

**Сегодня: понедельник, 1
апреля 2024 г.**

***Лекция 13.* Волновые свойства микрочастиц**

1. Эффект Комптона
2. гипотеза де Бройля
3. Опыты Девиссона-Джермера,
Томпсона-Гартаковского
4. Мысленный эксперимент

Гипотеза де Бройля

Излучение в явлениях отражения и распространения света интерференция и дифракция ведёт себя как волна с волновыми характеристиками λ и ν , а в явлениях испускания и передачи энергии ведёт себя, как частица с энергией и импульсом

$$\varepsilon = h\nu$$

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

Луи де Бройль: корпускулярно–волновой дуализм должен быть универсальным, присущ всем частицам вещества – электронам, протонам, атомам, причём количественные характеристики свободных частиц будут теми же, что и для квантов света.

Волны материи

Любая частица с ненулевой массой покоя и импульсом ведёт себя как группа волн – **волны материи** – длина волны и волновой вектор которых связаны с корпускулярным импульсом этой частицы

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$$

Волны, связанные со свободно движущимися частицами = **волны де Бройля**.

Волны де Бройля для макрообъектов

Теннисный мяч

$$d = 6,7 \text{ см,}$$

$$m = 58,5 \text{ г,}$$

$$v = 50 \text{ м/с}$$

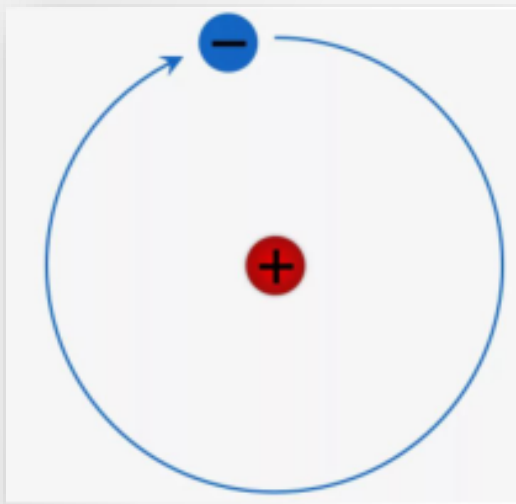
$$\begin{aligned} \lambda_m &= \frac{h}{mv} \\ &= \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{0,0585 \text{ кг} \cdot 50 \text{ м/с}} = 2,3 \cdot 10^{-34} \text{ м} \end{aligned}$$



за пределами области, доступной для измерения

Волны де Бройля для микрообъектов

Атом водорода



$$d = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ м}$$
$$R \sim 0,1 \text{ \AA}$$

$$T_e = eU = \frac{(m_e v^2)}{2}$$

$$p = \sqrt{2m_e eU}$$

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} =$$

$$= \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{\sqrt{2(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг})(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл})U}}$$

$$= \frac{1,225}{\sqrt{U}} \text{ нм}$$

если $U = 10 \text{ В}$, то $\lambda_e = 0,39 \text{ нм}$
если $U = 100 \text{ В}$, то $\lambda_e = 0,12 \text{ нм}$

