

**Сегодня: понедельник, 29  
апреля 2024 г.**

*Лекция 17.*  
**Потенциальный  
борьер**

# Частица и ступенька

Рассмотрим два случая,

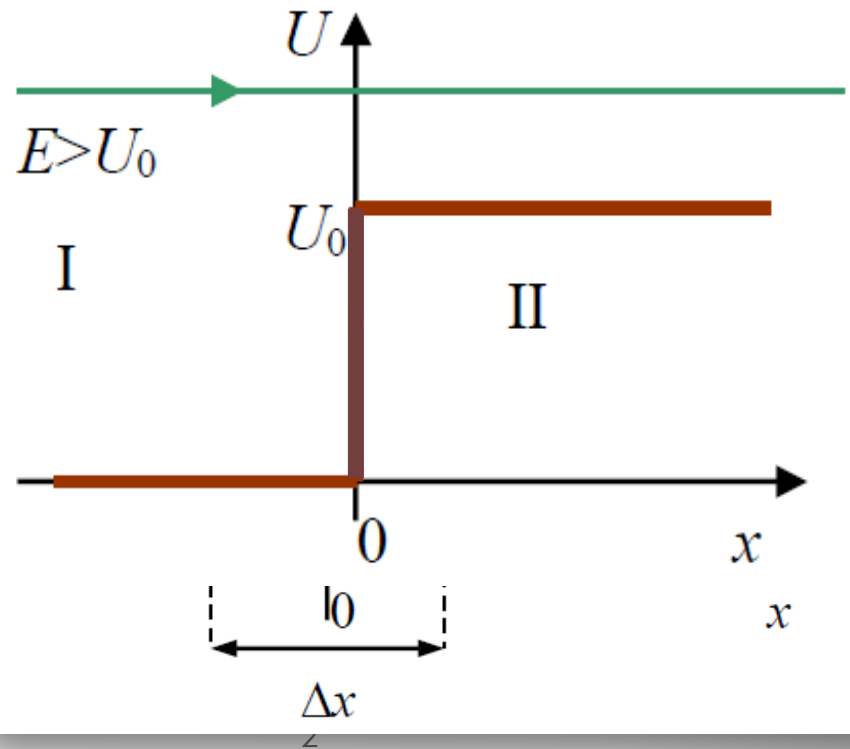
- ✓ энергия налетающих частиц  $E > U_0$
- ✓ энергия налетающих частиц  $E < U_0$ .

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U_0, & x \geq 0 \end{cases}$$

**Классика:** частица слева с

$$p_I = \sqrt{2mE} = \text{const}$$

- ✓ в области  $x \geq 0$ ,  $U = U_0$ , замедляется  $p_{II} = \sqrt{2m(E - U_0)}$
- ✓ Затем сохраняет импульс  $p_{II}$
- ✓ частица обладает достаточной энергией, чтобы проникнуть в область  $x \geq 0$ , **полное прохождение:** любая частица с  $E > U_0$  движется вправо с меньшей  $T = E - U_0$



**Квантово:**

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U_0, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + k_1^2 \right) \psi_1(x) = 0 \quad (x < 0)$$

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + k_2^2 \right) \psi_2(x) = 0 \quad (x \geq 0)$$

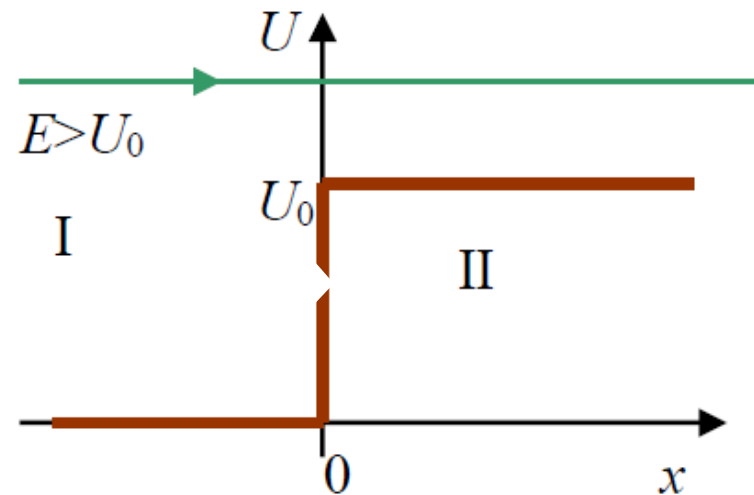
$$k_2^2 = \frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}$$

