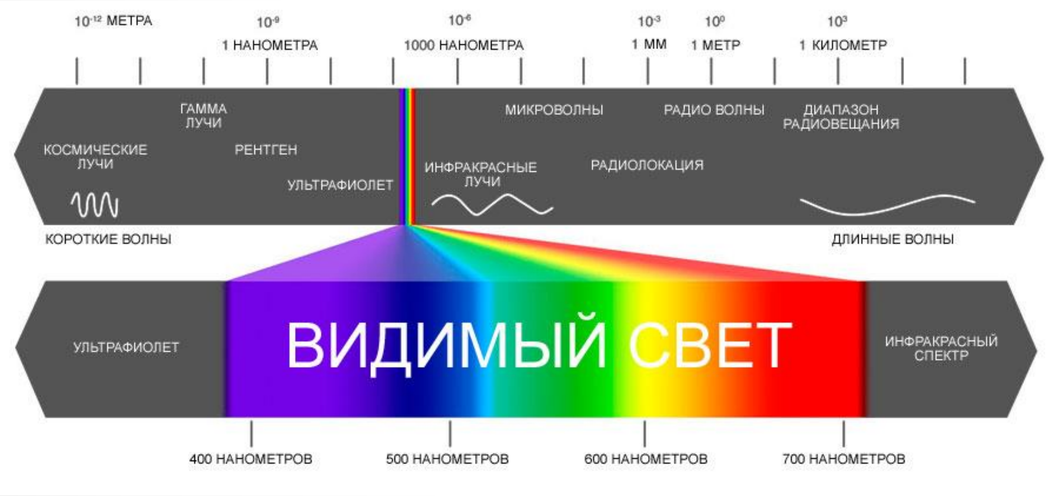
Сегодня:
воскресенье, 11 февраля 2024 г.

Лекция 2. Шкала ЭМВ

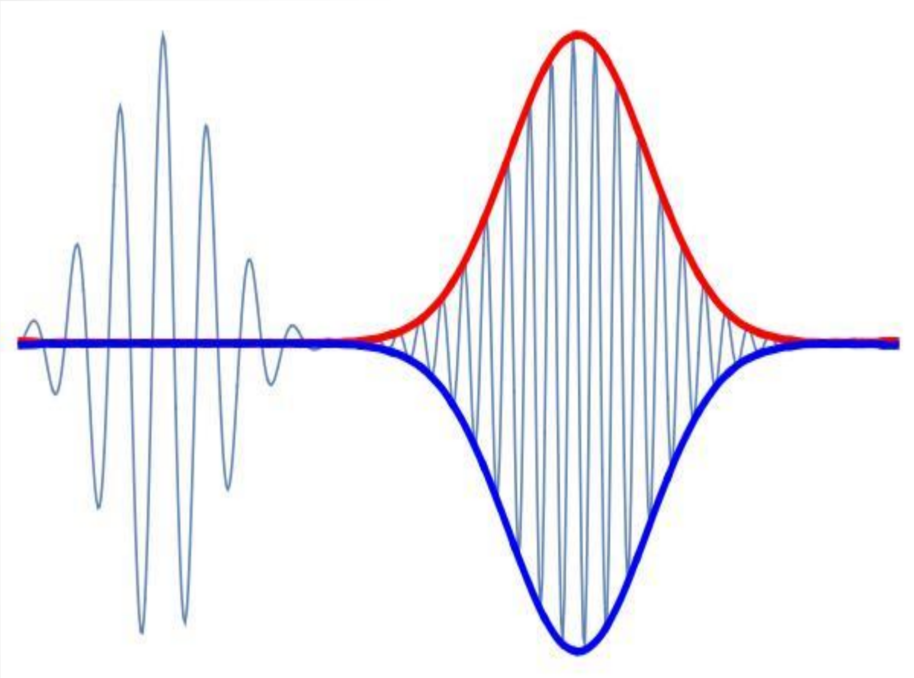


- ✓ Волны
- ✓ Шкала ЭМВ
- ✓ Оптические явления на границе раздела сред

доцент КОФ ФТИ ТПУ, к.физ.-мат.н Купрекова Елена Ивановна

Фазовая и групповая скорости

Волновой пакет (группа волн) - суперпозиция волн, отличающихся друг от друга по частотам ($\Delta\omega << \omega$).



