Сегодня: воскресенье, 9 июня 2024 г.

Лекция 24. Физика атомного ядра

Теплоемкость Эйнштейна

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

- ✓ **ħω/2 = энергия нулевых колебаний – не вносит вклад в теплоемкость = т.к. не зависит от T**

$$c_{mol} = \frac{\partial U_{mol}}{\partial T}$$

Теория Эйнштейна:

- ✓ **Кристаллическая решетка = N молекул из $3n_aN$ независимых осцилляторов с одинаковой частотой ω**
- ✓ **Внутренняя энергия одного моля $U_{mol} = 3n_aN\langle\varepsilon\rangle$**

$$c_{mol} = 3n_aR\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Высокие Т: *kT >> hv*

$$\boxed{\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}}$$

$$e^{\hbar\omega/kT} - 1 = 1 + \frac{\hbar\omega}{kT} + \ldots - 1 \approx \frac{\hbar\omega}{kT}$$

$$\langle \varepsilon \rangle \cong kT$$

$$U \cong 3n_a N_A \langle \varepsilon \rangle$$

$$c_{mol} \cong 3n_a R$$

Значение соответствует закону Дюлонга и Пти

Низкие T: kT << hv

$$\boxed{\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}}$$

$$e^{h\nu/kT} \gg 1$$

$$\langle \varepsilon \rangle \cong \hbar\omega e^{-\hbar\omega/kT}$$

$$c_{mol} \cong 3n_a R \left(\frac{\hbar\omega}{kT} \right)^2 e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \Bigg|_{T \to 0} \to 0$$

Физический смысл результата:

1. Из-за квантовой дискретности между основным и возбуждёнными уровнями энергии системы осцилляторов существует конечный энергетический зазор hv. Меньшее количество энергии осциллятор принять не в состоянии
2. При T = 0 в системе возбуждений нет – все в основном состоянии
3. При небольшом повышении T тепловой энергии не хватает на преодоление этой щели, только малое количество осцилляторов переходит на й возбужденный уровень = ответственны за малую теплоемкость и поглощение тепловой энергии
4. При высоких T тепловой энергии достаточно для возбуждения многих вышележащих колебательных уровней – дискретность не важна = закон Дюлонга-Пти

теория Дебая

1. **Твердое тело = системы N гармонических осцилляторов**
2. **Осцилляторы взаимодействуют: смещение одного атома из равновесия влечет смещение соседних**
3. **Кристалл = система N упруго связанных атомов с 3N степенями свободы**
4. **Использует классическое распределение Больцмана**
5. **Средняя энергия одного осциллятора**

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

6. **Из-за связи между атомами частоты колебаний неодинаковые. Существует упругая волна: дойдя до границы кристалла отражается**
7. **= при наложении прямой и отраженной образуется стоячая волна = одно нормальное колебание решетки**
8. **Число dN нормальных колебаний в $(\omega, \omega + d\omega)$ велико = $\sum \to \int$**

$$U = \int \langle \varepsilon \rangle dN$$

Число колебаний в единице объема

1. **Рассматриваем кристалл, как ящик с длиной l_x**
2. **Стоячая волна в ящике описывается функцией $sin(kx)$, которая должна обращаться в ноль на границах ящика**

$$\Rightarrow k_x = \frac{\pi n_x}{l_x}$$

n_x - нумерует различные стоячие волны вдоль x

3. **Число колебаний на dk_x**

$$\Rightarrow dn_x = \frac{l_x dk_x}{2\pi}$$

2 = избегаем двойного счета стоячих волн при смене k_x на - k_x

$$dn_y = \frac{l_y dk_y}{2\pi}, \quad dn_z = \frac{l_z dk_z}{2\pi}$$

$$dN = dn_x dn_y dn_z = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k$$

$$V = l_x l_y l_z$$

1. Учтем, что каждой стоячей волне может соответствовать $g = 2s + 1$ поляризаций.

$$dN = \frac{gV}{(2\pi)^3} d^3k$$

2. Для перехода к частотам

$$k = \frac{\omega}{\upsilon}$$

Вывели формулу для прямоугольного объема, но форма не влияет на результат.