**Общие решения - плоские волны:**

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad (x < 0)$$

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \quad (x \geq 0)$$

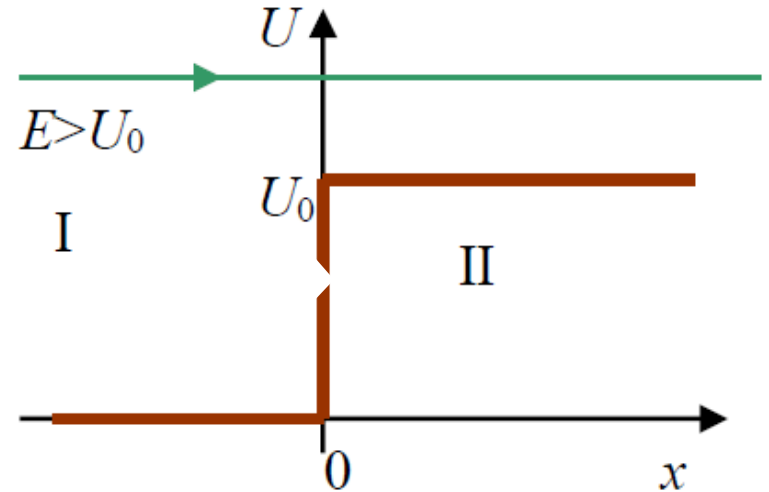
Ни одна волна не отражается барьера слева,  $D = 0$ . Полная волновая функция



$$\Psi(x, t) = \begin{cases} \psi_1(x) e^{-i\omega t} = Ae^{i(k_1x - \omega t)} + Be^{-i(k_1x - \omega t)} & x < 0 \\ \psi_2(x) e^{-i\omega t} = Ce^{i(k_2x - \omega t)} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} \psi_1(x)e^{-i\omega t} = Ae^{i(k_1x-\omega t)} + Be^{-i(k_1x-\omega t)} & x < 0 \\ \psi_2(x)e^{-i\omega t} = Ce^{i(k_2x-\omega t)} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$|\psi(x)|^2 = |Ce^{i(k_2x-\omega t)}|^2 = |C|^2$$



### Коэффициенты отражения и прохождения

$$R = \frac{\text{плотность отраженного потока}}{\text{плотность падающего потока}} = \left| \frac{J_{\text{отр}}}{J_{\text{пад}}} \right|, \quad T = \left| \frac{J_{\text{прош}}}{J_{\text{пад}}} \right|$$

$$J_i = \frac{i\hbar}{2m} \left( \psi_i \frac{d\psi_i^*}{dx} - \psi_i^* \frac{d\psi_i}{dx} \right) = \frac{\hbar k_1}{m} |A|^2$$

$$\psi_i(x) = Ae^{ik_1x}$$

$$\psi_r(x) = Be^{-ik_1x}$$

$$\psi_t(x) = Ce^{ik_2x}$$

$$J_r = -\frac{\hbar k_1}{m} |B|^2 \quad J_t = \frac{\hbar k_2}{m} |C|^2$$

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}, \quad T = \frac{k_2}{k_1} \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

Для нахождения  $B$  и  $C$  использовать граничные условия волновой функции при  $x = 0$  и условие «сшивания», т.к. волновая функция и ее первая производная непрерывны при  $x = 0$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0)$$
$$\frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx}$$

$$A + B = C,$$
$$k_1(A - B) = k_2 C \quad \Rightarrow \quad B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A, \quad C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A$$

$A$  - определяем из условия нормировки

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{(1 - K)^2}{(1 + K)^2}, \quad T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{4K}{(1 + K)^2}$$

