

Лекция 6. Дифракция света



1. Дифракция как проявление волновой природы света.
2. Принцип Гюйгенса-Френеля
3. Зоны и спираль Френеля
4. Дифракция на круглом отверстии и диске

Дифракция - проявление волновой природы света



свет распространяется прямолинейно

свет – поток корпускул

Нарушение закона о прямолинейном распространении света

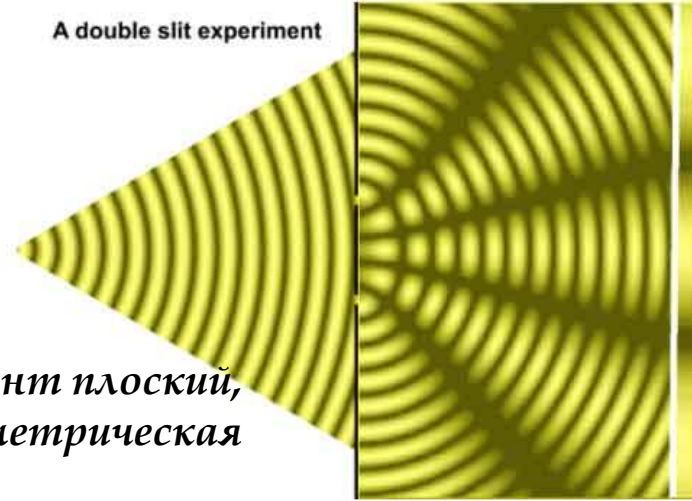


$$L_0 \approx \frac{d^2}{\lambda}$$

Характерная длина

$L \ll L_0$ - волновой фронт плоский, пучок прямой \Rightarrow геометрическая оптика

A double slit experiment



Дифракция - неотъемлемое свойство волн любой природы стремиться распространяться во всех направлениях, заходя в область геометрической тени, огибая препятствия.

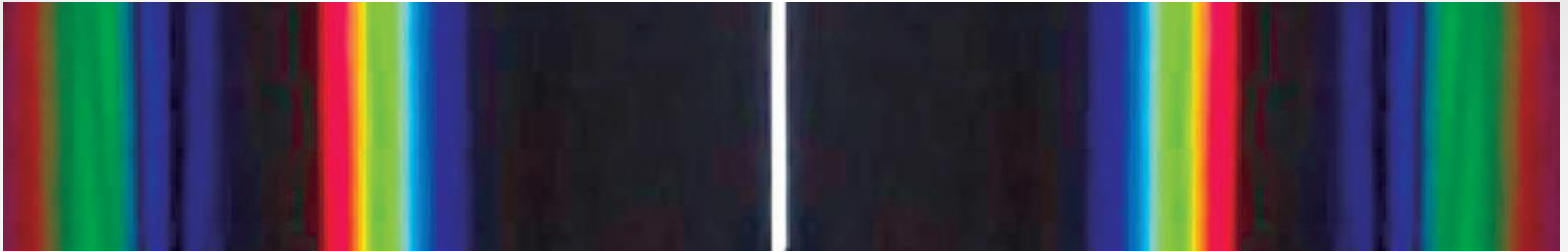
Доказывает волновую природу света

Наиболее ярко дифракция проявляется при распространении плоской волны через прозрачные объекты, модулирующие амплитуду или фазу волны в плоскости, перпендикулярной направлению распространения \Rightarrow перераспределение объемной плотности энергии электромагнитного поля.

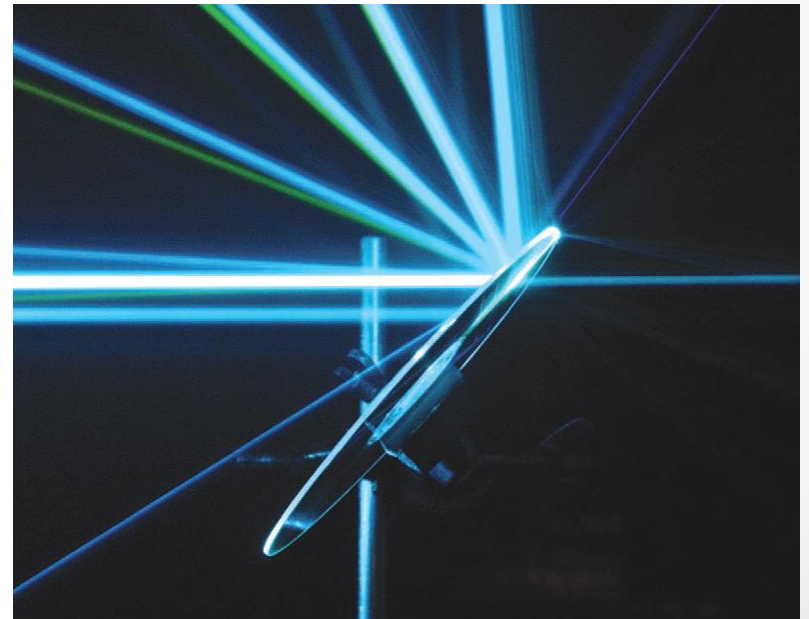
Имеет практическую ценность:

- ограничивает возможности концентрации света в пространстве
- определяет предел разрешающей способности оптических приборов
- влияет на формирование оптического изображения

Дифракция пучка белого света на амплитудной дифракционной решетке



Дифракция пучка
аргонового лазера
на краю CD - диска



Характер наблюдаемой картины указывает на интерференционную природу явления дифракции

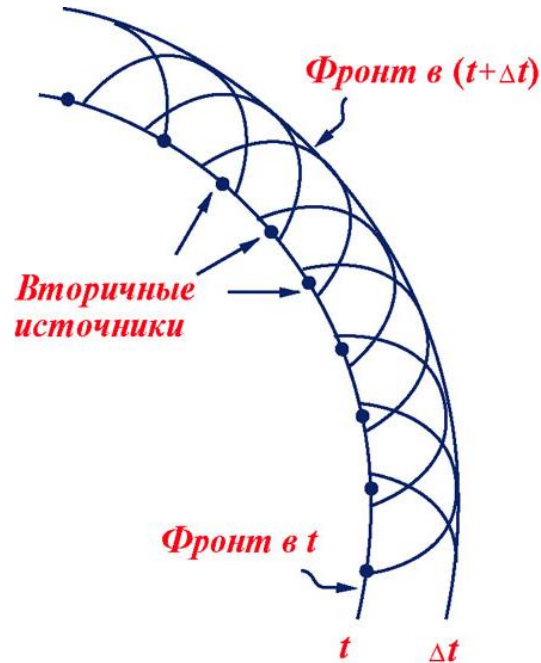
Принцип Гюйгенса



Христиан Гюйгенс
1629 - 1695

Френель: «Вторичные световые волны могут как усиливать друг друга, так и ослаблять».

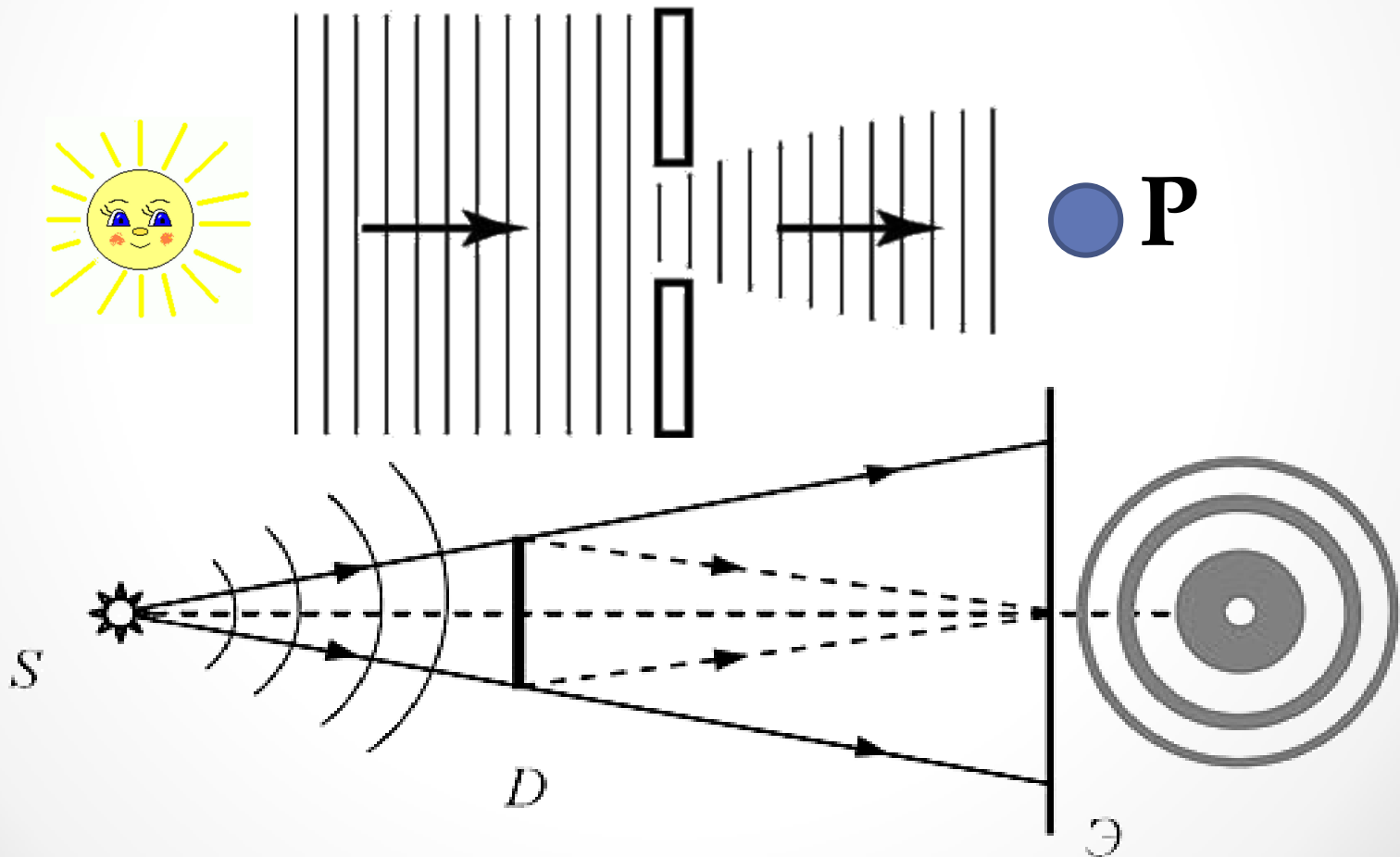
Они могут интерферировать!