В вакууме все монохроматические волны распространяются с одинаковой фазовой скоростью $\upsilon_ф = \omega/k$. С такой же скоростью распространяется в вакууме и сам волновой пакет, не изменяя своей формы.

В диспергирующей среде пакет расплывается, поскольку скорости его монохроматических составляющих отличаются друг от друга.

*Нас интересует скорость, с которой перемещается место с максимальной амплитудой это и есть **групповая скорость.**

u –групповая скоростью = скорость, с которой перемещается пакет:

$$\boxed{u = \frac{d\omega}{dk}}$$

Пусть уравнения этих монохроматических волн имеют вид:

$$E_1 = A\cos(\omega t - kx)$$

$$E_2 = A\cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x]$$

В результате их наложения образуется суммарная волна:

$$E = E_1 + E_2 = \underbrace{2A\cos\frac{td\omega - xdk}{2}}_{A_0\,\text{–амплитуда}}\cos(\omega t - kx)$$

Отсюда следует, что точки, соответствующие максимуму амплитуды, движутся по закону:

$$td\omega - xdk = 0 \Rightarrow x = \underbrace{\frac{d\omega}{dk}}_{u}t$$

$$\boxed{u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\upsilon k)}{dk}}$$

Групповая скорость

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\upsilon k)}{dk} = \upsilon + k\frac{d\upsilon}{dk}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad dk = -\left(\frac{2\pi}{\lambda^2}\right)d\lambda$$

$$\boxed{u = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}}$$

формула Релея

В области нормальной дисперсии ($d\upsilon/d\lambda > 0$) групповая скорость $u < \upsilon$.

В отсутствие дисперсии $d\upsilon/d\lambda = 0$ групповая скорость совпадает с фазовой $u = \upsilon$.

Комплексная запись уравнения волны

$$\boxed{f = \frac{1}{2}\left[Ae^{i(\omega t-\varphi)} + Ae^{-i(\omega t-\varphi)}\right]}$$

Если ввести комплексную амплитуду $\overset{\frown}{A} = Ae^{-i\varphi}$

$$\boxed{f = \frac{1}{2}\left[\overset{\frown}{A}e^{i\omega t} + \overset{\frown}{A}{*}\,e^{-i\omega t}\right]}$$

Знак <*> означает комплексно сопряженную величину

Приоритет отдают вектору E:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]}$$

при υ/c <<1 действие магнитного поля много слабее, чем электрического

Уравнения ЭМ волны

плоская монохроматическая волна:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\cos\left(\omega t\mp\left(\vec{k},\vec{r}\right)+\varphi_0\right)$$
$$\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{H}_0\cos\left(\omega t\mp\left(\vec{k},\vec{r}\right)+\varphi_0\right)$$

$$\vec{E}=\vec{E}_0e^{i\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)}$$

$$\vec{H}=\vec{H}_0e^{i\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)}$$

$$\vec{k}=k\vec{e}=\frac{\omega}{c}\vec{e}$$

Волновой вектор направлен в сторону распространения волны

Аналогично уравнение сферической монохроматической волны:

$$E(\vec{r},t)=\frac{E_0}{r}\cos\left(\omega t\mp\left(\vec{k},\vec{r}\right)+\varphi_0\right)$$

$$H(\vec{r},t)=\frac{H_0}{r}\cos\left(\omega t\mp\left(\vec{k},\vec{r}\right)+\varphi_0\right)$$