$$K = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}$$

$$R + T = 1$$

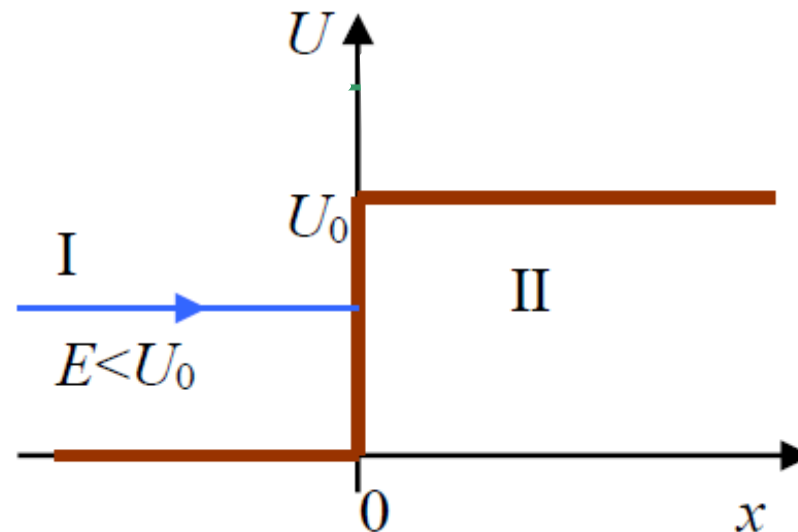
$R \neq 0$  (!): существуют частицы, которые отражаются, хотя летят над барьером!

# ступенька: $E < U_0$

**Классика:** частица движется слева с

$$p_I = \sqrt{2mE} = \text{const}$$

- ✓ Налетают на барьер при  $x \geq 0$
- ✓ Отскакивают, сохраняя импульс  $p_I$
- ✓ Ни одна из частиц не попадет внутрь барьера
- ✓ Происходит полное отражение частиц.



Квантово:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + U(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} - k_2'^2 \right) \psi_2(x) = 0 \quad (x \geq 0)$$

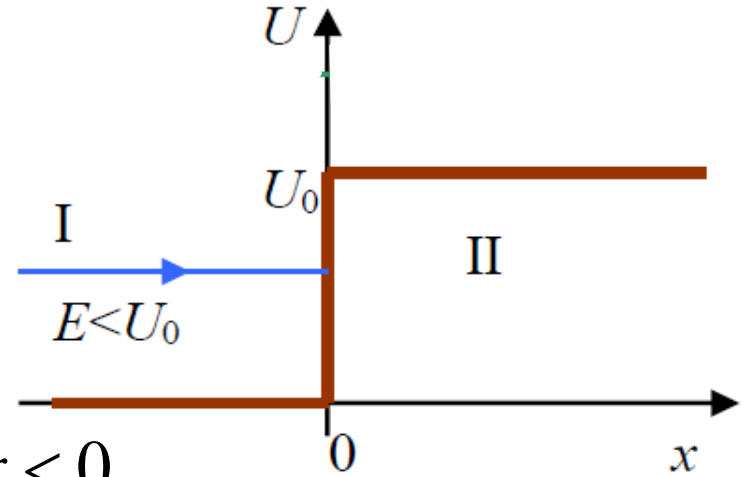
$$k_2'^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}$$

Решение уравнения

$$\psi_2(x) = C e^{-k_2' x} + D e^{k_2' x} \quad (x \geq 0)$$

полная волновая функция

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} A e^{i(k_1 x - \omega t)} + B e^{-i(k_1 x - \omega t)}, & x < 0 \\ C e^{-k_2' x} e^{-i\omega t}, & x \geq 0 \end{cases}$$



$$\psi_t(x) = C e^{-k_2' x} \text{ вещественная, т.е. } \psi_t^*(x) = \psi_t(x)$$

$$J_{\text{прош}} = \frac{\hbar}{2im} \left( \psi_t(x) \frac{d\psi_t(x)}{dx} - \psi_t(x) \frac{d\psi_t(x)}{dx} \right) = 0$$

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} Ae^{i(k_1x - \omega t)} + Be^{-i(k_1x - \omega t)}, & x < 0 \\ Ce^{-k'_2x} e^{-i\omega t}, & x \geq 0 \end{cases}$$

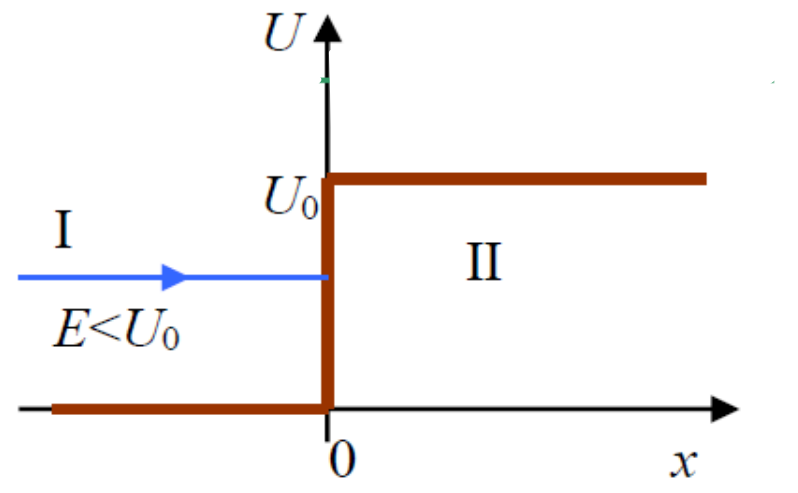
$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx}$$