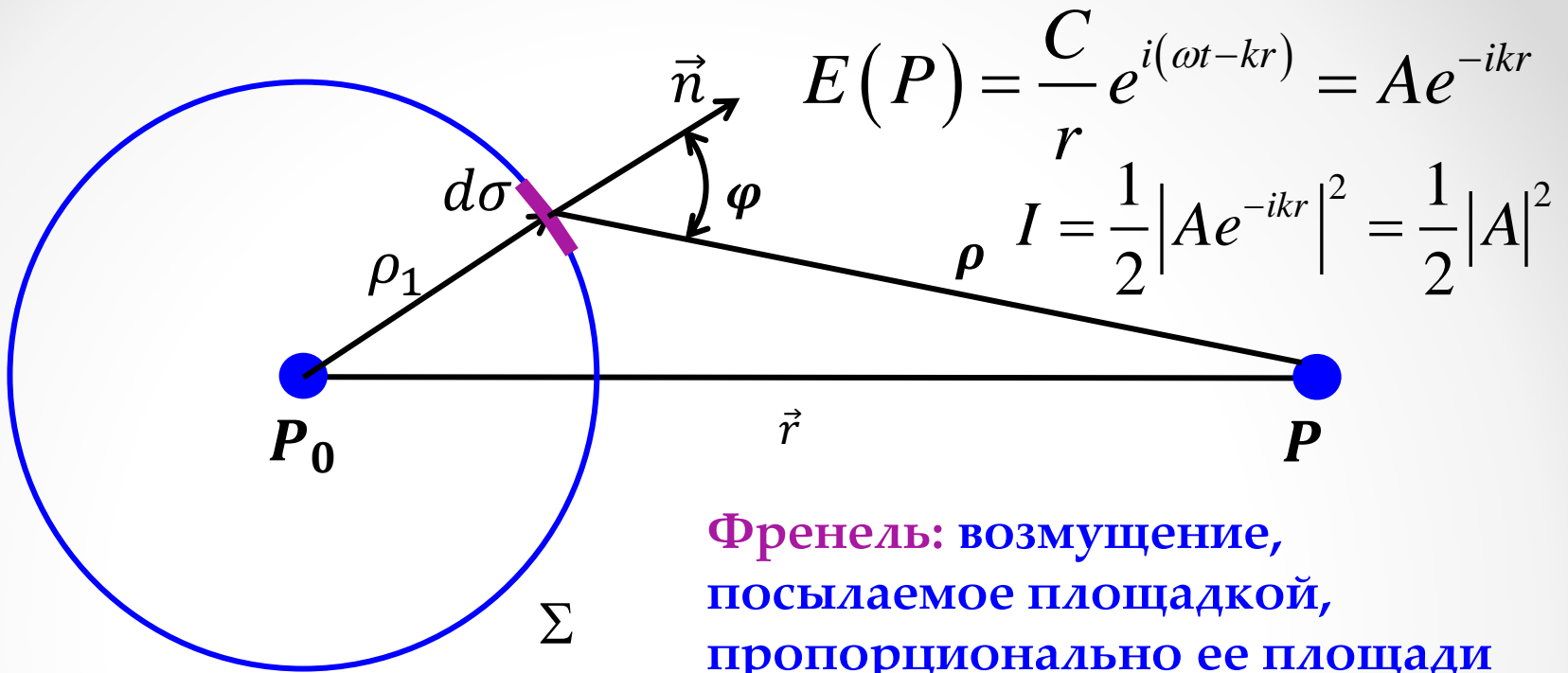


Augustin Fresnel
(1788-1827)

Принцип Гюйгенса-Френеля:

Световое поле – результат интерференции элементарных вторичных волн, испускаемых каждым элементом некоторой волновой поверхности





Френель: возмущение, посылаемое площадкой, пропорционально ее площади и зависит от угла наклона φ

2 этапа распространения:

1. Сферическая волна достигает некоторой сферической поверхности. На ней «появляются» вторичные источники
2. Вторичные источники испускают свои сферические волны, которые интерферируют в точке P

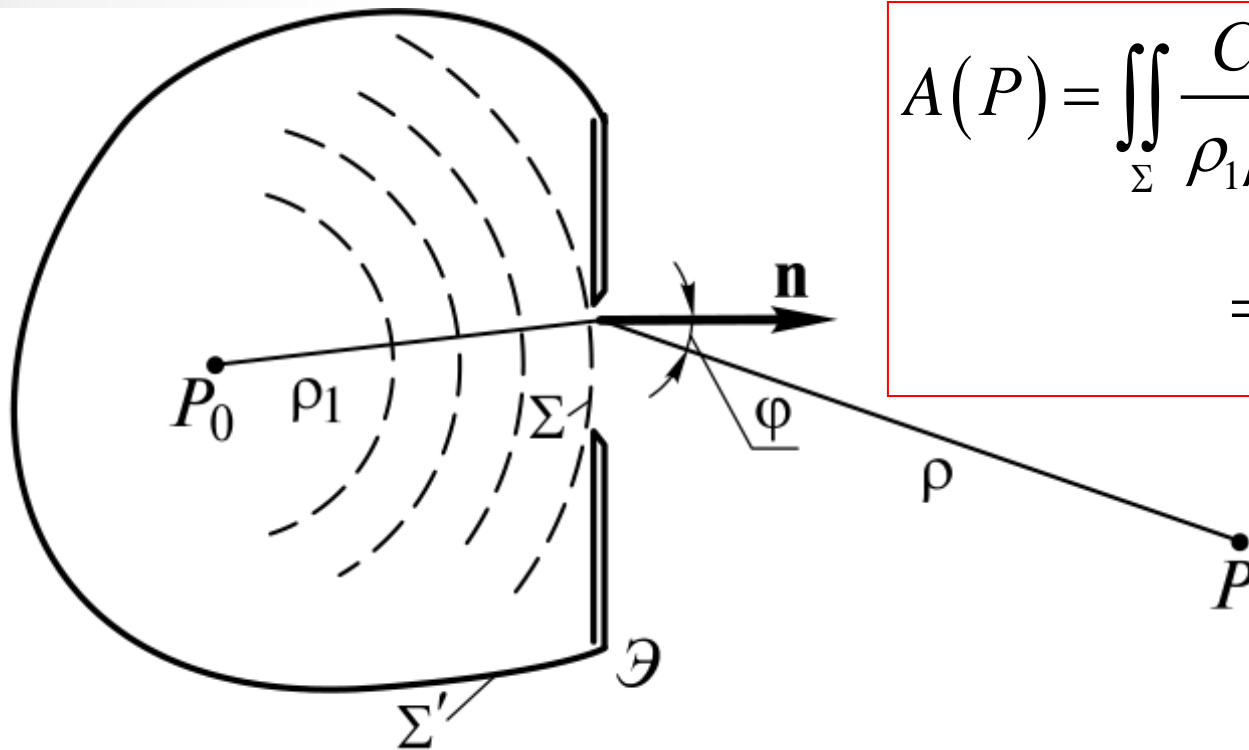
$$A(P) = \iint_{\Sigma} \frac{C}{\rho_1} e^{-ik\rho_1} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} K(\varphi) = \frac{C}{r} e^{-ikr}$$

$K(\varphi)$ – коэффициент наклона (м), $K \sim \lambda^{-1}$
 При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $K = 0$

Дифракция сферической волны на экране с отверстием площадью Σ

Конфигурационный интеграл

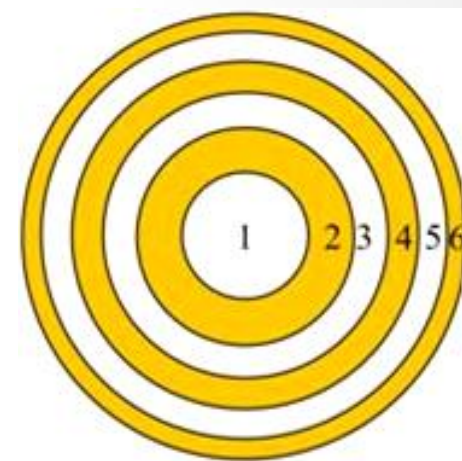
$$A(P) = \iint_{\Sigma} \frac{C}{\rho_1 \rho} \cdot e^{-ik(\rho_1 + \rho)} K(\varphi) d\sigma$$
$$= \frac{C}{r} e^{-ikr}$$



Воспользуемся методом векторных диаграмм

Зоны Френеля

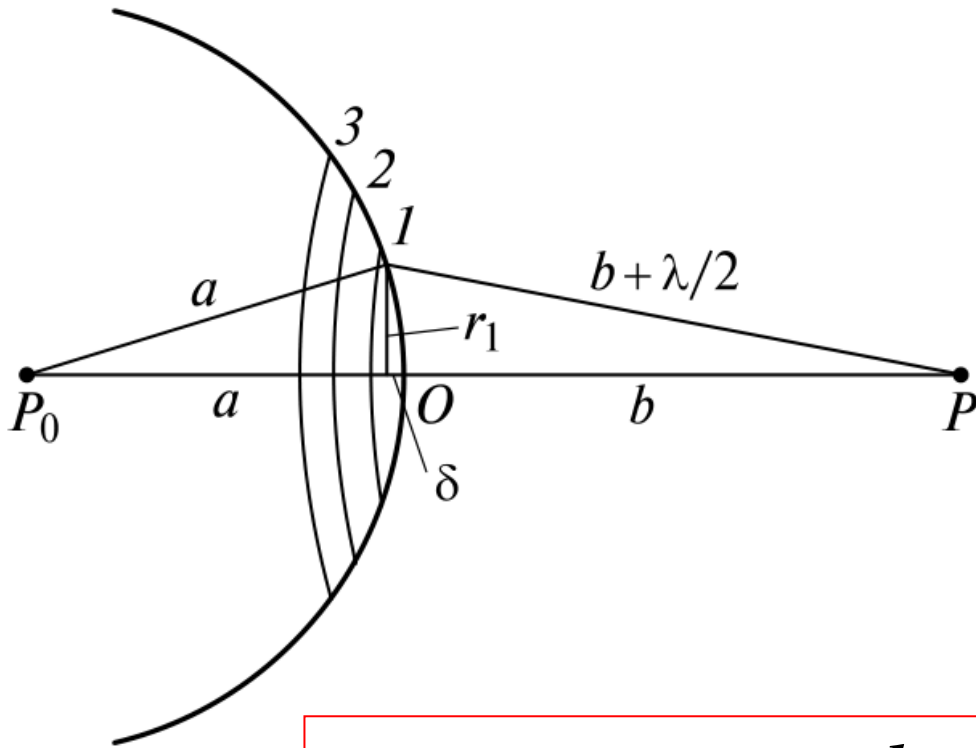
P – центр серии концентрических сфер, радиусы которых начинаются с **b** и увеличиваются на $\lambda/2$.