R-лучи

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$



*Клинтон
Дэвиссон*



*Лестер
Джермер*

Экспериментальное подтверждение гипотезы де Бройля



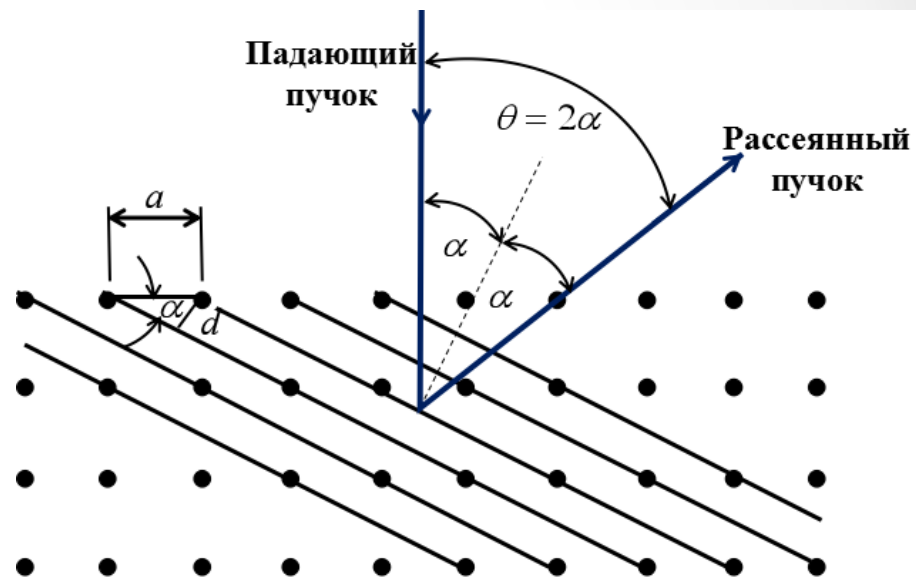
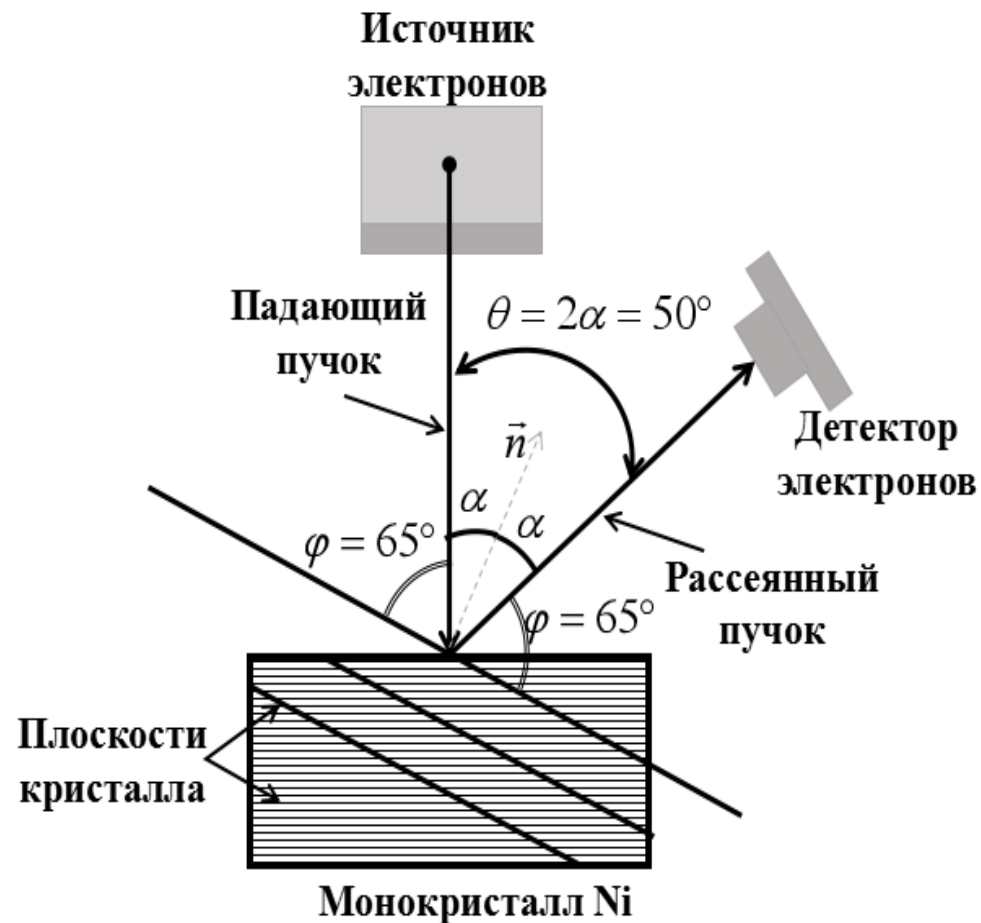
*Джорж
Томсон*



*Петр Саввич
Тартаковский*

Опыт Дэвиссона и Джермера

$$a \sim (1 - 10) \text{ \AA}$$



Опыт Дэвиссона и Джермера

максимум интенсивности
рассеянных электронов
соответствует $n = 1$ в условии
Вульфа-Брэгга:

$$n\lambda = 2d \sin \varphi$$

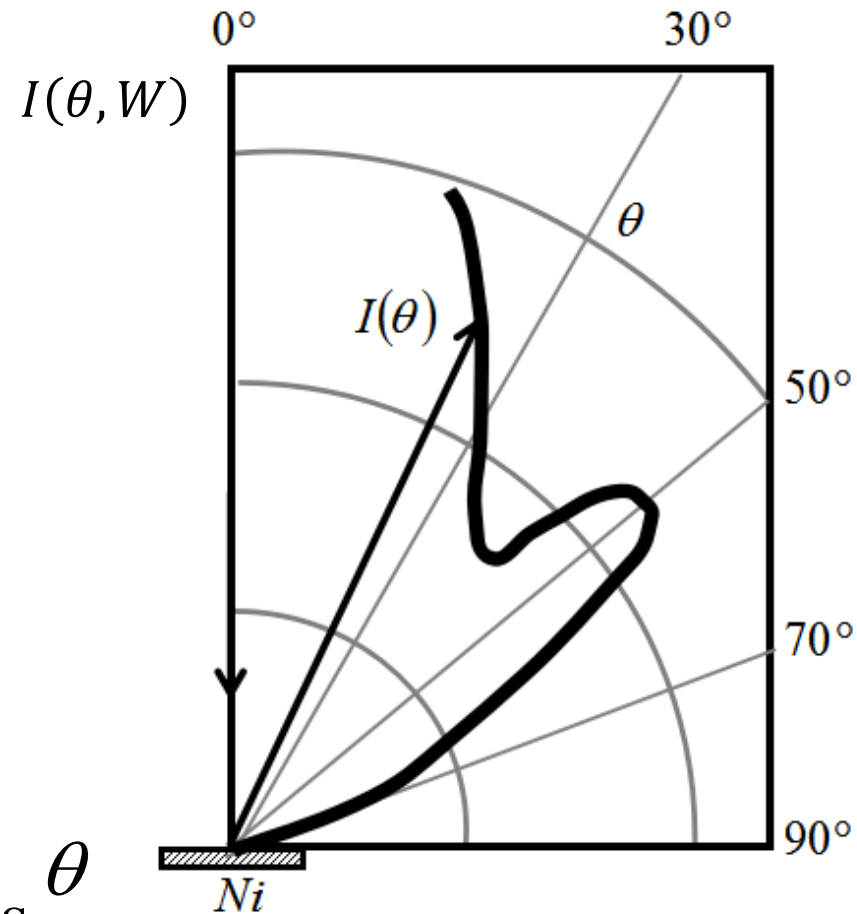
$$d = a \sin \frac{\theta}{2}$$

Ni : $a = 0,215$ нм

Отсюда $d = 0,091$ нм

Для пучка электронов
наблюдается только один
максимум при $\theta = 50^\circ$
и $2\varphi + \theta = \pi$, т.е.

$$\sin \varphi = \cos \frac{\theta}{2}$$



Длина волны, связанная с рассеянными электронами:

$$\lambda = \frac{2d}{n} \sin \varphi = \frac{2d}{n} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2 \cdot 0,091 \text{ нм}}{1} \cos 25^\circ = 0,165 \text{ нм}$$

Численное значение длины волны де Бройля.

Кинетическая энергия электронов в опыте

Девиссона и Джермера $T_e = 54 \text{ эВ}$, а импульс и

энергия покоя

$$m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$$

$$p = \sqrt{2m_e T_e}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e T_e}} =$$

значения отлично согласуются

$$= \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{\sqrt{2 \cdot (9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}) \cdot (54 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ В})}} = 0,167 \text{ нм}$$

Положение максимумов

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} = \frac{1,225}{\sqrt{U}} \text{ нм}$$