$$B = \frac{k_1 - ik'_2}{k_1 + ik'_2} A, \quad C = \frac{2k_1}{k_1 + ik'_2} A$$

Коэффициент отражения

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{k_1^2 + k'_2{}^2}{k_1^2 + k'_2{}^2} = 1$$

**Полное отражение, как в классическом случае (!)**



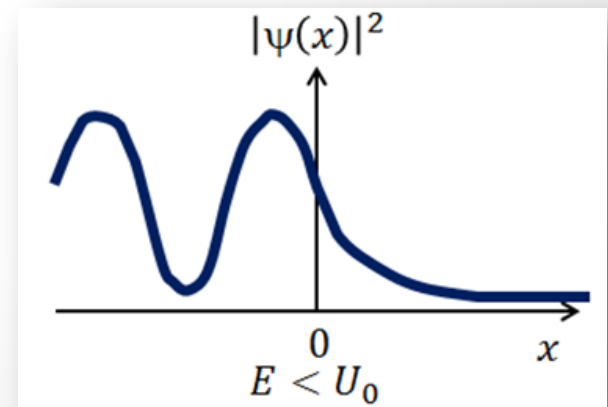
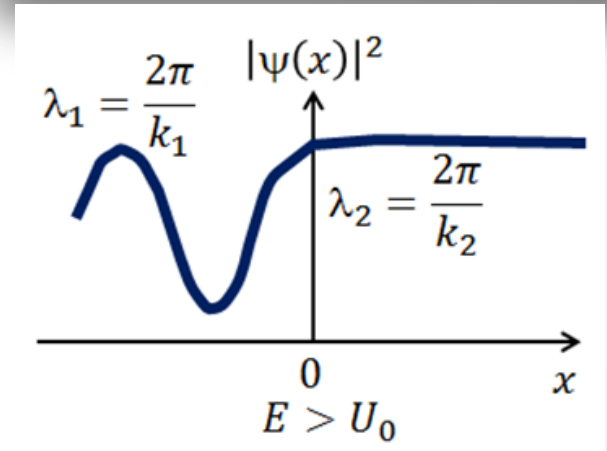
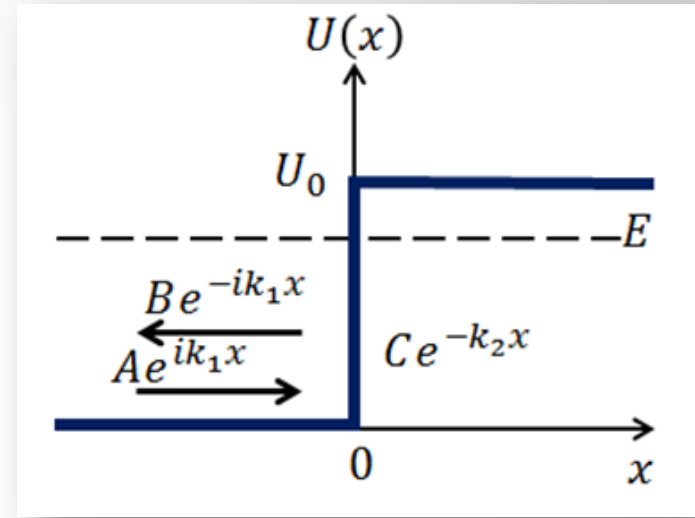