При пересечении с фронтом Σ сферы образуются **кольцевые области = зоны Френеля с радиусами r_1, r_2, r_3, \dots**

При $\int_{\Sigma} -$ и $ka = const$ произведение kr изменяется на π от центра 1 зоны к ее краю, от 1 к 2 и т.д.

Радиус 1 зоны Френеля



$$a^2 - (a - \delta)^2 = r_1^2$$

$$r_1^2 = \left(b + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + \delta)^2$$

$$b \gg \lambda \Rightarrow \frac{\lambda^2}{4} \ll \lambda b$$

$$\sigma_1 = \pi r_1^2 = \frac{\pi ab}{(a+b)} \lambda$$

площадь 1 зоны Френеля

$$r_1 = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)} \lambda}$$

радиус 1 зоны Френеля

Внешний радиус m зоны Френеля

$$r_1 = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)} m \lambda}$$

$$\sigma_m = \pi (r_m^2 - r_{m-1}^2) = \pi r_1^2 = \sigma_1$$

Радиусы зон увеличиваются $\sim \sqrt{m}$, а **площади всех зон** одинаковы и не зависят от номера. Следовательно, различие вкладов зон в дифракционный интеграл обусловлено только

- Разными расстояниями $\rho_m = b + m \frac{\lambda}{2}$
- Углами наклона φ_m

Векторная диаграмма

В качестве элемента поверхности берем узкие кольца $d\sigma$, концентричные зонам Френеля

- Для простоты примем за начало отсчета фазы $\psi_0 = ka = 0$
- Предположим, что $b = m\lambda$, поэтому колебания поля на сферической поверхности и в Р происходят в фазе

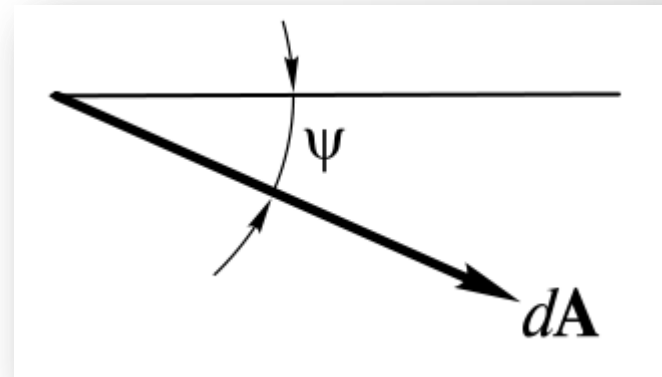
Вклад 1 зоны:

$$\vec{A}_1 = \int_{\sigma_1} d\vec{A}$$

$$\vec{A} = \int_{\Sigma} d\vec{A}$$

$$dA = \frac{C}{a\rho} K(\varphi) d\sigma$$

$$\psi = k(a + \rho)$$



Примем начало отсчета $\psi_0 = ka = 0$.

Вклад 1-ой зоны

$$\vec{A}_1 = \int_{\sigma_1} d\vec{A}$$

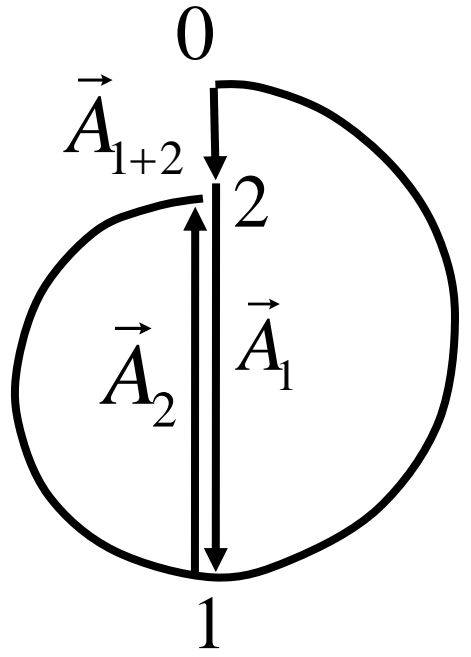
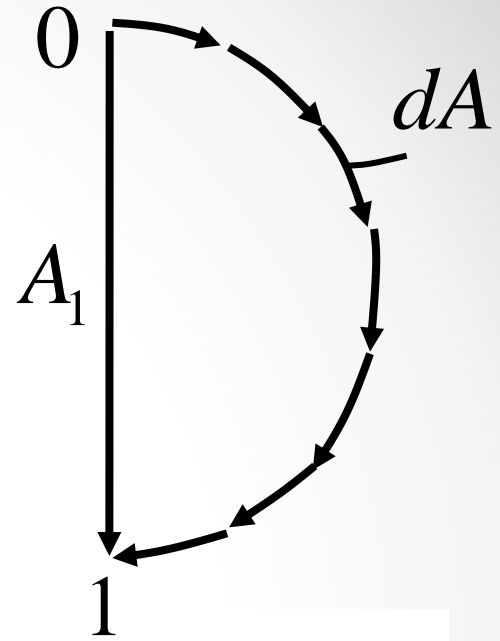
Вклад первых двух зон

$$\vec{A}_{1+2} = A_1 + A_2 = \int_{\sigma_1} d\vec{A} + \int_{\sigma_2} d\vec{A}$$