$$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$$

Свойства электромагнитных волн

1. Векторы *H, E, k* взаимно перпендикулярны,

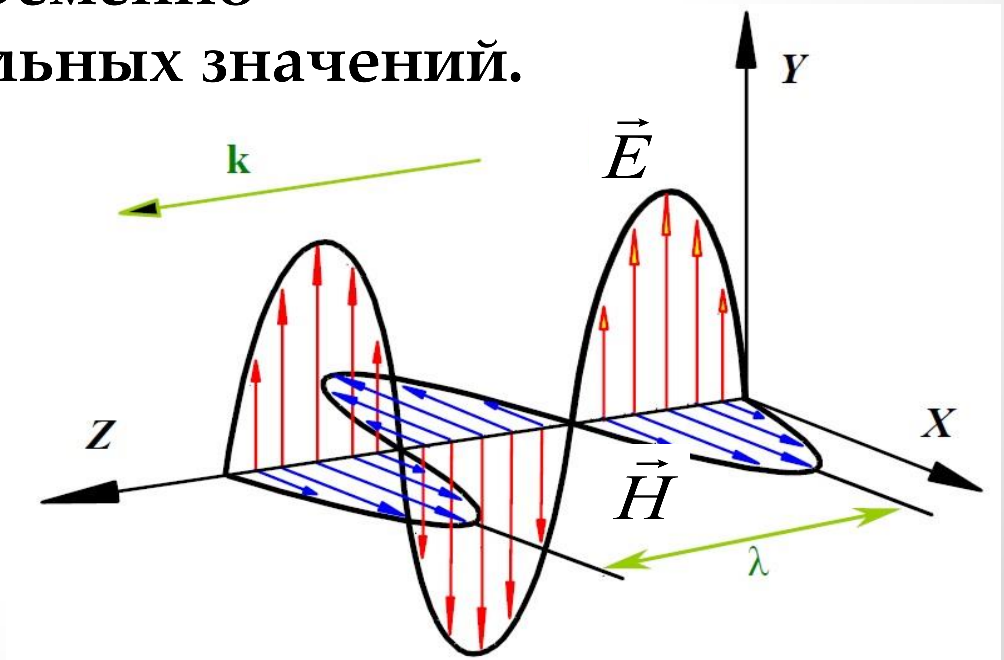
Электромагнитная волна является **поперечной волной.**

2. *H, E, k* образуют правую тройку векторов

3. Е и Н изменяются синхронно во времени, достигая одновременно максимальных и минимальных значений.

Связь амплитуд

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu\mu_0}H_0}$$



Тогда системой уравнений Максвелла может быть записана

$$\left[\vec{k},\vec{E}\right]=\mu\mu_0\omega\vec{H} \qquad (1)$$

$$\left[\vec{k},\vec{H}\right]=-\varepsilon\varepsilon_0\omega\vec{E} \qquad (2)$$

$$\left(\vec{k},\vec{E}\right)=0 \qquad (3)$$

$$\left(\vec{k},\vec{H}\right)=0 \qquad (4)$$

Отсюда следует

$$\vec{H}\perp\vec{E},\vec{H}\perp\vec{k}, \quad \vec{H},\vec{E},\vec{k}-\text{правая}$$

$$\vec{E}\perp\vec{H},\vec{E}\perp\vec{k}$$

$$\vec{k}\perp\vec{E}$$

$$\vec{k}\perp\vec{H}$$

$$\boxed{\vec{k}=k\vec{e}=\frac{\omega}{\upsilon_{\phi}}\vec{e}}$$

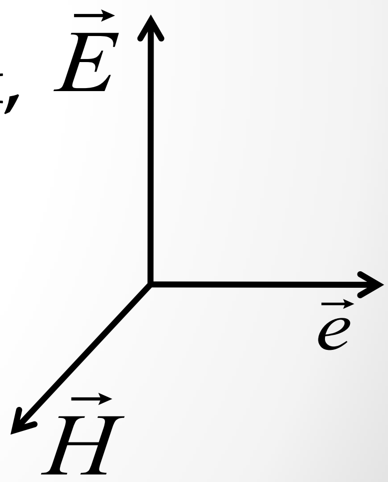
Выводы:

1. Векторы H, E, e взаимно перпендикулярны,

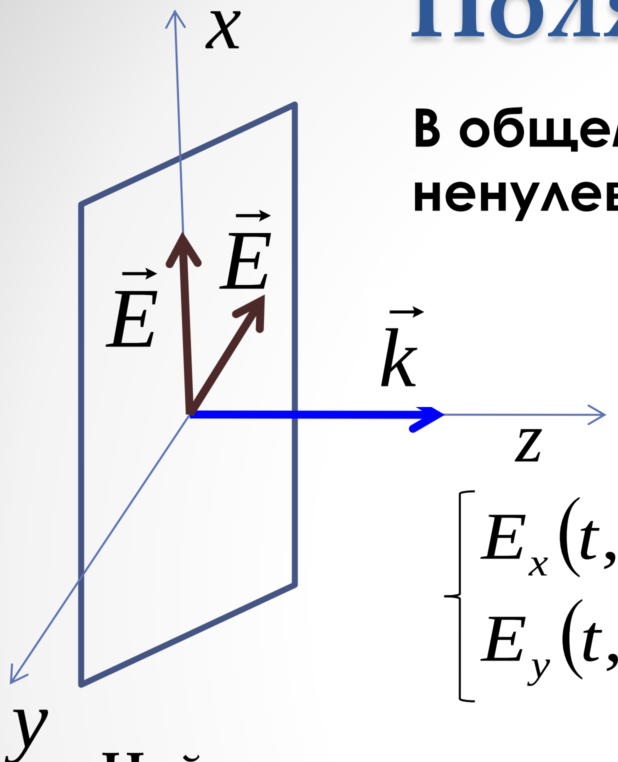
Электромагнитная волна является поперечной волной.

2. H, E, e образуют правую тройку векторов

3. E и H изменяются синхронно во времени, достигая одновременно максимальных и минимальных значений.



Поляризация волны



В общем случае у плоской волны отличны две ненулевые компоненты

$$\vec{E}(t, z = const) = \vec{e}_x E_x(t, z) + \vec{e}_y \vec{E}_y(t, z)$$

Допустим компоненты изменяются

$$\begin{cases} E_x(t, z) = E_{x0}\cos(\omega t - kz + \varphi_1) = E_{x0}\cos(\omega t - \varphi_x) \\ E_y(t, z) = E_{y0}\cos(\omega t - kz + \varphi_2) = E_{y0}\cos(\omega t - \varphi_y) \end{cases}$$

Найдем уравнение траектории, по которой движется кончик *E* в плоскости *z* = *const*. Введем обозначим

$$\xi = \frac{E_x}{E_{x0}}, \; \eta = \frac{E_y}{E_{y0}} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \cos\tau \\ \eta = \cos(\tau - \Delta\varphi) \end{cases}$$

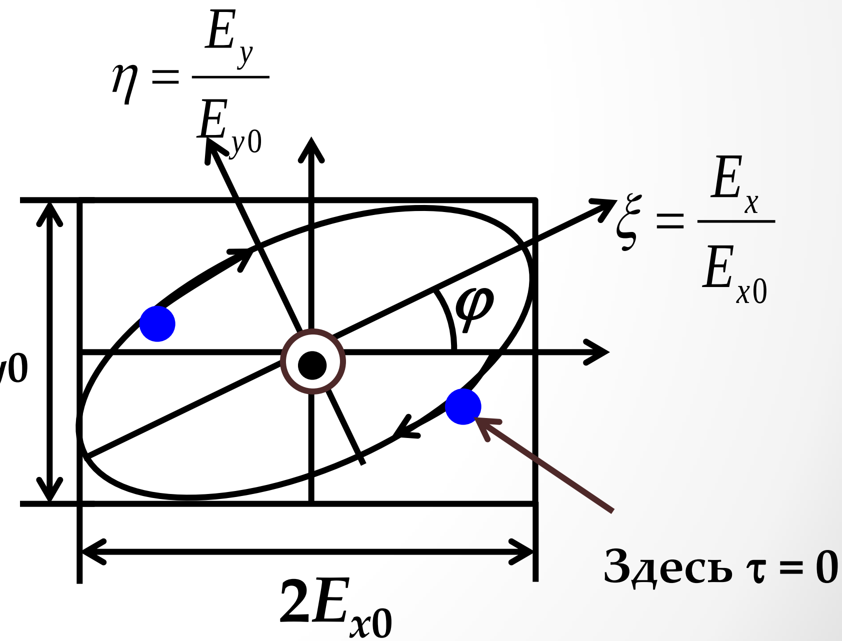
$$\tau = (\omega t - \varphi_x), \; \Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

$$\begin{cases} \xi = \cos\tau \\ \eta = \cos(\tau - \Delta\varphi) = \cos\tau\cos\Delta\varphi + \sin\tau\sin\Delta\varphi \end{cases}$$

$$\left(\eta - \underbrace{\cos\tau}_{\xi}\cos\Delta\varphi\right)^2 = \left(1 - \underbrace{\cos^2\tau}_{\xi^2}\right)\sin^2\Delta\varphi$$