# Но!

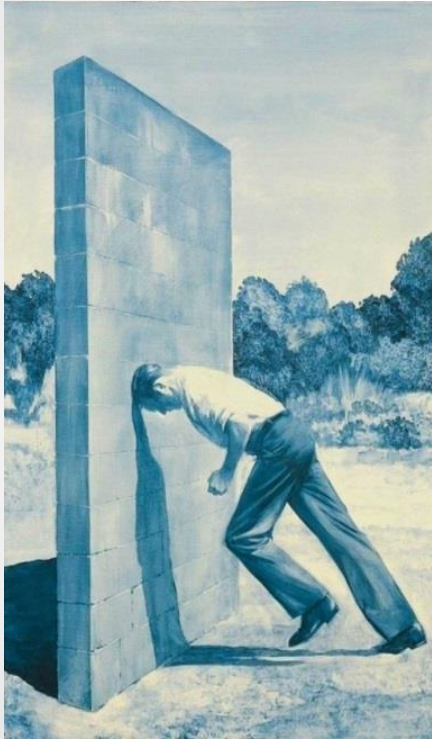
Квантово-механически существует **ненулевая вероятность** того, что частица проникает в **классически запрещенную область**, так как относительная плотность вероятности

$$P(x) = |\psi_t(x)|^2 =$$
$$= |C|^2 e^{-2k'_2 x} = \frac{Ak_1^2 |A|^2}{k_1^2 + k_2'^2} e^{-2k'_2 x}$$

ненулевая вблизи  $x = 0$  и экспоненциально уменьшается с ростом  $x$ .



# Туннельный эффект



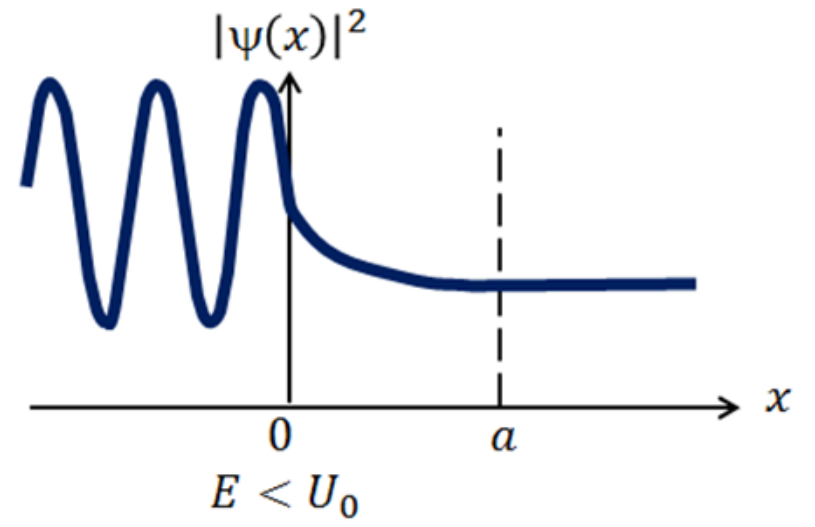
**Классически:** полное отражение, т.е. каждая частица, которая достигает барьера ( $x = 0$ ), будет отскакивать обратно. Ни одна частица не может проникнуть через барьер, где она будет иметь отрицательную кинетическую энергию.

**Квантово-Механические** предсказания резко отличаются от их классических аналогов, поскольку волновая функция не равна нулю за барьером



# Туннельный эффект: квантовомеханические объекты могут туннелировать через классически непроницаемые барьеры!

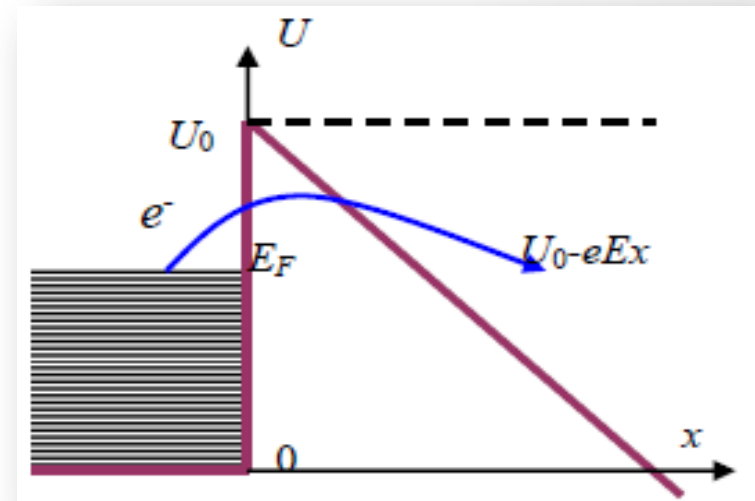
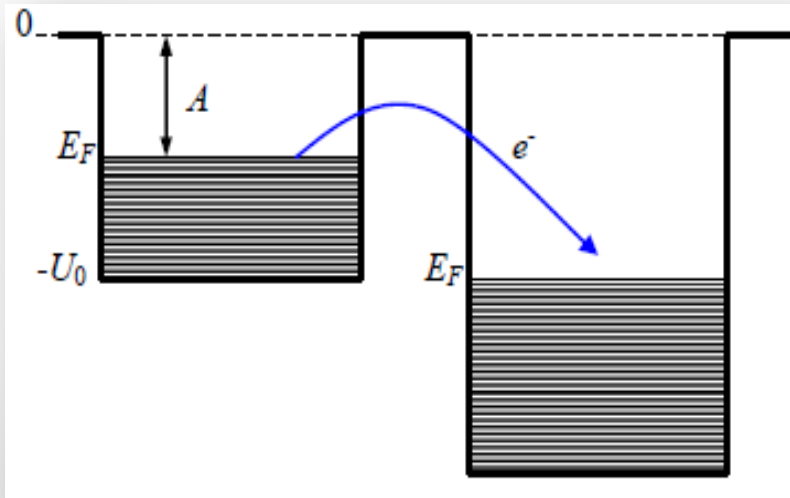
Туннельный эффект имеет важное практическое значение - от физики элементарных частиц и ядерной физики до полупроводников: радиоактивные распады и перенос заряда в электронных устройствах.