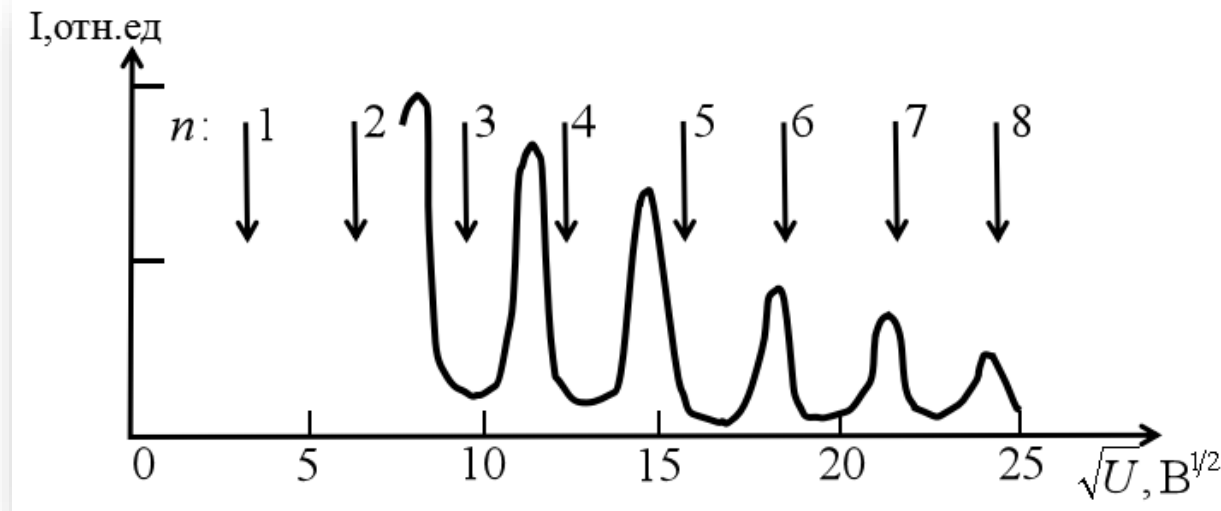
$$n\lambda = 2d \sin \varphi$$



$$(\sqrt{U})_n = \frac{1,225 (\text{нм})}{2d \sin \varphi} n$$

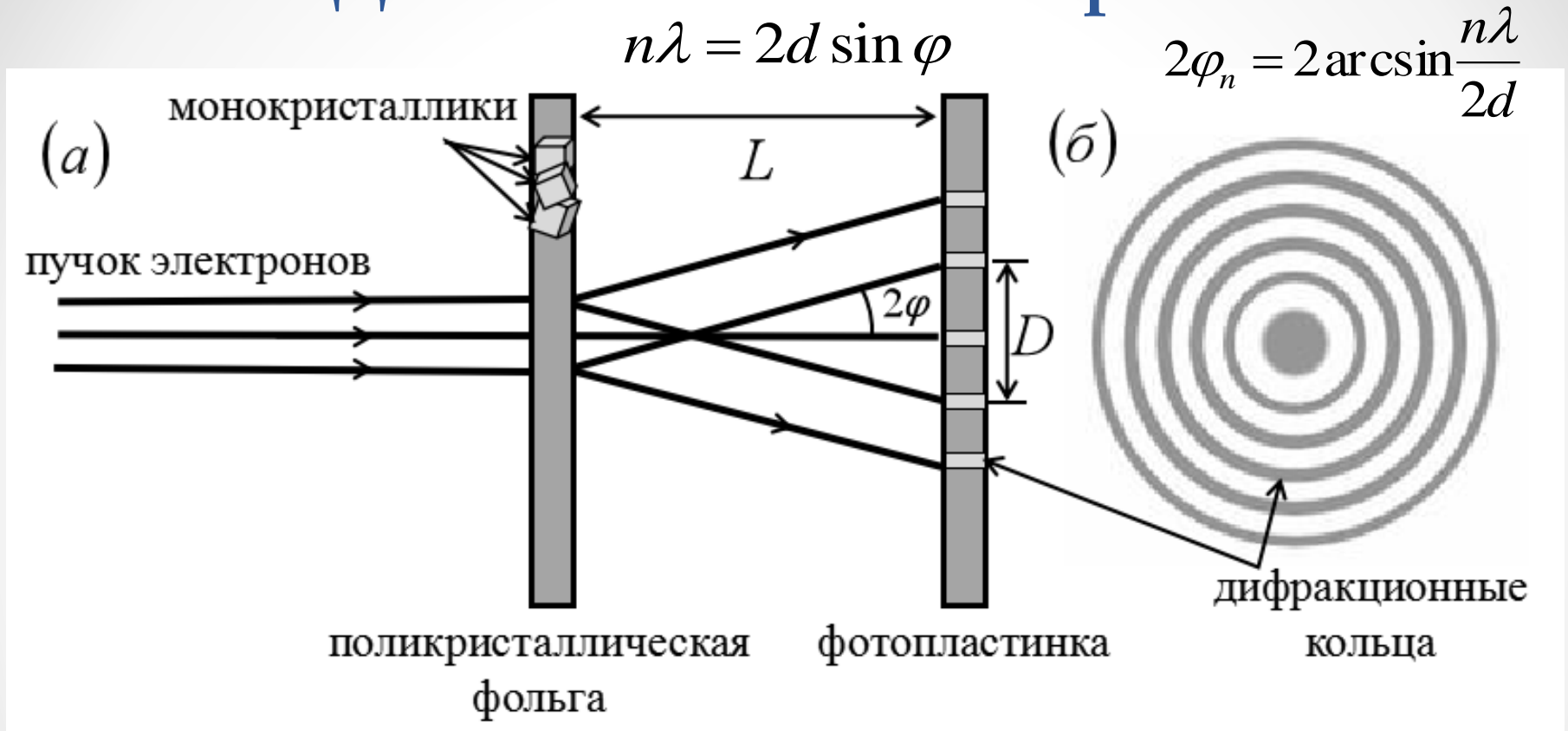
$n = 1, 2, \dots$

– порядок
максимума



Г. Бете для преодоления расхождений предложил приписывать электронным волнам показатель преломления