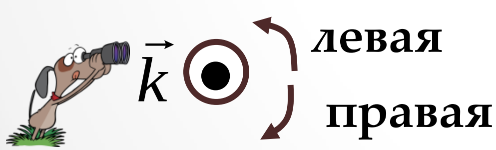
$$\xi^2 - 2\xi\eta\cos\Delta\varphi + \eta^2 = \sin^2\Delta\varphi$$

Уравнение эллипса, вписанного в прямоугольник со сторонами, параллельными 0x, 0y и длиной $2E_{x0}$ и $2E_{y0}$



$-\pi < \Delta\varphi < 0 \Rightarrow$ по часовой

$0 < \Delta\varphi < \pi \Rightarrow$ против часовой



$\Delta\varphi = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow$ линейная

$\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ и $E_x = E_y \Rightarrow$ круговая

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\sin(-\Delta\varphi) = \sin\Delta\varphi$$

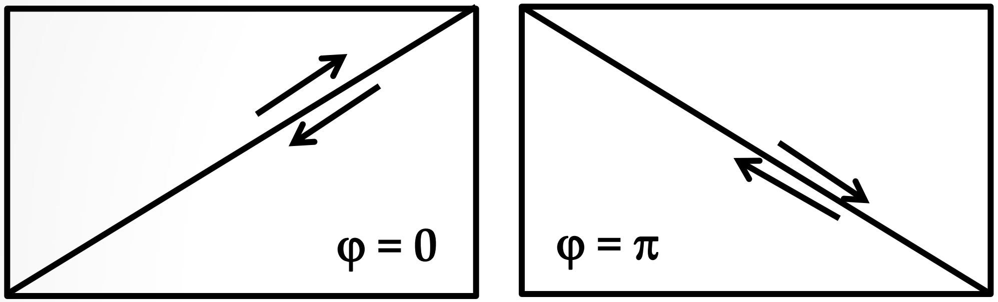
Линейная поляризация:

Если разность фаз

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = m\pi$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$

эллипс переходит в прямую

$$\frac{E_x}{E_y} = (-1)^m \frac{E_{x0}}{E_{y0}}$$



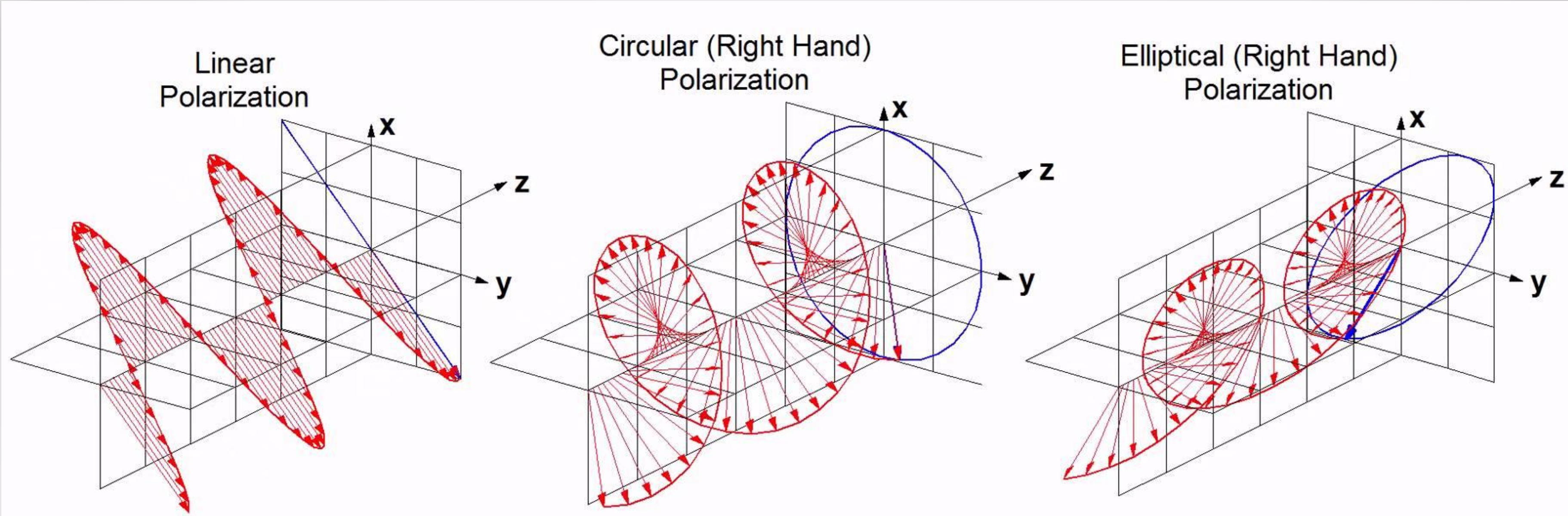
Круговая поляризация:

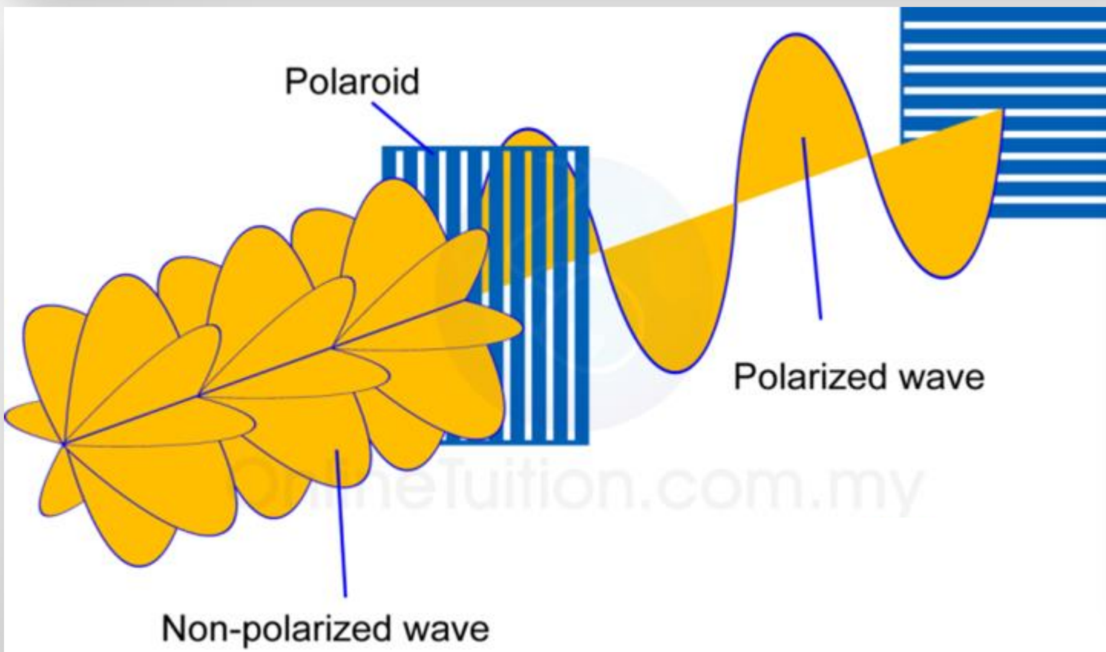
$$E_{x0}^2 + E_{y0}^2 = E_0^2$$

Если $E_{x0} = E_{y0} = E_0$ и разность фаз

$\varphi_2 - \varphi_1 = m\pi/2$, $m = \pm1, \pm3, \pm5\ldots,$

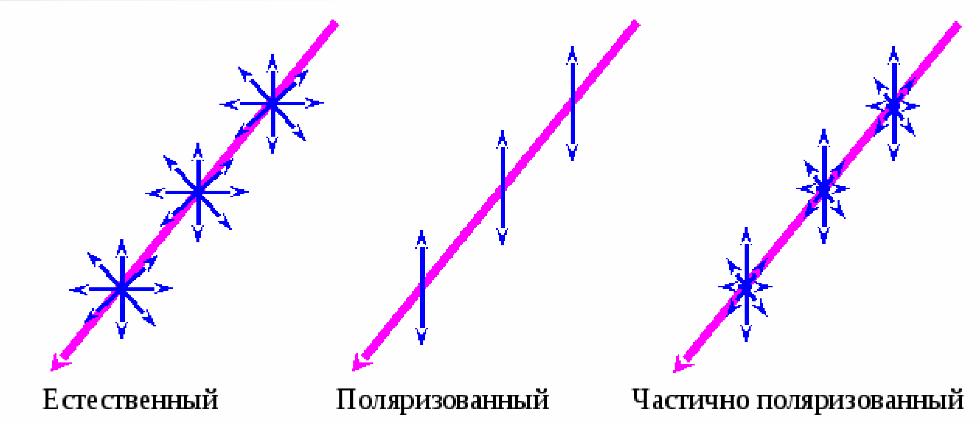
одна из компонент вектора E проходит через максимум в тот момент, когда другая обращается в нуль. Эллипс вырождается в окружность

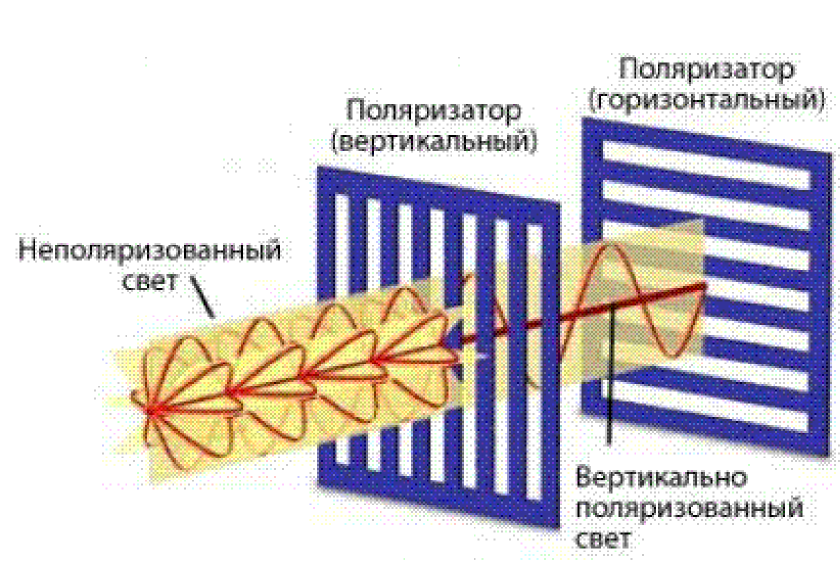

Linear
Polarization
Circular (Right Hand)
Polarization
Elliptical (Right Hand)
Polarization
x
y
z
x
y
z
x
y
z


Polaroid