# Применение туннельного эффекта

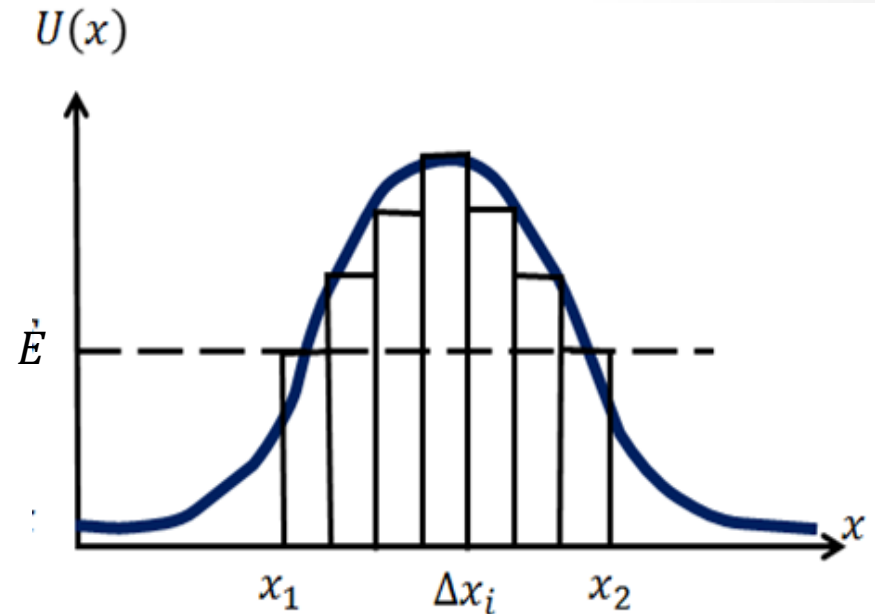
- ✓ Работа электронного микроскопа
- ✓ Контактная разность потенциалов
- ✓ Явление холодной эмиссии

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ U_0 - eE_x & x > 0 \end{cases}$$



# БАРЬЕР ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

$$T \approx \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m(U_0 - E)} \right\}$$



# Асимметричная квадратная яма

Движение частицы  $m$  ограничено внутри бесконечно глубокой асимметричной потенциальной ямы

**Классически** частица замкнута внутри ямы, периодически двигаясь с постоянным импульсом  $p = \pm\sqrt{2mE}$  в результате повторяющихся отражений от стенок ямы

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq a \\ +\infty, & x > a \end{cases}$$

**Квантово механически:** частица имеет связанные состояния и дискретный невырожденный энергетический спектр.

Так как  $U(x)$  - бесконечный вне  $0 \leq x \leq a$ , поэтому волновая функция исчезает вне ямы. Нужно искать решения только внутри ямы

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0$$
$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\psi(x) = A'e^{ikx} + B'e^{-ikx}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

# Дискретность энергии

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad \psi(0) = 0 \Rightarrow \quad B = 0$$

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \quad \psi(a) = \sin(ka) = 0 \Rightarrow \quad k_n a = n\pi$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

**последовательность  
дискретных энергетических  
уровней, с положительным  
целым значениям  $n$ .**

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

**энергия  
нулевых  
колебаний**

Расстояние между соседними  
уровнями не константа:

Состояния  $n = 2, 3, 4 \dots$  -  
**возбужденные**

$$E_n = n^2 E_1$$

$$E_{n+1} - E_n = 2n + 1$$

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{E_n} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2} = \frac{2n+1}{n^2}$$

В классическом пределе

уровни становятся настолько  
близкими друг к другу, что их  
невозможно различить.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{n+1} - E_n}{E_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0$$

# СВЯЗАННОСТЬ СОСТОЯНИЙ

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

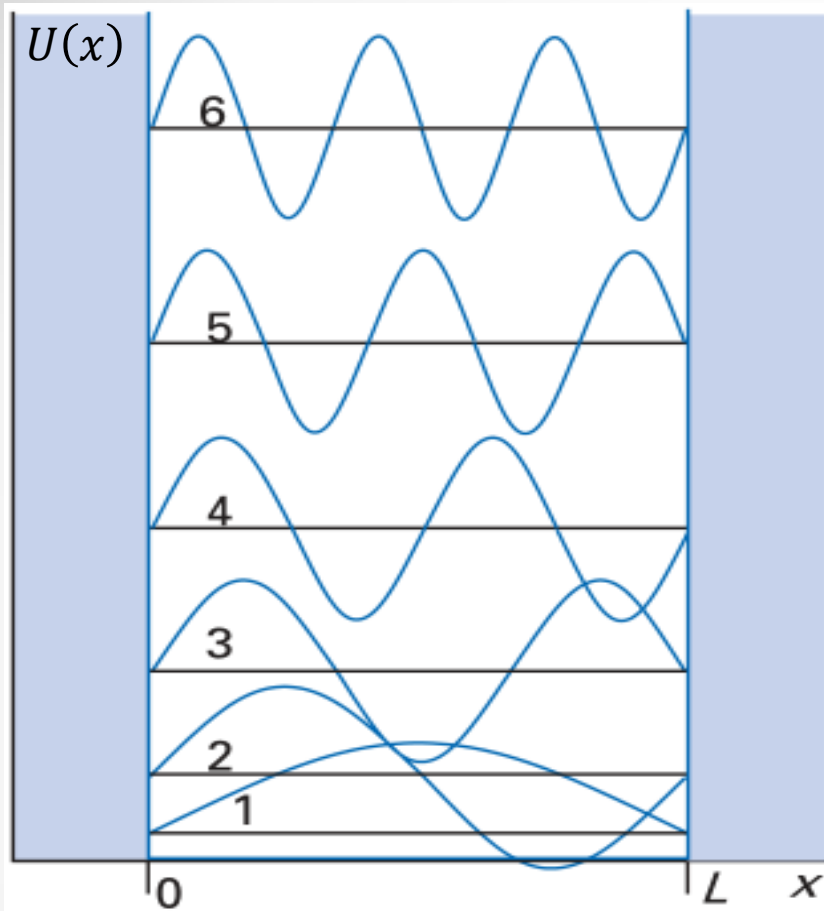
$$1 = \int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = |A|^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} \\ &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-in^2 E_1 t/\hbar} \end{aligned}$$

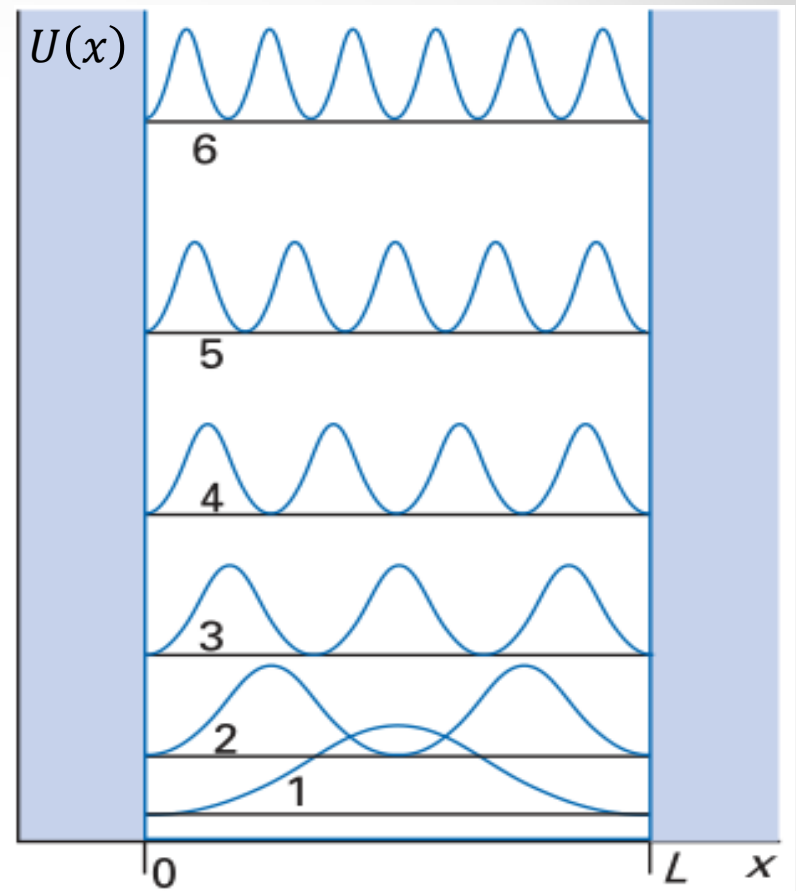
$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$$