Опыты Дж. Томсона и П. Тартаковского



Томсон: поликристаллическую фольгу из золота толщиной $10^{-5} \div 10^{-6}$ см + быстрые электроны с энергией $>17,5$ эВ

Тартаковский: поликристаллы Ni, медленные электроны (<17 эВ)

Итого

Опыты Девиссона–Джермера, Томсона и Тартаковского на электронах, подтвердили гипотезу де Бройля об универсальности КВД для микрочастиц

Длина волны де Бройля для электрона λ
 $\sim (10^{-11} \div 10^{-13})$ м сопоставима с
классическим радиусом электрона

$$r \leq \lambda$$

$$r \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ м}$$

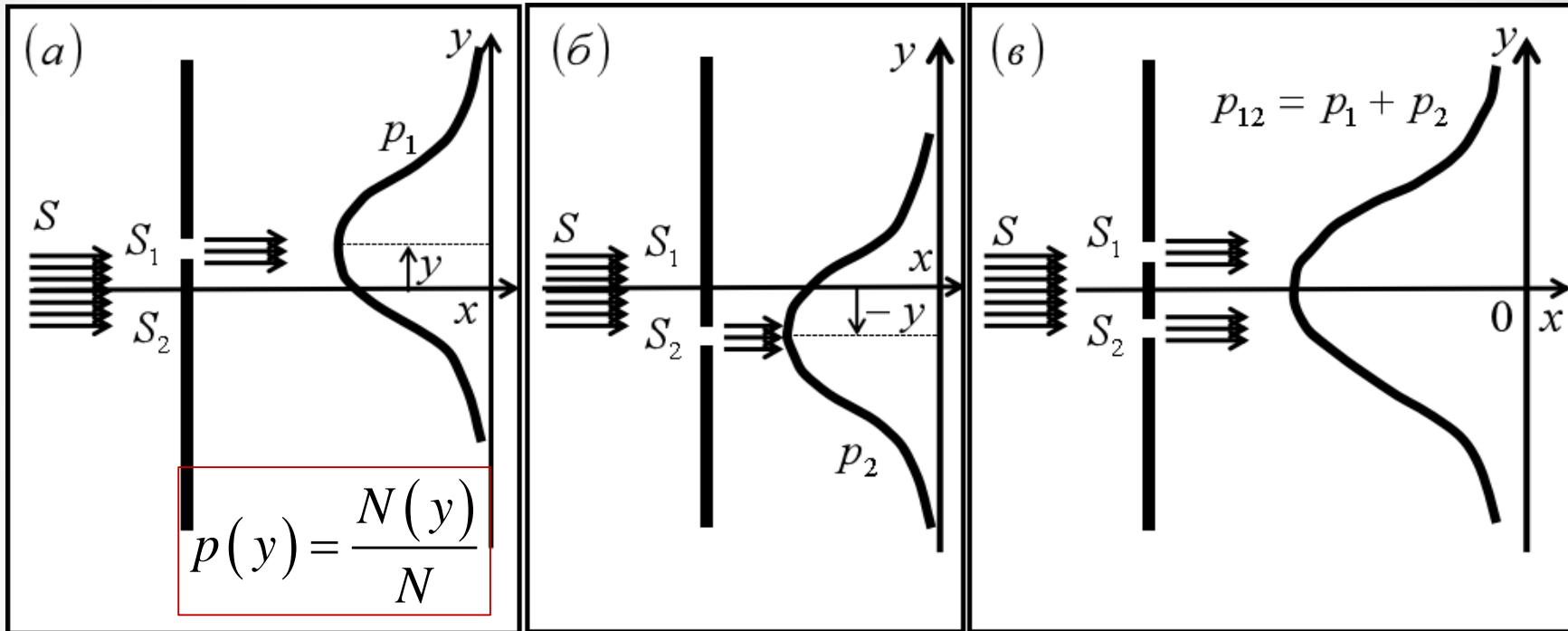
Общее правило проявления КВД у микро- и макрообъектов:

- всякий раз, когда длина волны де Бройля сопоставима с размерами объекта $r \leq \lambda$, его волновая природа обнаруживается и её нельзя игнорировать.
- если длина волны де Бройля мала $r \gg \lambda$ по сравнению с размерами объекта, то нужно использовать законы классической физики

«Мысленный эксперимент»