Polarized wave
Non-polarized wave


Вертикальная
поляризация
Горизонтальная
поляризация

Все направления *E* – равновероятны – свет неполяризованный или естественно поляризованный (солнечный свет, лампа).





$$P = \frac{I_{min} - I_{max}}{I_{max} + I_{min}}$$

Степень поляризации

Энергия электромагнитной волны

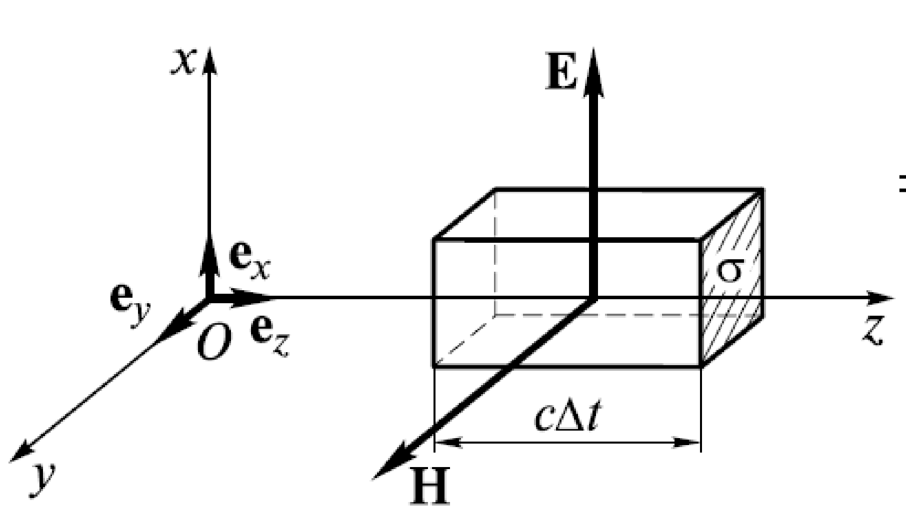
Посчитаем поток энергии, переносимый плоской волной через сечение, ориентированное перпендикулярно направлению распространения волны (ось Oz). Объемная плотность энергии ЭМП