$$dk = d\,\frac{\omega}{\upsilon}$$

3. Для применения к звуковым волнам в кристалле учтем, что возможна 1 продольная волна $(\upsilon_{||})$ и две поперечные волны с разными поляризациями $(\upsilon_{\perp})$

$$dN = \frac{gV}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk$$

$$dN = \frac{gV}{2\pi^2\upsilon^3} \omega^2 d\omega$$

$$dN = \frac{2V}{2\pi^2\upsilon_{\perp}^3} \omega^2 d\omega + \frac{V}{2\pi^2\upsilon_{||}^3} \omega^2 d\omega$$

$$dN = \frac{2V}{2\pi^2 \upsilon_\perp^3}\omega^2 d\omega + \frac{V}{2\pi^2 \upsilon_\parallel^3}\omega^2 d\omega = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2}{\upsilon_\perp^3} + \frac{V}{\upsilon_\parallel^3}\right)\omega^2 d\omega$$

$$\boxed{\left\{\frac{3}{\upsilon^2} = \frac{2}{\upsilon_\perp^3} + \frac{V}{\upsilon_\parallel^3}\right\}} = V\frac{3}{2\pi^2\upsilon^3}\omega^2 d\omega$$

Внутренняя энергия

$$U = V\frac{3}{2\pi^2\upsilon^3}\int_0^{\omega_{\max}}\left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}\right)\omega^2 d\omega$$

$\boldsymbol{\omega_{max}}$ **- нормальная частота нормальных колебаний :** $\int_0^{\omega_{\max}} dN = 3N$

$$3\frac{N}{V} = 3n = \frac{3}{2\pi^2\upsilon^3}\int_0^{\omega_{\max}}\omega^2 d\omega = \frac{\omega_{\max}^3}{2\pi^2\upsilon^3}$$

$$\omega_{\max} = \upsilon^3\sqrt{6\pi^2 n}$$

Характеристическая температура Дебая

$$\boxed{T_D = \frac{\hbar\omega_{\max}}{k}}$$

$$\omega_{\max} = \upsilon^3\sqrt{6\pi^2 n}$$

+ учитывая, что для 1 моль кристалла концентрация атомов

$$n = n_a \frac{N_A}{V}$$

$$U = 9n_a N_A \int_0^{\omega_{\max}} \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \right) \frac{\omega^2 d\omega}{\omega_{\max}^2}$$

$$\boxed{c_m = 9n_a R \left(\frac{\hbar\omega_{\max}}{kT} \right)^2 \int_0^{\omega_{\max}} \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)^2} \frac{\omega^4 d\omega}{\omega_{\max}^5}}$$

$$\left\{ x = \frac{\hbar\omega}{kT} \right\}$$

$$\boxed{c_m = 9n_a R\left(\frac{\hbar\omega_{\max}}{kT}\right)^2 \int_0^{\omega_{\max}} \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1\right)^2}\frac{\omega^4 d\omega}{\omega_{\max}^5}}$$

$$\left\{x = \frac{\hbar\omega}{kT}\right\}$$

$$c_m = 9n_a R\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int_0^{T_D/T} \frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2} x^4 dx$$

Теплоемкость кристалла при высоких температурах

При *T*>> *T*$_D$: $$x_{\max} = \frac{\hbar\omega_{\max}}{kT} = \frac{T_D}{T} << 1$$

Тем более: $$x = \frac{\hbar\omega}{kT} << 1$$

$$e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

x² << 1, для теплоемкости единицы объема:

$$C_v = 9nk\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int_0^{x_{\max}} \frac{e^x x^4 dx}{\left[e^x - 1\right]^2} = 9kn\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int_0^{x_{\max}} \frac{(1+x)x^4 dx}{\left[1 + x + \frac{x^2}{2} - 1\right]^2} =$$

$$= 9nk\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int_0^{x_{\max}} \frac{(1+x)x^4 dx}{x^2\left[1 + \frac{x}{2}\right]^2} \cong 9kn\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int_0^{x_{\max}} x^2 dx = 9kn\left(\frac{T}{T_D}\right)^3\left(\frac{x_{\max}^3}{3}\right) = 3nk$$