Классический взгляд на частицы

S – источник обычных классических частиц - пуль



$$p_{12}(y) = p_1(y) + p_2(y)$$

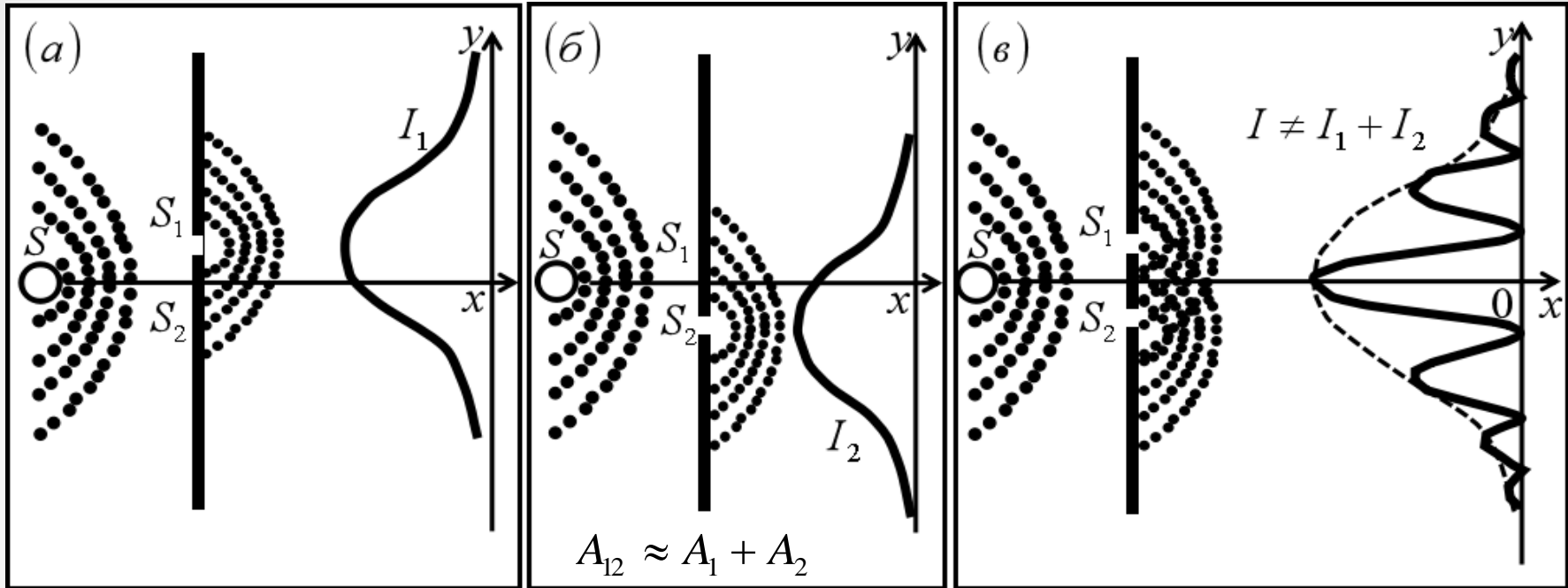
Вероятности складываются без интерференции

Схема эксперимента

- ✓ Источник S - пулемёт с низкой кучностью стрельбы,
- ✓ Препятствие - бронированная плита с S_1 и S_2 ,
- ✓ Поглотитель - ящик с песком, двигаем вдоль оси y .
- ✓ пули не разрушаются: одна порция – одна пуля.
- ✓ Определяем только (!) вероятность попадания в земляной вал.

Классический взгляд на волны

S – источник обычных волн



$$I_{12} \approx \langle A_1 + A_2 \rangle^2 = \langle A_1 \rangle^2 + \langle A_2 \rangle^2 + 2\langle A_1 \rangle \langle A_2 \rangle \cos \delta = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

Схема

- ✓ Источник S – шарик с моторчиком,
- ✓ Препятствие – пластина с S_1 и S_2 ,
- ✓ Поглотитель – песчаная отмель
- ✓ Детектор – поплавок, передвигаем по y .
- ✓ Регистрируем интенсивность волны.