1. ни один из энергетических уровней не является вырожденным (1 уровень - 1 собственная функция)
2. волновые функции различных уровней ортогональны





- Первые 6 энергетических уровней и соответствующие волновые функции для частицы в бесконечно глубокой яме. (!)*
- ✓ *Уровни шире отстоят друг от друга по мере увеличения энергии*
  - ✓ *Максимальная амплитуда волновых функций одинакова*



- Распределение вероятности частицы в яме.*
- (!) распределение становится более равномерным по мере увеличения энергии*

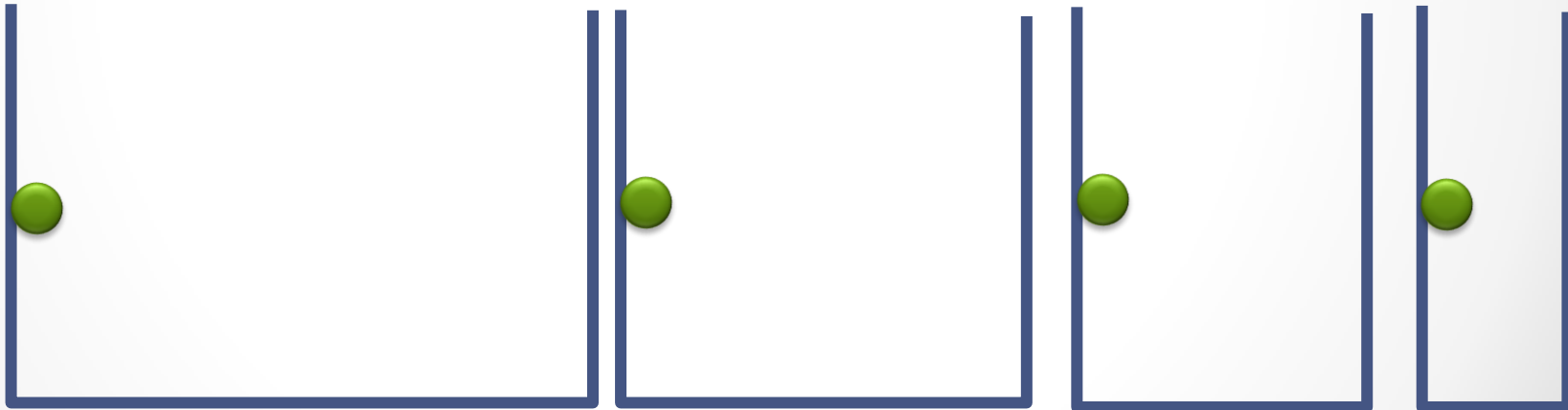
# Энергия нулевых колебаний

Для потенциала квадратной ямы не существует состояния с нулевой энергией

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

Если  $E = 0$ , то частица находится в состоянии покоя в яме, это нарушение принцип неопределенностей. **Локализация** частицы в области  $0 \leq x \leq a$ , означает, что частица приобретает **конечный** импульс  $\Delta p \sim \frac{\hbar}{a}$ , и минимальную кинетическую энергию  $\frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ .

Неопределенно  
сть импульса  
 $\Delta p \sim \frac{\hbar}{a}$



ширина уменьшается, неопределенность импульса увеличивается. Это заставляет частицу двигаться быстрее, поэтому энергия нулевых колебаний также увеличивается. **Энергия нулевых колебаний отражает необходимость минимального движения частицы.**