молярная теплоемкость:

$$\boxed{C_m = CV\frac{1}{\nu} = 3nV\frac{N_A}{N}k = 3R}$$

Закон «кубов» Дебая

При *T*<< *T*$_D$: $$x_{\max} = \frac{\hbar\omega_{\max}}{kT} = \frac{T_D}{T} >> 1$$

Теплоемкость единицы объема:

$$C_\nu = 9nk\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int_0^{x_{\max}} \frac{e^x x^4 dx}{\left[e^x - 1\right]^2} = 9kn\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int_0^{\infty} \frac{e^x x^4 dx}{\left[e^x - 1\right]^2} = 9kn\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 4\frac{\pi^4}{15}$$

для быстро убывающей подынтегральной функции верхний предел ⇒∞, а интеграл интегрированием по частям сводится к табличному:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4 d\left(e^x - 1\right)}{\left[e^x - 1\right]^2} = -\int_0^{\infty} x^4 d\left(\frac{1}{e^x - 1}\right) = \underbrace{-\frac{x^4}{e^x - 1}\bigg|_0^{\infty}}_{=0-0} + 4\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 4\frac{\pi}{15}$$

молярная теплоемкость:

$$\boxed{C_\nu = CV\frac{1}{\nu} = 9nV\frac{N_A}{N}k = 9R\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 4\frac{\pi^4}{15} = \frac{12\pi^4}{5}R\left(\frac{T}{T_D}\right)^3}$$

Состав атомного ядра

Ядра состоят из нуклонов: протоны и нейтроны

$${}^{A}_{Z}X$$

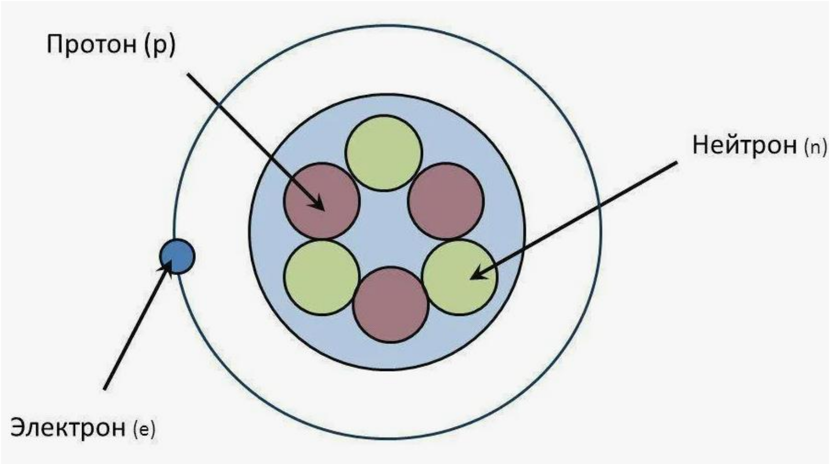
$$X = \{Na, C, O, Al \ldots\}$$

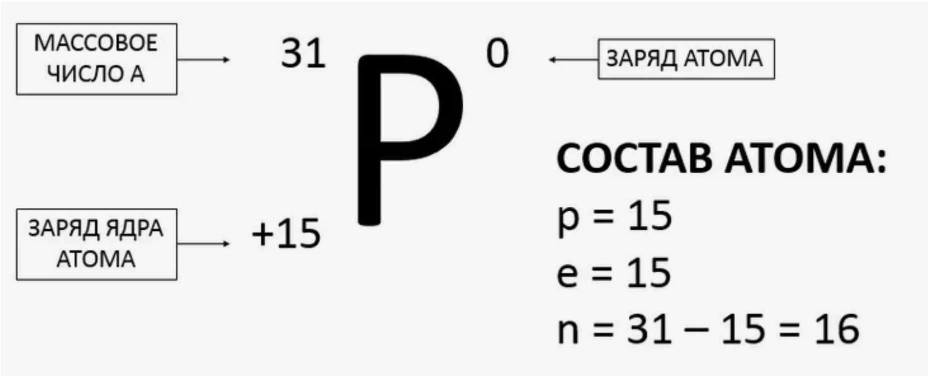
$$A = \underbrace{N_p + N_n}_{\text{массовое число}}$$