Наблюдения

интерференционный член

- ✓ I – любая, дискретность отсутствует.
- ✓ при закрытых S_1 или S_2 $I(y)$ совпадает с $p_1(y)$ и $p_2(y)$
- ✓ при открытых S_1 , и S_2 – интерференция волн

Квантовый взгляд на частицы

S – источник электронов

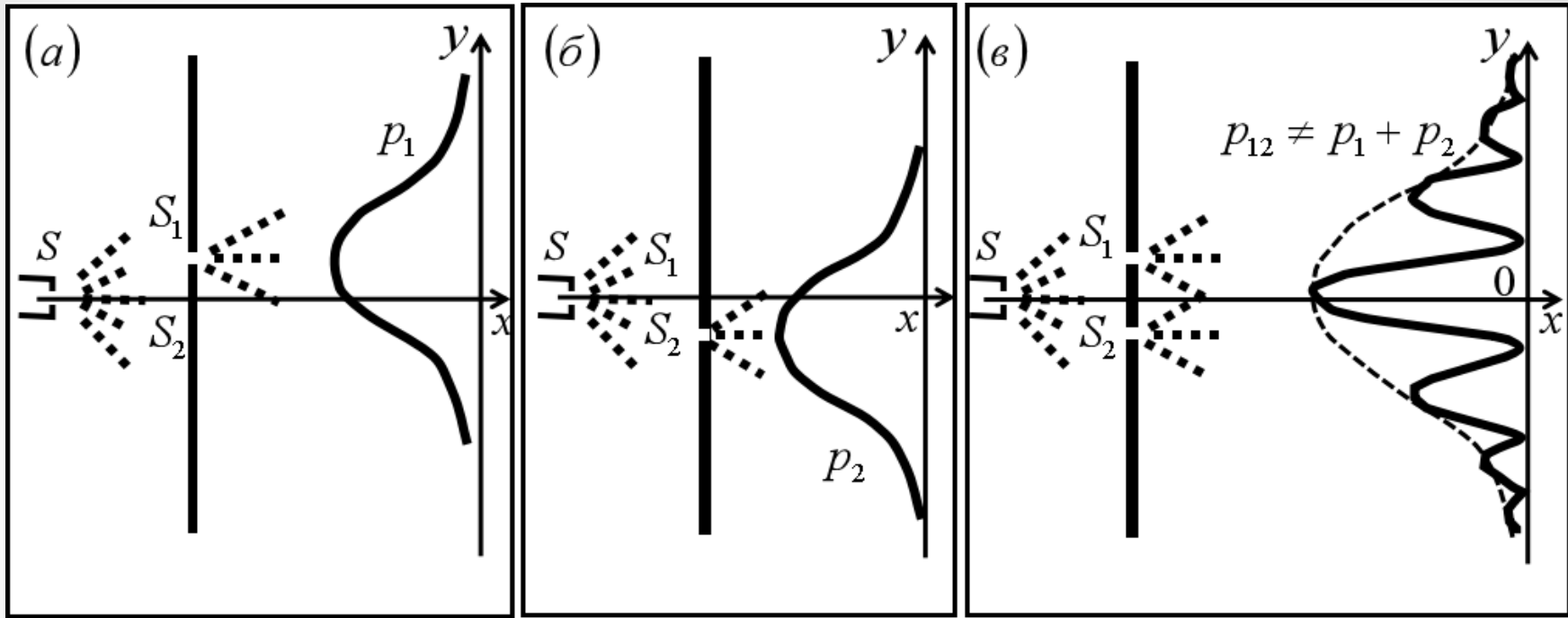


Схема эксперимента

- ✓ Источник S - электронная пушка,
- ✓ Препятствие - пластина с S_1 и S_2 ,
- ✓ Поглотитель - пластина
- ✓ детектор - электронный
- ✓ умножитель с динамиком, двигаем вдоль y .

Наблюдения: Резкие щелчки из динамика.

- ✓ частота растёт/падает, громкость постоянная.
- ✓ уменьшаем количество электронов частота щелчков спадает, громкость не меняется.
- ✓ Щелчки раздаются либо из одного, либо из другого детектора, но никогда из обоих одновременно.

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = Ae^{i\phi} = \widehat{A}e^{i\omega t}$$

КОРПУСКУЛЯРНО ВОЛНОВОЙ ДУАЛИЗМ

электроны в детектор приходят дискретно – как частицы, а вероятность прибытия распределена как интенсивность (интерференция).

Замечания:

1. наличие интерференции (даже в слабых пучках) при прохождении электронов через обе открытые щели означает, что **каждый электрон проходит через обе щели одновременно!**

Вывод не совместим с представлением о движении электрона по **классической траектории**, подобной траектории пули, где интерференция полностью отсутствует



2. При рассмотрении классических волн комплексные числа также могут быть применены для определения результирующей от обеих щелей интенсивности, но как математический приём, позволяющий облегчить расчёты.