Вклад 2-ой меньше по величине $A_1 > A_2$

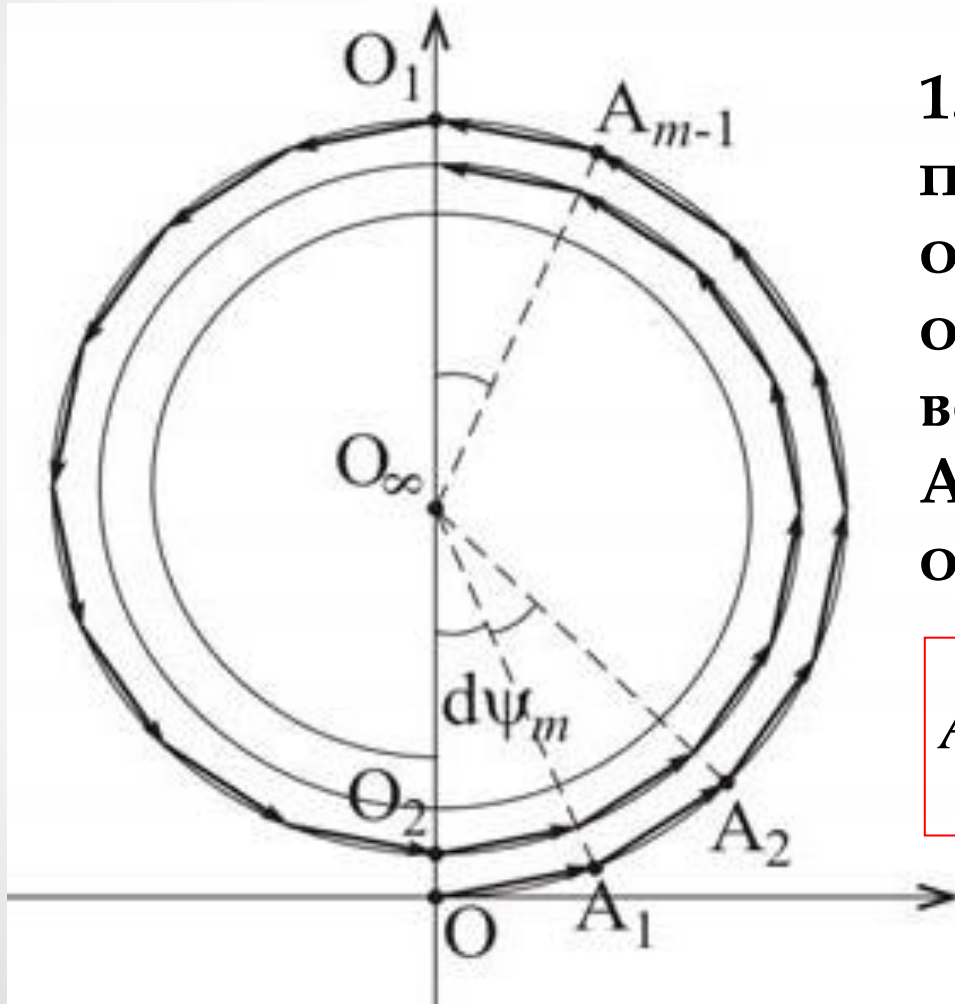
Увеличились угол φ и расстояние ρ

и сдвинут по фазе на π



Спираль Френеля

замечания

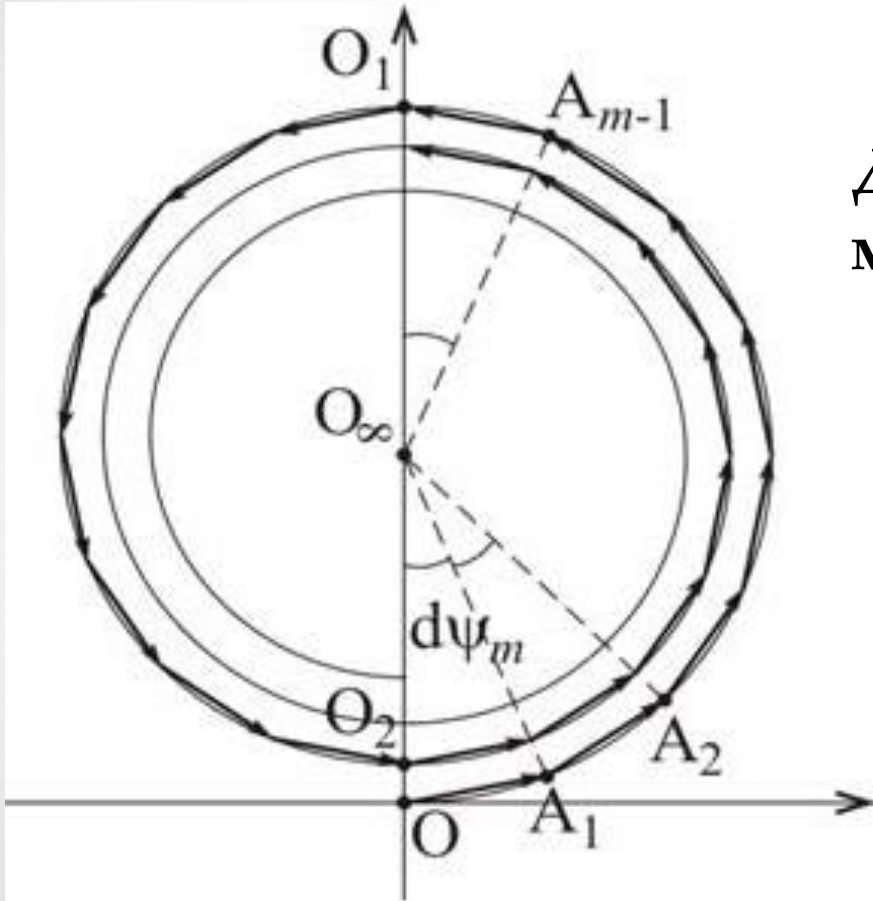


1. Векторная диаграмма позволяет лишь в относительных единицах определять амплитуду возмущения в P . Абсолютная величина определяется из

$$A(P) = \iint_{\Sigma} \frac{C}{\rho_1 \rho} \cdot e^{-ik(\rho_1 + \rho)} K(\varphi) d\sigma$$

$$A(P) = \frac{C}{a + b}$$

Вектор OO_∞ соответствует случаю, когда для точки P открыты все зоны Френеля.



Длина вектора OO_∞ в два раза меньше длины вектора OO_1 .

Следовательно, если для точки P открыта только первая зона Френеля, то амплитуда электрического поля в точке P в два раза больше, чем в отсутствие препятствия, а интенсивность – в четыре.

2. Диаграмма неверно определяет фазу возмущения в Р. Эта фаза должна совпадать с фазой колебаний на сферической поверхности $\psi_0 = ka = 0$

Чтобы устранить отставание вектора А по фазе на $\pi/2$, вторичные источники наделяются фазовым сдвигом «вперед» на $(+\pi/2)$ введением в дифракционный интеграл множителя $e^{i\pi/2}$.

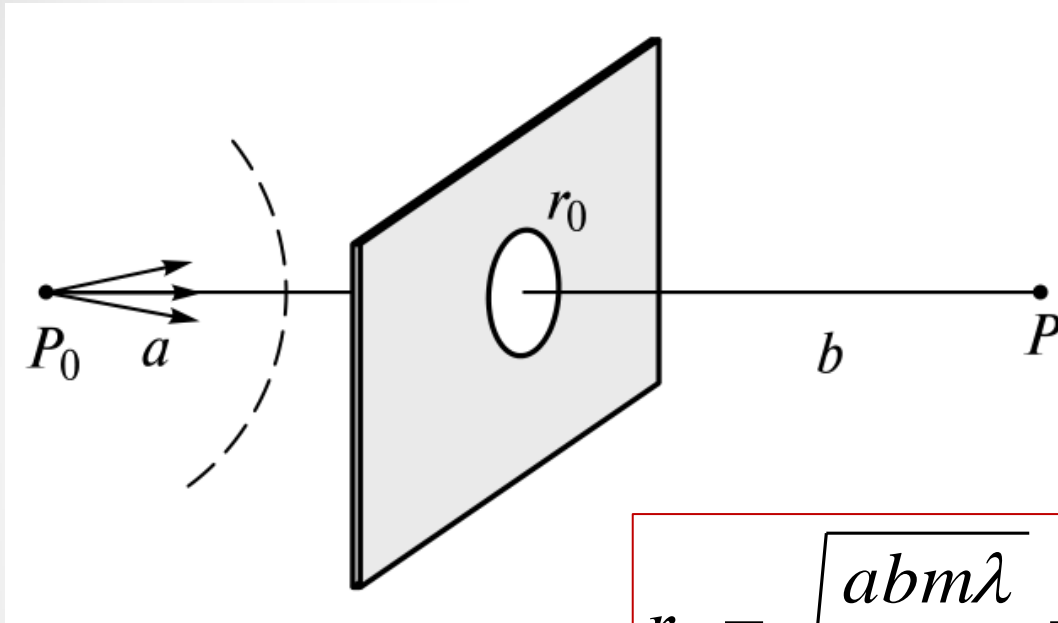
Этот множитель присоединяют к коэффициенту наклона, теперь он становится комплексным

$$K(\varphi) = \frac{i}{\lambda} f(\varphi)$$

Для решения задачи остается определить вид функции f. Но это возможно сделать лишь в теории дифракции, основанной на решении уравнений Максвелла. Пока рассмотрим простейшие дифракционные задачи

Дифракция на круглом отверстии

Амплитуда в P на оси отверстия зависит от числа открытых зон.



При фиксированном положении источника число открытых зон изменяется с расстоянием.

$$r_m = \sqrt{\frac{abm\lambda}{a+b}} = r_0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

При перемещении P вдоль оси амплитуда возмущения будет периодически изменяться, достигая максимума при нечетном m и минимума - при четном m .

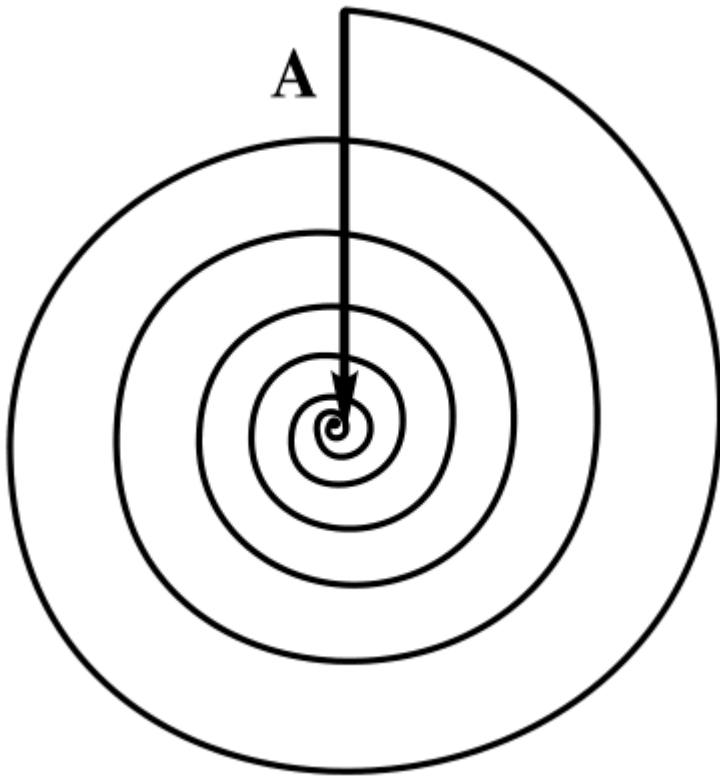
Абсолютный максимум наблюдается на b , когда $m = 1$

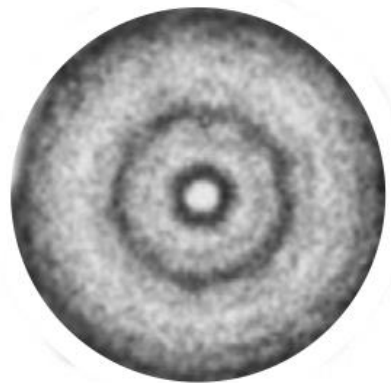
**Здесь амплитуда
электрического поля в
точке Р в два раза больше,
чем в отсутствие экрана, а
интенсивность – в четыре.**

$$A_{\max} = A_1 = 2A = 2 \frac{C}{a+b}$$

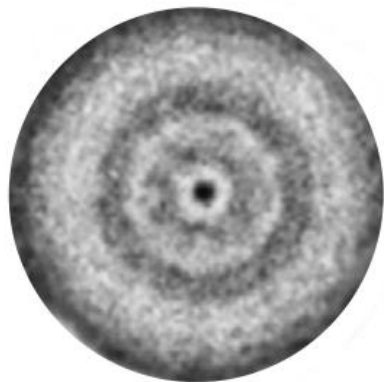
**Можно считать, что экран
подобен линзе. Он
формирует изображение
источника в Р ($m = 1$)**

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\lambda}{r_0^2}$$

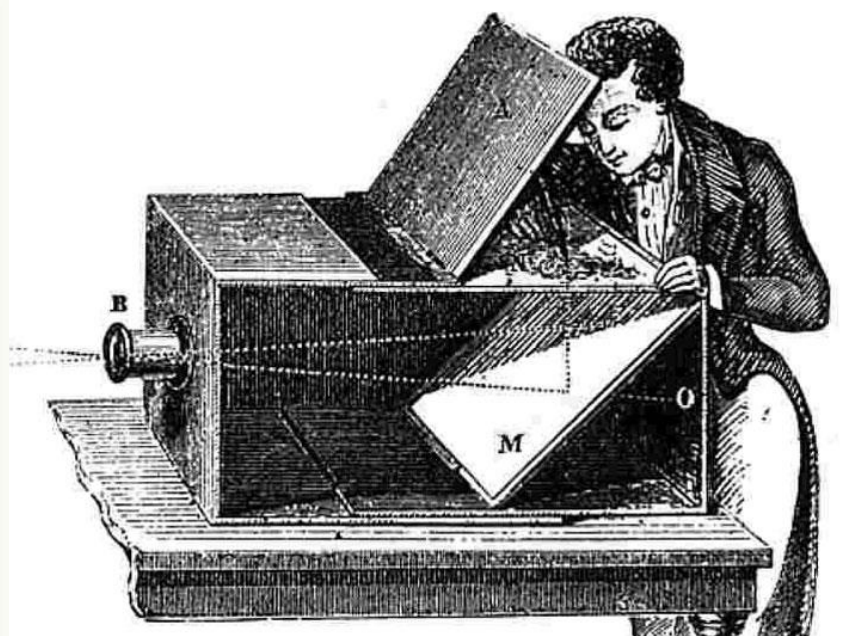
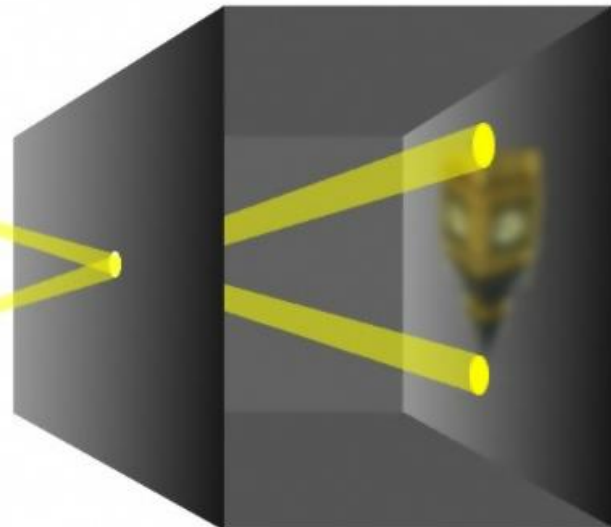




