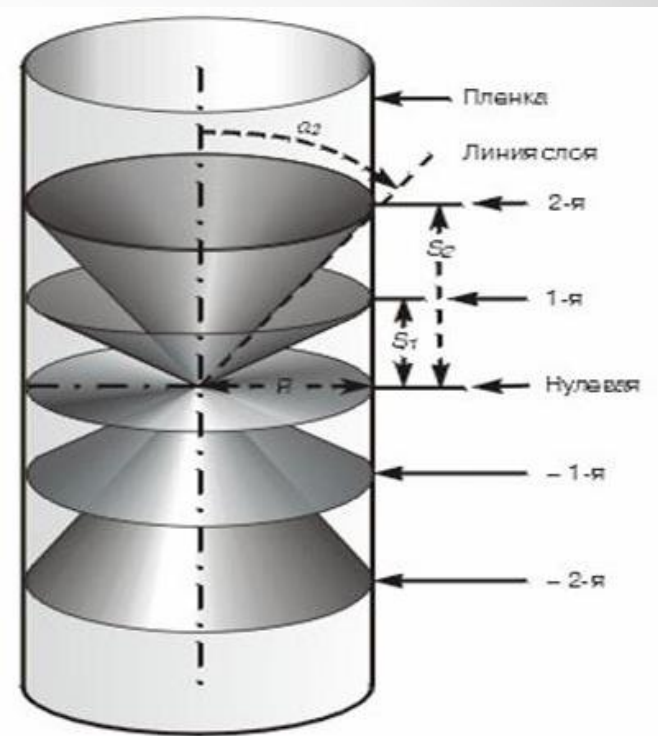
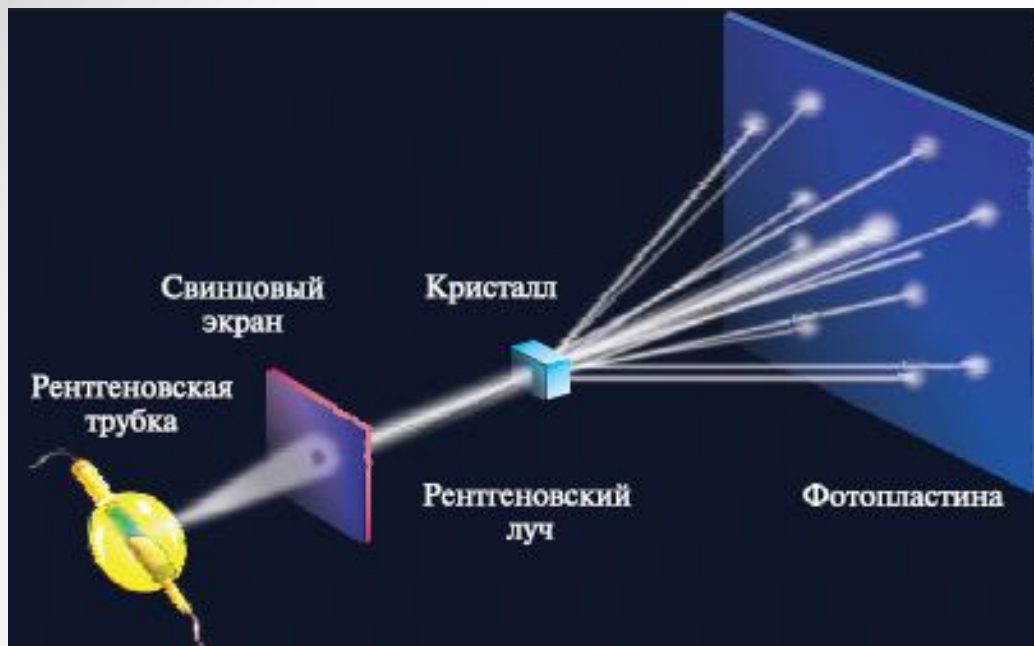
Дифракция рентгеновских лучей

Кристаллы - периодические структуры с периодом (расстояние между атомами) $\sim 10^{-10}$ м.

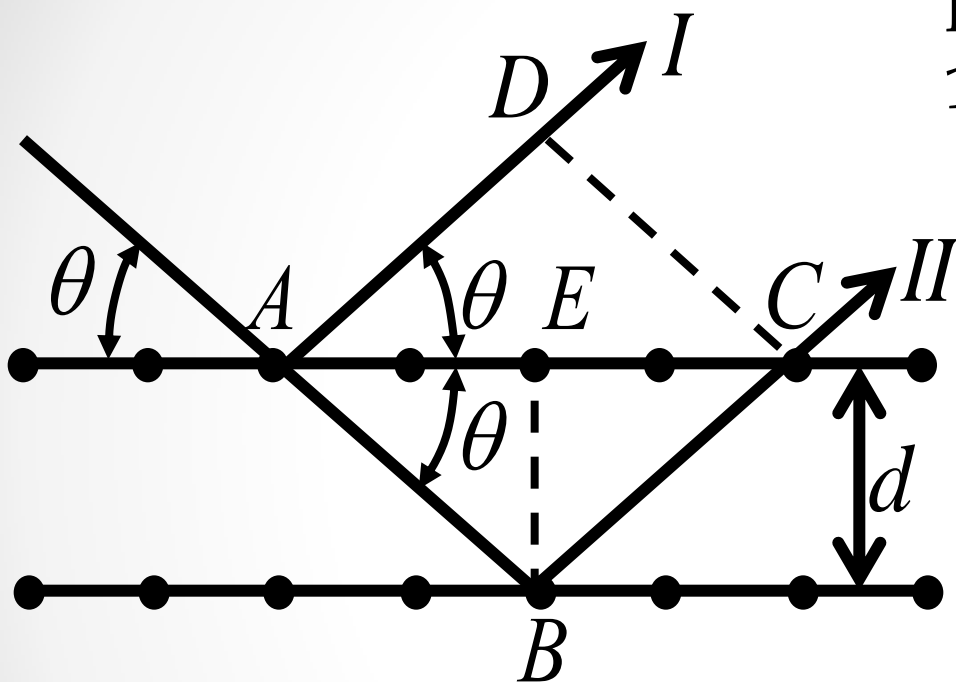
Кристалл - естественная трехмерная дифракционная решетка для рентгеновских лучей, для которых $\lambda \approx d$.



Угол скольжения θ
- угол между направлением падающих лучей и кристаллографической плоскостью.



Условие Вульфа-Брэггов



Разность хода между лучами 1' и 2', отраженными от двух параллельных кристаллографических плоскостей:

$$AB + BC = 2d \sin \theta,$$

d – расстояние между плоскостями.

Максимумы интенсивности наблюдаются в направлениях, удовлетворяющих **условию Вульфа-Бреггов:**

$$2d \sin \theta = \pm m \lambda$$

Применение дифракции R - лучей

1. Рентгеновская спектроскопия

Используя кристаллы с известным параметром решетки и измеряя углы скольжения для различных порядков m отражения, определяют длину волны излучения

2. Рентгеноструктурный анализ

Используя излучение с известной длиной волны и измеряя углы скольжения для различных порядков m отражения, определяют кристаллическую структуру минералов, металлов.