$$Z = \quad +eZ \quad , N = \quad A - Z$$

число протонов в ядре

число нейтронов в ядре





Протон

Основные характеристики	Обозначение	Численное значение
заряд	+e	$1{,}67\cdot10^{-19}$ Кл
масса	$m_p = 1836\ m_e$	$1{,}67\cdot10^{-27}$ кг
спин	s	1/2
Собственный магнитный момент	$\mu_p = +2{,}79\mu_N$ $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$ - ядерный магнетон	$5{,}05\cdot10^{-27}$ Дж/Тл
Размеры	r_p	$1{,}3\cdot10^{-15}$ м

Нейтрон

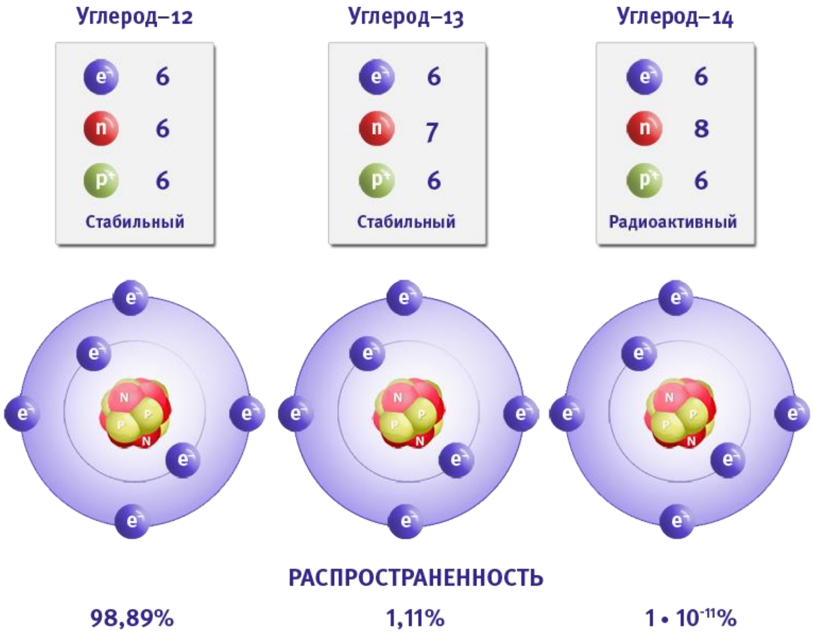
Основные характеристики	Обозначение	Численное значение
заряд	e	0
масса	m_n $\delta m = m_n - m_p = 2,5m_e$	$1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
спин	s	1/2
Собственный магнитный момент	$\mu_n = -1,91\mu_N = -\frac{2}{3}\mu_p$	$3,36 \cdot 10^{-27}$ Дж/Тл
В свободном состоянии неустойчив: распадается на p + e^- + $\widetilde{v}_e$		

Изотопы

Ядра с одинаковым числом протонов Z, но с разным числом нейтронов N, т.е. С разными массовыми числами A

Ядра с одинаковым массовым числом A называются изобарами

$$^{40}_{18}Ar \qquad ^{40}_{20}Ca$$



Ядра с одинаковым числом нейтронов N = A – Z называются изотонами

$$^{13}_{6}C \qquad ^{14}_{7}N$$

Физическая природа ядерных сил

1. Устойчивость ядер = интенсивное взаимодействие между нуклонами (притяжение) на $r = 10^{-15}$ м
2. Ядерное взаимодействие между нуклонами = **сильное взаимодействие**

$\Rightarrow$ плотность ядерного вещества = const,

$\Rightarrow$ объем ядра пропорционален числу образующих его нуклонов

Свойства сильного взаимодействия

1. Ядерные силы короткодействующие, при $r < 10^{-15}$ м возникает сильное кулоновское отталкивание
2. Зарядово независимы: взаимодействия пар p-p, n-n, n-p – одинаковы по интенсивности
3. Не являются центральными
4. Зависят от взаимной ориентации спинов нуклонов