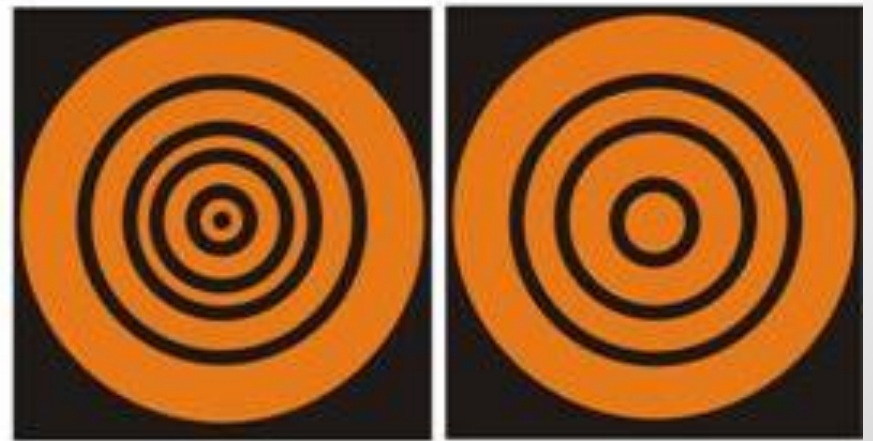
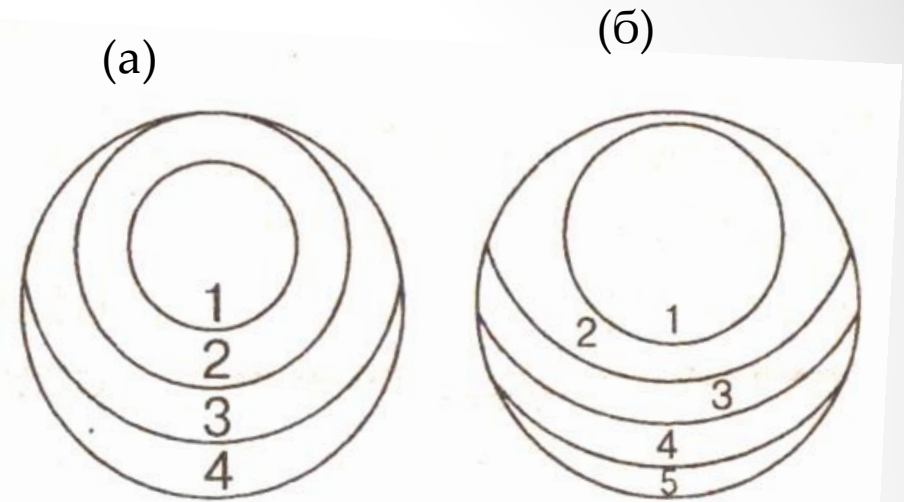
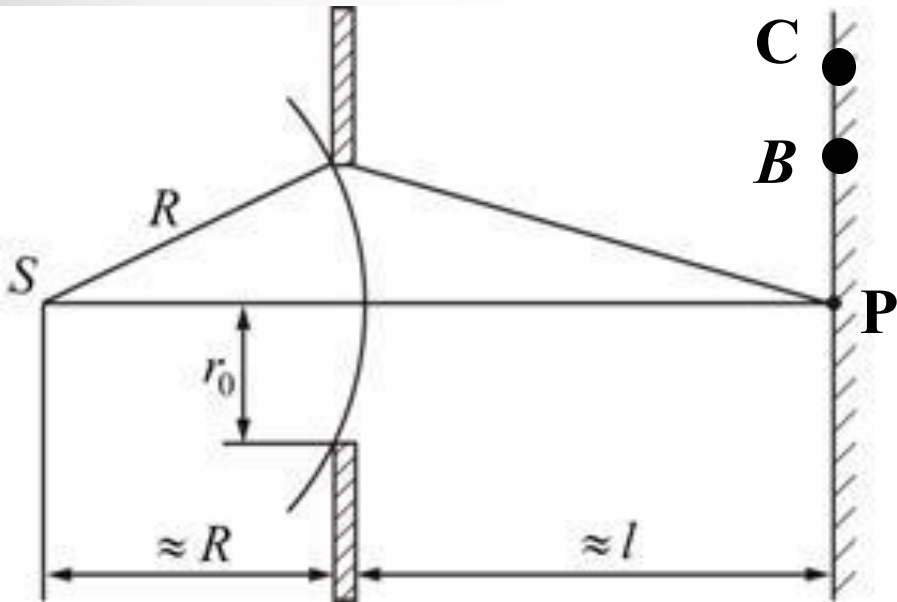
a



б



Рассмотрим световое действие в точках приемного экрана, смещенных относительно центра М

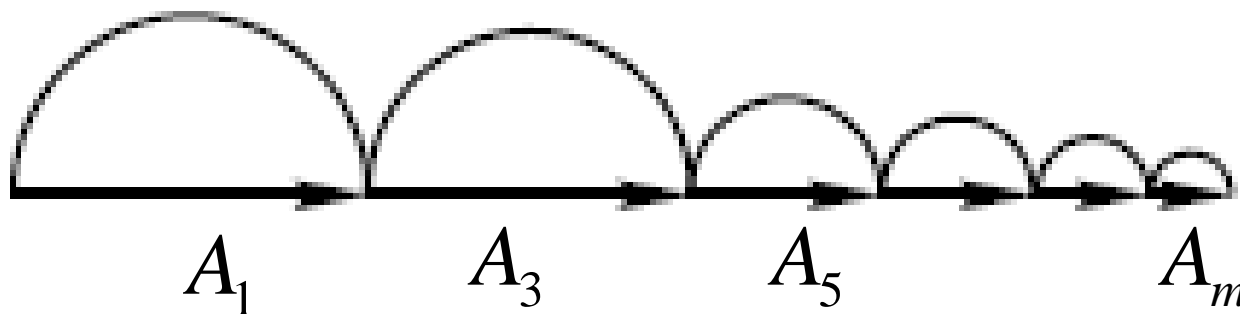
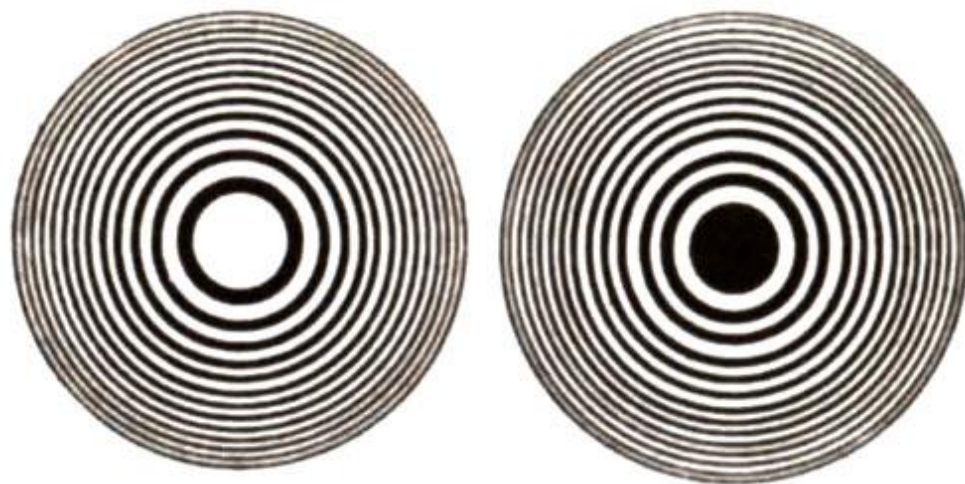


Зонная пластинка

Если на стеклянную пластинку нанести концентрические темные кольца, закрывающие либо только четные, либо только нечетные зоны Френеля, получится зонная пластинка.