$$\boxed{\omega = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0 \varepsilon E^2 + \mu_0 \mu H^2\right]}$$

$$\boxed{\omega = \frac{dW}{dt dS}, \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right]}$$

Считаем, что волна плоскополяризована: $\vec{E} = \vec{e}_x E_x, \vec{H} = \vec{e}_y H_y$

Через заштрихованную поверхность площади σ за время Δt будет перенесена энергия, заключенная в параллелепипеде длиной cΔt:



$$\Delta W = \omega \sigma c \Delta t =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon\varepsilon_0 E_x^2 + \mu\mu_0 H_y^2\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\sigma \Delta t =$$

$$= \left\{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu\mu_0}H_0\right\} =$$

$$= \{\varepsilon = 1, \mu = 1\}$$

$$= \varepsilon_0 E_x^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \sigma \Delta t = \underbrace{E_x H_y}_{=S_z} \sigma \Delta t$$

Количество энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно распространяющейся волне, определяется вектором Пойнтинга. В нашем случае вектор Пойнтинга имеет одну компоненту вдоль оси Oz

$$S_z = \frac{\Delta W}{\sigma \Delta t} = E_x H_y$$

$$\boxed{\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]}$$

Вектор Умова-Пойнтинга: вектор, равный по модулю плотности энергии и направленный в сторону распространения волны (количественная характеристика потока энергии).

В бегущей плоской волне $$S = EH = \left\{ \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu \mu_0} H \right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu \mu_0}} E^2 = \left\{ \omega = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 \right\} = \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu \mu_0}} = \omega \cdot \upsilon_\phi$$

$$\boxed{S = \omega \cdot \upsilon_\phi}$$

Если волна гармоническая

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz),$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_x = c \varepsilon_0 E_x$$

$$\boxed{S_z = c \varepsilon_0 E_{0x}^2 \cos^2(\omega t - kz)}$$

Поток энергии «пульсирует» с течением времени

Интенсивность волны – энергия, переносимая волной в единицу времени через единичную площадку, нормальную к скорости распространения волны (усредненная за период величина плотности потока энергии)

$$I = \langle S_z \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T S_z dt = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_{0x}^2$$

$$[I] = 1\,\text{Вт/м}^2,\ [E_{0x}] = 1\,\text{В/м}$$

$$I\left(\text{Вт/м}^2\right) = 1{,}32\cdot 10^{-3}\left(E_{0x}\,(\text{В/м})\right)^2$$

$$I = E_{0x}^2$$

В оптике интенсивность определяют, как квадрат амплитуды электрической компоненты ЭМП

Шкала электромагнитных волн

Диапазон	*Длина волны*	*Способ получения*
Радиоволны	$> 5\cdot10^{-5}$ м	Излучение диполя, вибратор
Оптическое излучение: инфракрасное излучение видимый свет ультрафиолетовое излучение	 1 мм ÷ 770 нм (770 ÷ 380) нм (380 ÷ 10) нм	Внутриатомные переходы
Рентгеновское излучение	(10 ÷ 100) нм – (0,01 ÷ 1) нм	Взаимодействие заряженных частиц с веществом
Гамма-излучение	< 0,1 нм	Радиоактивные превращения, ядерные реакции, распад частиц и т. п.

Толщина человеческого волоса d ~ 50 - 70 мкм ~ 60 000 нм