Пример: дейтрон образуется только если спины n и p параллельны (s = 1)

5. Свойственно насыщение: каждый нуклон взаимодействует с определенным числом нуклонов

Носители взаимодействия

Кванты поля – между частицами = не могут наблюдаться: либо поглощаются этой же частицей, либо другой, взаимодействующей с первой

1. **Фотоны = переносчики ЭМ взаимодействия**
2. **Мезоны = кванты поля ядерных сил**

$$p \rightleftarrows n + \pi^+$$
$$p \rightleftarrows p + \pi^0$$
$$n \rightleftarrows p + \pi^-$$
$$n \rightleftarrows n + \pi^0$$

Масса и дефект массы

Можно ли посчитать массу ядра по его составу?

$${}_1^2H - \textit{дейтрон}$$

$$m_p + m_n = 938,27 + 939,56 = 1877,83\ \text{МэВ/с}^2$$

Дефект массы = проявление формулы

$$m_д^{эксп} = 1875,63\ \text{МэВ/с}^2$$

$$\boldsymbol{E = mc^2}$$

$$\Delta m = 2,22\ \text{МэВ/с}^2$$

При соединении протона и нейтрона в дейтрон выделилась энергия $\mathrm{E_{св}} = \mathbf{2,22}\ \text{МэВ/с}^{\mathbf{2}}$ энергия, которую нужно затратить, чтобы разделить на свободные протон и нейтрон

$$\boxed{\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M}$$

$$\boxed{\begin{gathered} E_{св} = c^2 \Delta m = \\ = \left[Zm_p + (A - Z)m_n - M \right] c^2 \end{gathered}}$$

Энергия связи = работа, которую необходимо совершить, чтобы удалить нуклоны друг от друга на расстояние, превышающее радиус действия ядерных сил

Модели атомного ядра

1. Модель жидкой капли
(Г.А. Гамов, Н.Бор, Я. Френкель)

Атомы в веществе плотно упакованы так, что

$$\boldsymbol{\rho}_{\text{вещества}} = \boldsymbol{\rho}_{\text{атомов}}$$

$\Rightarrow$ нуклоны плотно упакованы в ядрах

$$\rho_{ям} = \frac{m_p}{4\pi r_p^3 / 3}$$

2. Оболочечная модель
(Мария Гапперт-Майер, Г. Иенсен)

Каждый нуклон движется в общем ядерном потенциале, создаваемом всеми нуклонами ядра = аппроксимируется 3мерным осциллятором

Уровни энергии = сумма энергий трех независимых 1мерных осцилляторов

$$U(r) = -V_0 + \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

$$E = -V_0 + \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right)$$

Радиоактивность и ядерные реакции

Радиоактивность = самопроизвольное превращение одних ядер в другие, сопровождающееся испусканием элементарных частиц
Естественная радиоактивность открыта А. Беккерелем в 1896г.

- ✓ α-распад: $${}_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_{2}^{4}He$$
- ✓ β-распад (включает захват электронов) $${}_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z+1}^{A}Y + {}_{-1}^{0}e + \tilde{\nu}_e$$ $${}_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z-1}^{A}Y + {}_{+1}^{0}e + \nu_e$$ $${}_{Z}^{A}X + {}_{-1}^{0}e \rightarrow {}_{Z-1}^{A}Y + \nu_e$$
- ✓ γ - излучение ядер
- ✓ Спонтанное деление тяжелых ядер
- ✓ Протонная радиоктивность

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad \tau = \frac{1}{\lambda}}$$

Закон радиоактивного распада

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

Период полураспада = время, в течение которого распадается половина первоначального количества ядер

Элементы дозиметрии

Активность радиоактивного источника = **число распадов в единицу времени**

$$\boxed{a = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N (\text{беккерель}=\text{Бк})}$$

Поглощенная доза излучения = **энергия, поглощенная единицей массы облучаемого объекта (грей, Гй)**

$$\boxed{D = \frac{E}{m}}$$

Эквивалентная доза излучения = **зависимость от поглощенной дозы и качества излучения (зиверт, Зв, бэр)**

$$\boxed{D_{экв} = D \cdot Q}$$