Амплитуда возмущения
будет значительно
больше, чем

$$A(P) = \frac{C}{a+b}$$



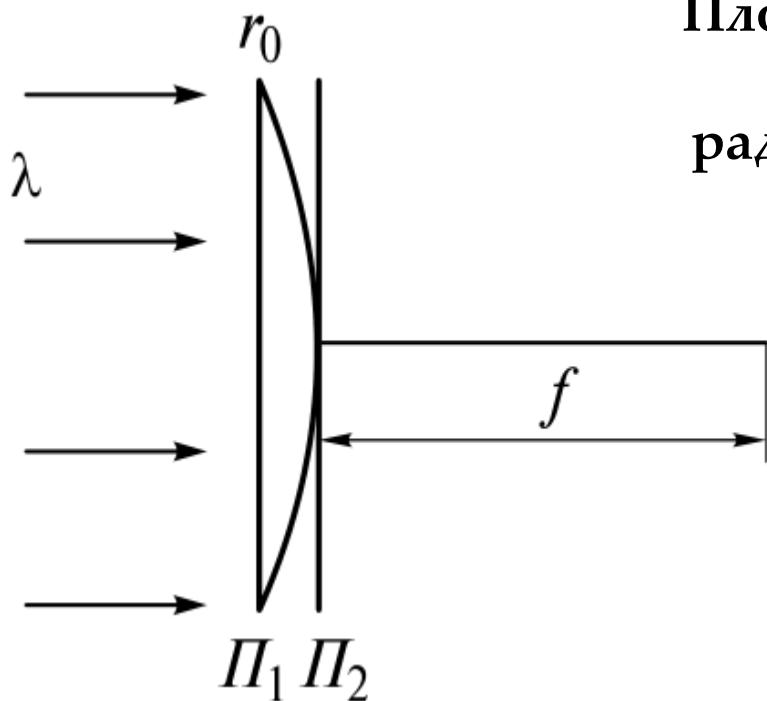
Линза

Плоская волна ($a \rightarrow \infty$) падает на тонкую собирающую линзу с поперечным радиусом r_0 и фокусным расстоянием f .

$$\text{Амплитуда волны } A_0 = \frac{c}{a}$$

Если точка P находится в фокусе, то число открытых зон

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda f}$$



В отличие от зонной пластинки линза вносит существенную коррекцию в фазовые соотношения. Из-за разности путей между плоскостями Π_1 и Π_2 набег фазы у периферии будет меньше, чем на оси. Это отставание нарастает при удалении от оси пучка

Если выпуклая поверхность линзы параболическая, все dA будут иметь одинаковое направление = векторная диаграмма получается вытягиванием m полуколец спирали:

$$A_F = \frac{\pi}{2} (A_1 + A_2 + \dots + A_m)$$

$\pi/2$ как раз равен отношению длины половины витка к его диаметру

При небольшом числе витков: $A_1 + A_2 + \dots + A_m = mA_1$

И принимая: $A_1 = 2A_0$

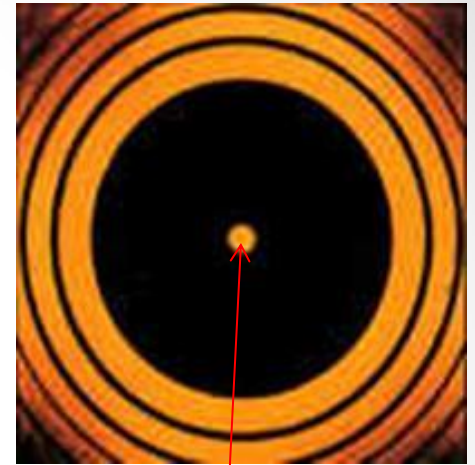
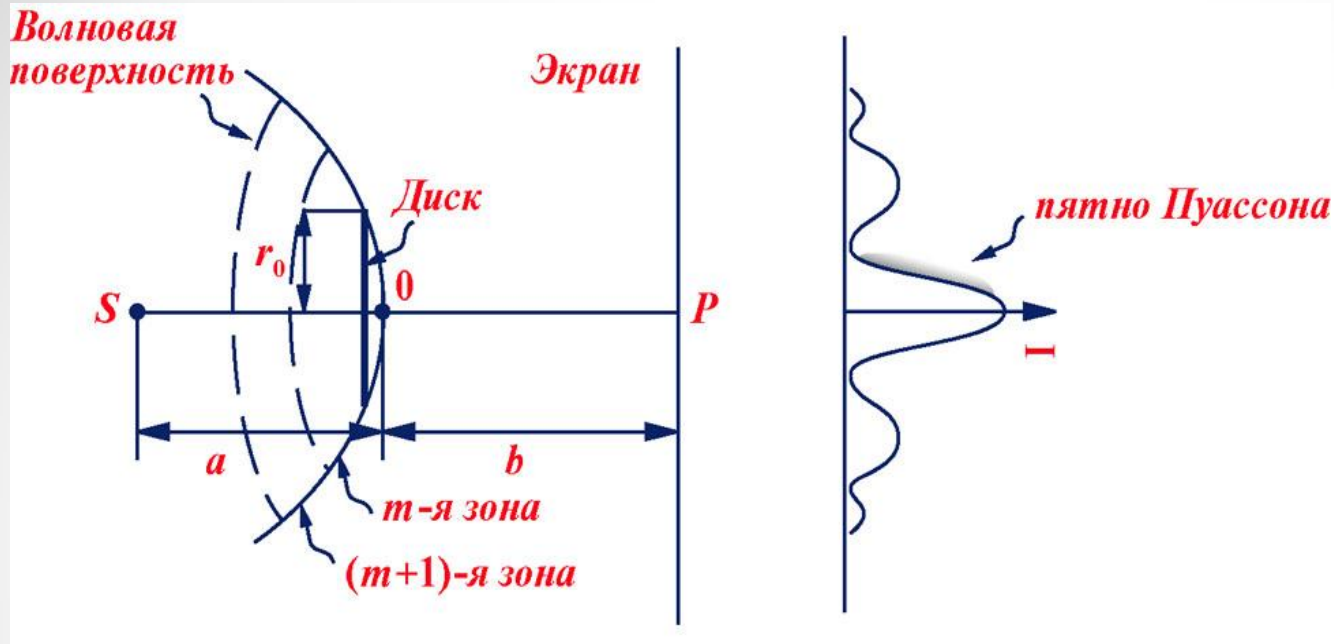
Оценим радиус фокального пятна. Из условия сохранения мощности пучка:

$$A_0^2 \pi r_0^2 = A_F^2 \pi r_F^2$$

$$r_F = \frac{\lambda f}{\pi r_0}$$

$$A_F = A_0 \frac{\pi r_0^2}{\lambda f}$$

Дифракция на непрозрачном диске



«Пятно Пуассона»

$$z \ll L_0 = \frac{r_0^2}{\lambda} \text{ и } I=0$$

$$z > L_0 \text{ и } I \approx I_0$$

$$A = A_m - A_{m+1} + A_{m+2} - \dots = \frac{A_m}{2} + \left(\frac{A_m}{2} - A_{m+1} + \frac{A_{m+2}}{2} \right) + \dots$$

$$A = \frac{A_m}{2}$$

Эффект пятна Пуассона может проявляться не только в оптике, но и в акустике.

Пример: создание акустических миражей.

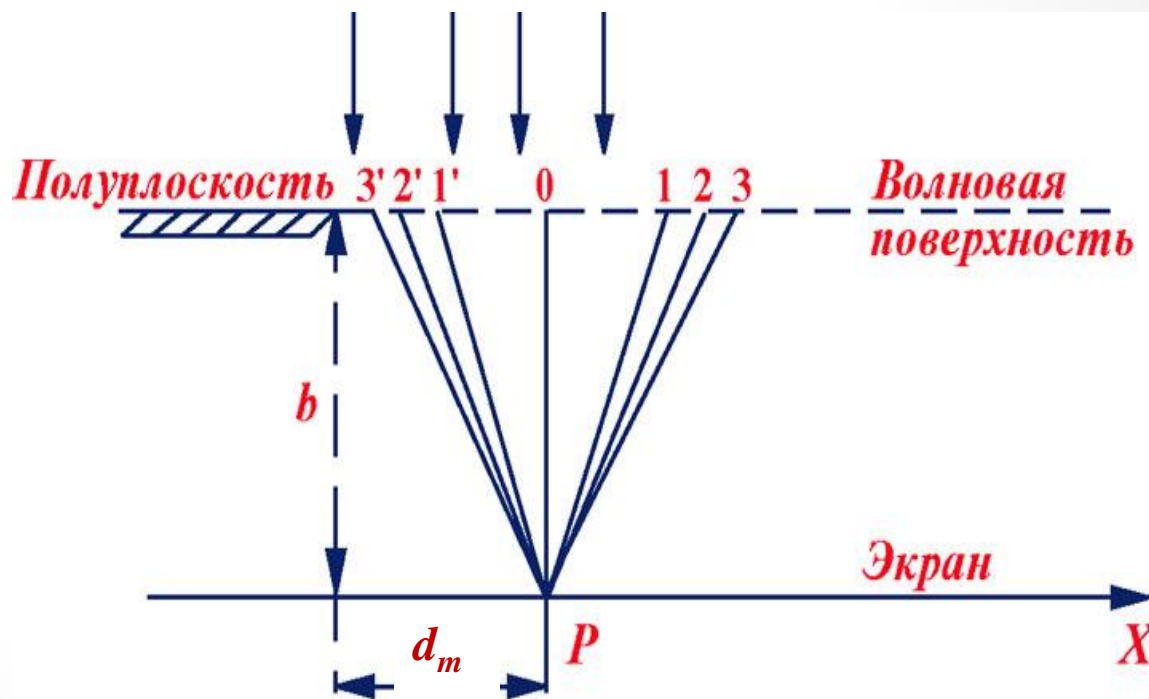
Суть эффекта в том, что для частот звука $\sim 1-4$ кГц длина волны сравнима с размерами головы человека. Поэтому возможно создание ситуации, когда источник находится с одной стороны головы, а максимум интенсивности вследствие эффекта пятна Пуассона возникает возле другой стороны. Поэтому человеку кажется, что звук идёт не с той стороны — возникает мираж. Для наблюдения эффекта нужны специальные условия, и в реальной жизни он наблюдается редко.

Зоны Шустера и спираль Корню

Для решения дифракции на прямоугольной щели или на прямолинейном крае экрана удобно разбивать волновой фронт на **полосатые зоны - зоны Шустера**

Разобьем фронт плоской волны АВ на полосатые зоны: построим цилиндрические коаксиальные поверхности

$$r_m = b + m \frac{\lambda}{2}$$



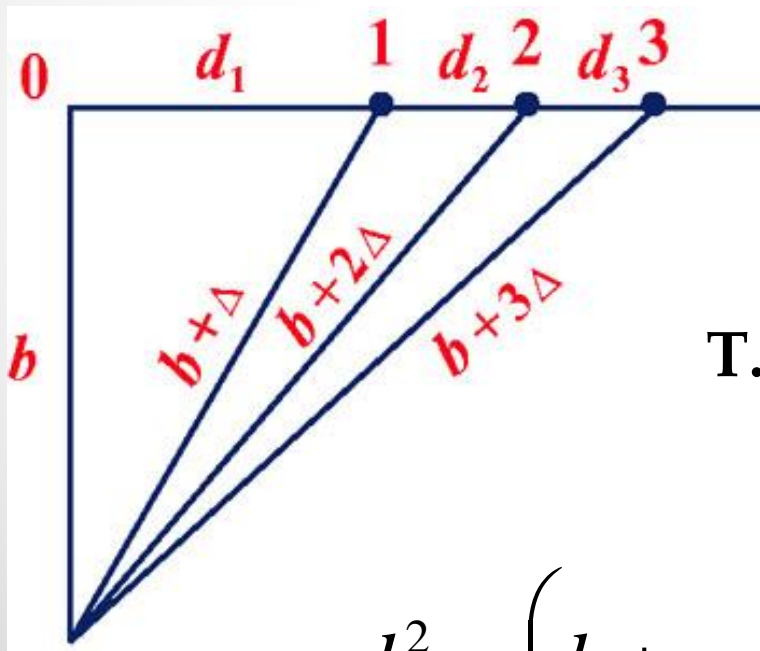
Разбиение на зоны: последовательное добавление половины длины волны к расстоянию b от точки наблюдения P до границы полуплоскости.



Ось цилиндров проходит через точку наблюдения P перпендикулярно плоскости. В результате волновой фронт разобьется на прямоугольные зоны Шустера. Ось, проходящая через O , делит центральную зону на две части. Зоны, выше O имеют номера $1, 2, 3 \dots$, а ниже $1', 2', 3' \dots$.

Поперечный размер зон быстро убывает, поэтому амплитуды вторичных волн от зон Шустера убывают быстрее, чем в случае круглого отверстия, при этом спираль Френеля на трансформируется в спираль Корню с двумя фокусами.

Зоны Шустера: $\Delta = \lambda / 2$. $r_m = b + m \frac{\lambda}{2}, (m = 1, 2, 3, \dots)$



Ширина полосатых зон монотонно убывает и в пределе при $r \rightarrow \infty$ стремиться к $\lambda/2$.

Т.к. $\lambda \ll b$, то квадрат расстояния до дальней границы зоны Шустера с номером m

$$d_m^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2} \right)^2 - b^2 = b m \lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4} \cong b m \lambda$$

Суммарная ширина первых N зон:

$$d_1 + d_2 + \dots + d_N = \sqrt{\left(b + N \frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2} \cong \sqrt{bN\lambda} = d_1 \sqrt{N}$$

Отсюда ширины последовательных зон Шустера

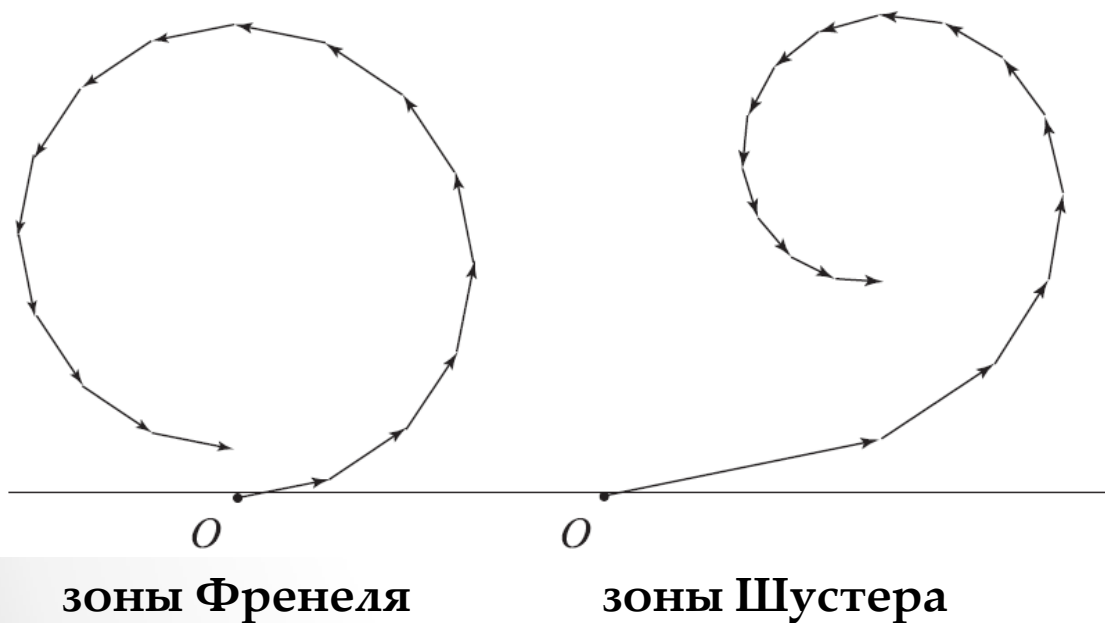
$$h_1 = \sqrt{b\lambda}, \quad h_2 = (\sqrt{2} - 1)h_1, \quad h_3 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})h_1, \dots$$

Т.е. ширина зоны Шустера (и площадь) сначала значительно убывают, а потом монотонно

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)} = 2.41, \quad \frac{h_2}{h_3} = \frac{(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = 1.3,$$
$$\frac{h_3}{h_4} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{4} - \sqrt{3})} = 1.19, \quad \frac{h_4}{h_5} = \frac{(\sqrt{4} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{4})} = 1.135, \dots$$

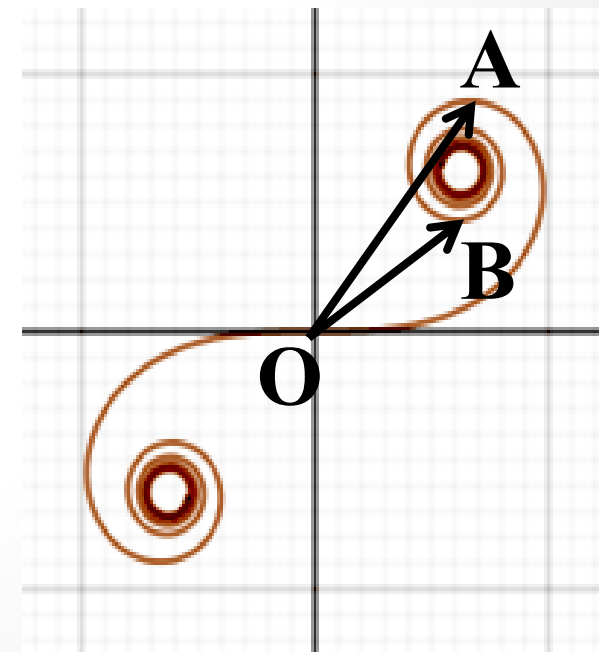
$$h_1 : h_2 : h_3 : h_4 : \dots = 1 : 0.41 : 0.32 : 0.27 : 0.24 \dots$$

Т.е. амплитуда вторичной световой волны, излучаемой зонами Шустера, сперва убывает очень быстро, а затем достаточно медленно. Таким образом, вклад в результирующее поле $E(P)$ определяется действием нескольких первых десятков зон.



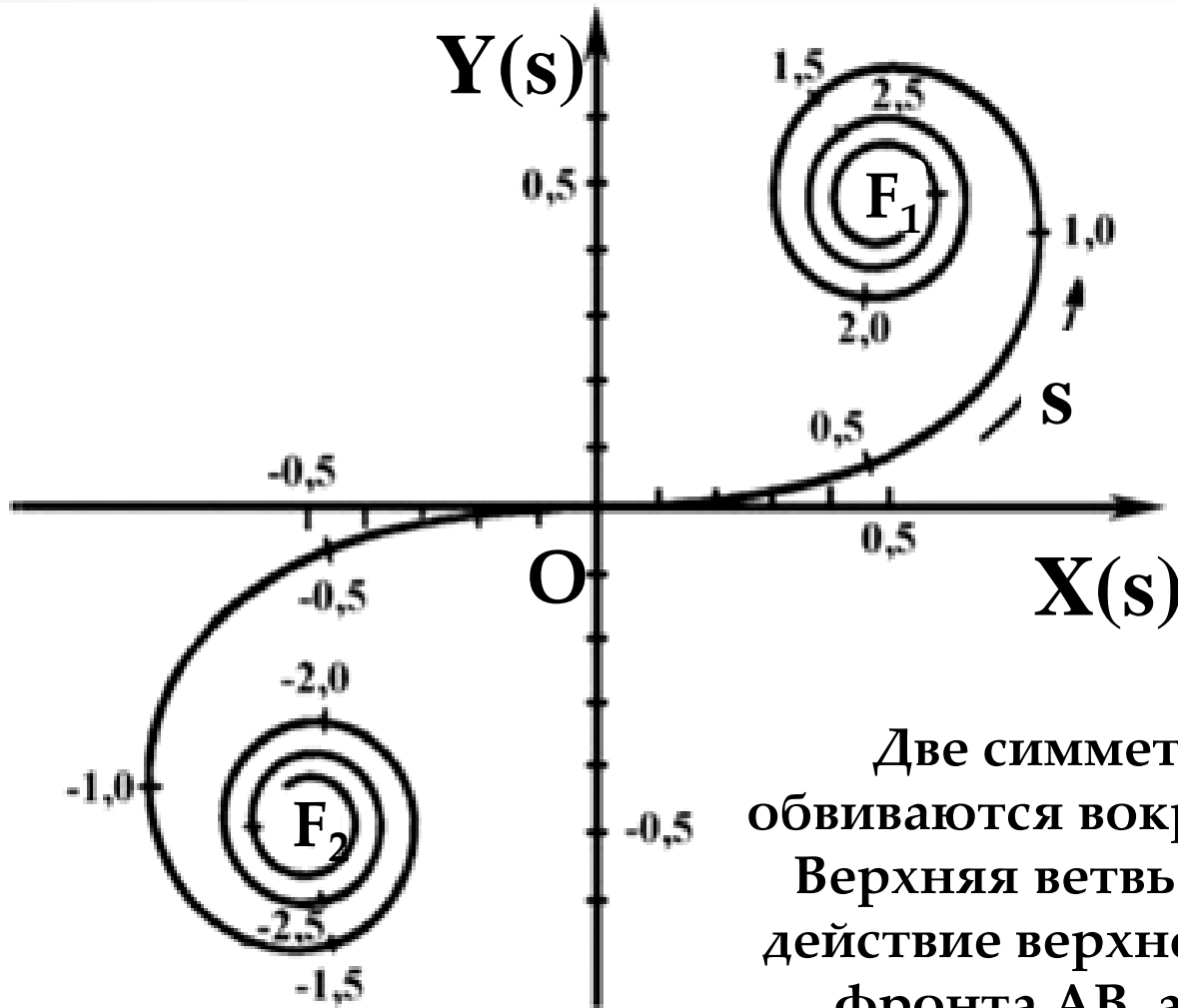
Колебание, возбуждаемое в точке Р верхней частью первой зоны Шустера, соответствует вектору OA , первой и второй – вектору OB .

Отставание по фазе каждого следующего колебания в обоих случаях равно $\alpha = \pi/n$, где $n = 8$ – количество подзон



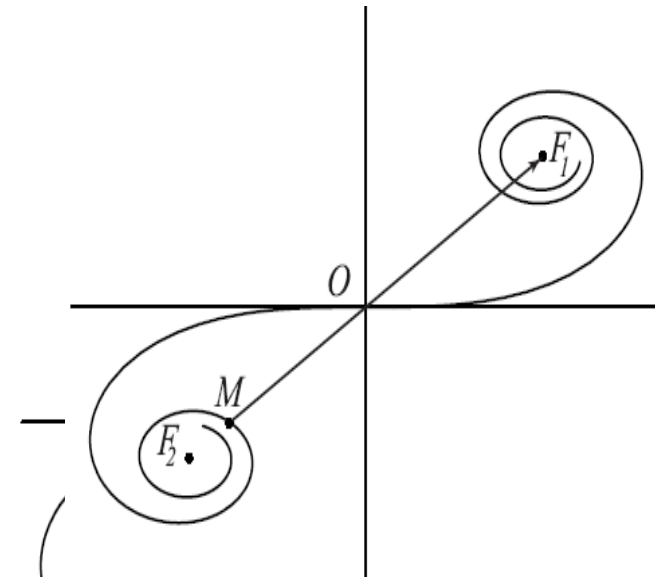
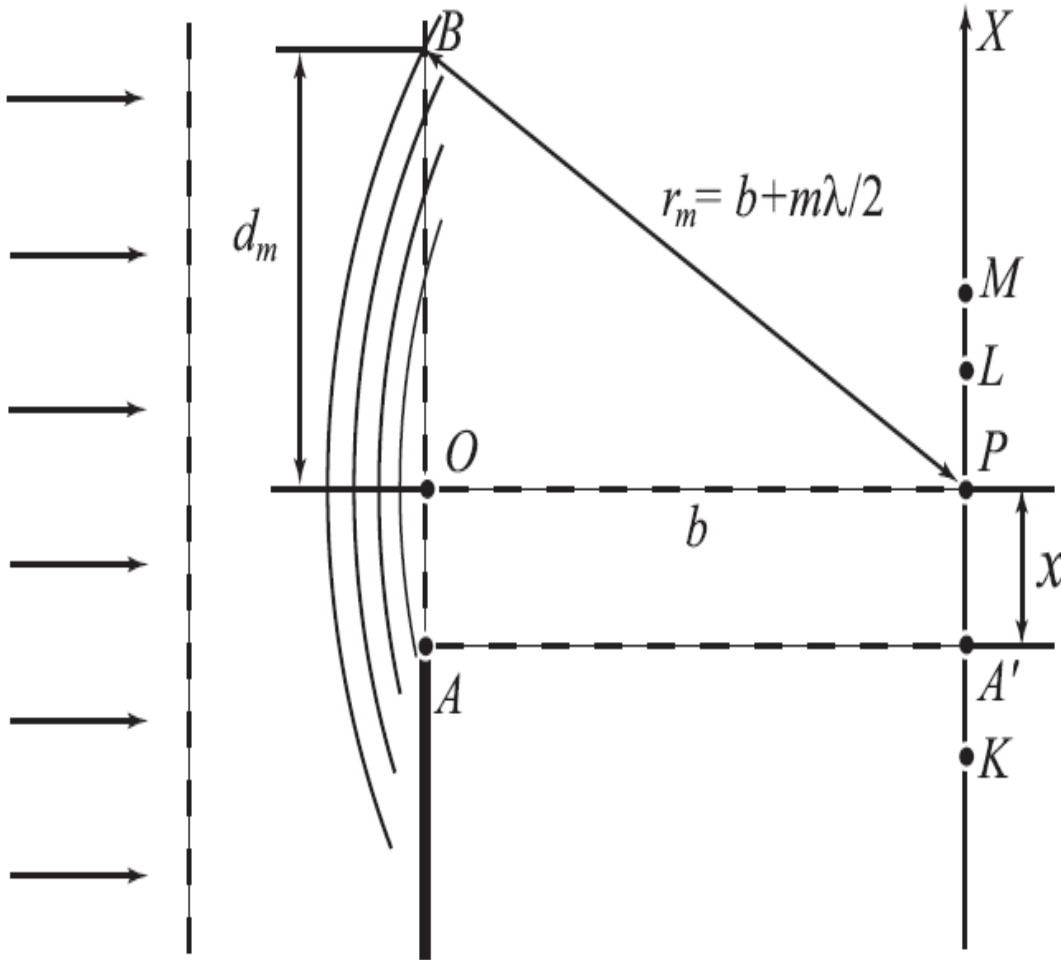
Спираль Корню (клотоида)

Колебание
возбуждаемое всем
волновым фронтом
соответствует вектору
 F_2F_1 .



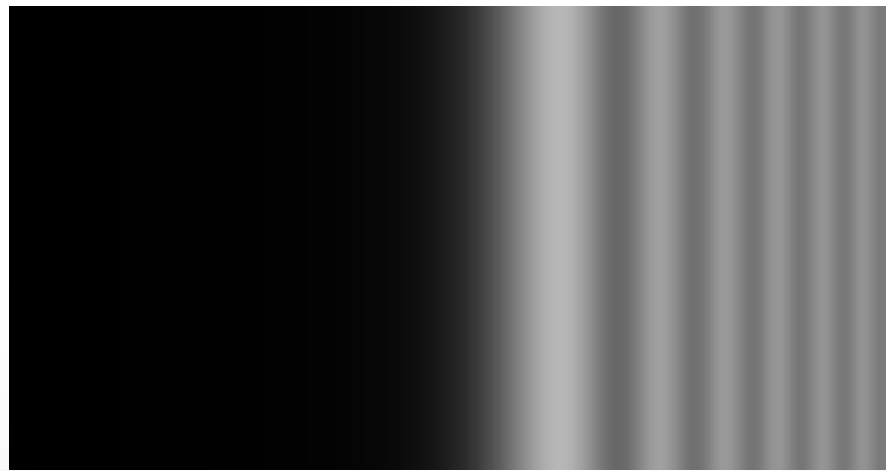
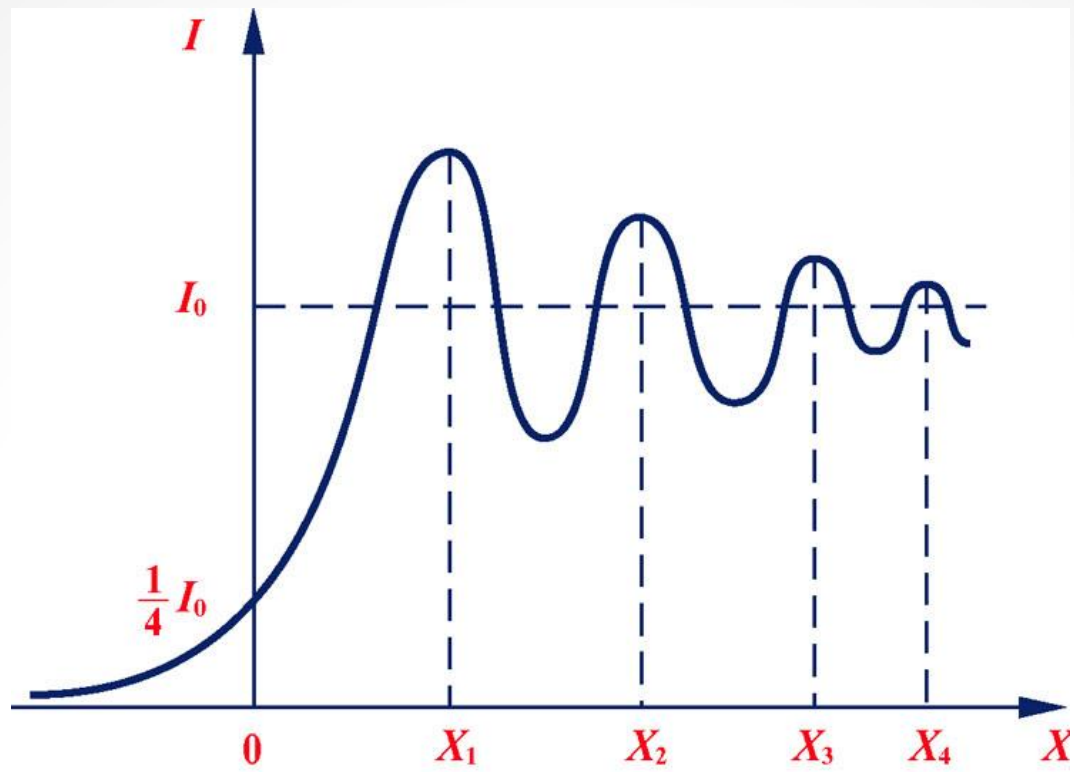
Две симметричные ветви, которые обвиваются вокруг двух фокусов F_1 и F_2 . Верхняя ветвь спирали (участок OF_1) - действие верхней половины волнового фронта АВ, а нижняя ветвь (участок F_2O) - нижней.

Дифракция на прямолинейном крае



Амплитуда нарастает, достигая своего первого максимума в точке L и первого минимума в точке M . При дальнейшем движении к фокусу F_2 амплитуда колебаний будет проходить максимумы и минимумы. На большом расстоянии от края геометрической тени волновая поверхность будет полностью открытой $A \sim F_1 F_2$ и точно в 2 раза превышает амплитуду на границе геометрической тени $OF_1 = 1/2 F_1 F_2$.

OF_1



Условие наблюдения дифракции

- область геометрической тени, если

$$b \ll \frac{R^2}{\lambda}$$

R - размеры
препятствия

- дифракция Френеля, если $b \cong \frac{R^2}{\lambda}$

- граница области дифракции Фраунгофера

$$b \gg \frac{R^2}{\lambda}$$