В квантовой механике амплитуды волновых функций обязательно должны быть комплексными

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = Ae^{i\phi} = \widehat{A}e^{i\omega t}$$

Вероятностная интерпретация ψ

Волновая функция является комплексной функцией

Плотность вероятности обнаружить частицу в окрестности точки r в момент времени t

$$\rho(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$$

Вероятность нахождения частицы в некоторой области пространства в интервале от r до $r + dr$ в момент времени t

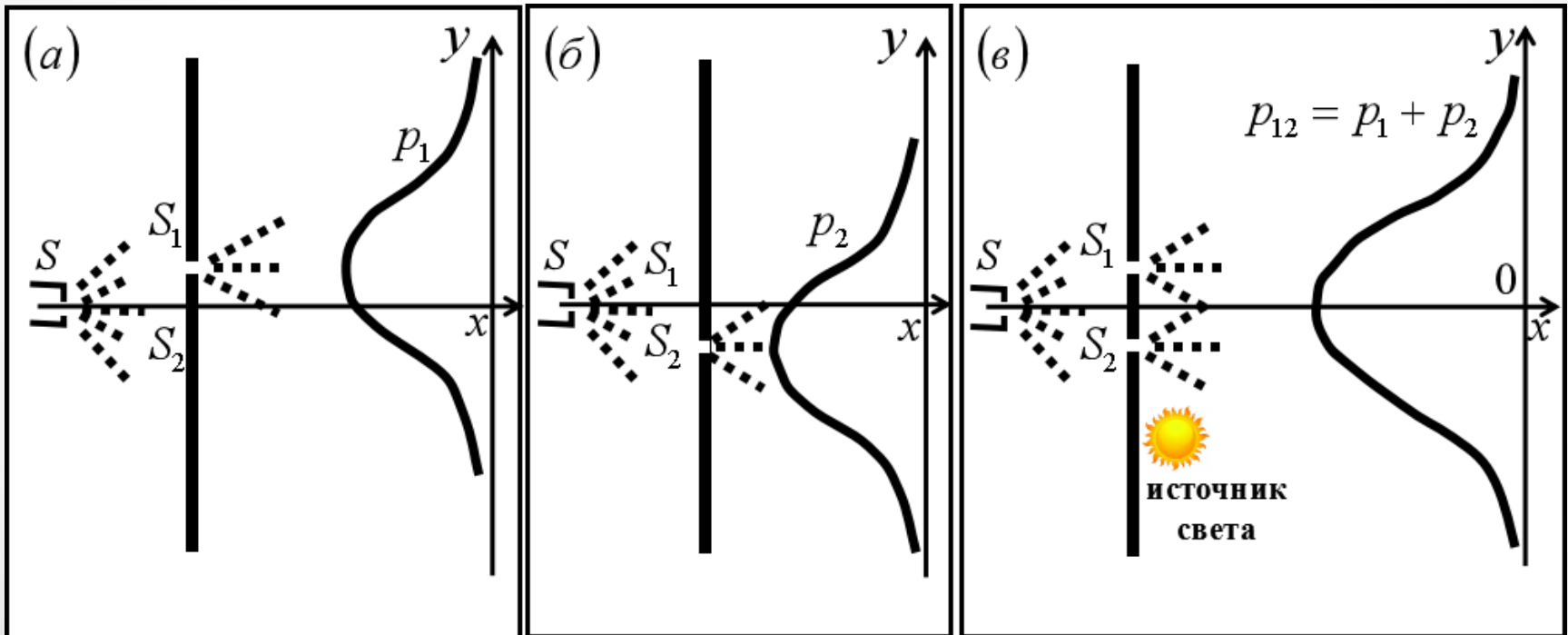
$$|\Psi(r, t)|^2 dV = |\Psi(r, t)|^2 dr = |\Psi(r, t)|^2 dx dy dz = d\rho(r, t)$$

Условие нормировки: если интегрировать по всему пространству с достоверностью 100%, что частица находится где-то в нем, то полная вероятность обнаружения частицы

$$\int_{space} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1$$

«Другие» электроны

Использование слабых пучков позволяет узнать через какое отверстие прошёл электрон. Разместим сильный источник света за пластиной с отверстиями. Заряды рассеивают свет, увидим вспышку у S_1 или S_2 , или у обеих одновременно.



Наблюдения:

1. раздаётся щелчок на детекторе, наблюдается вспышка на S_1 или S_2 , но никогда у обеих щелей одновременно при любом положении детектора.

⇒ электрон не разделяется

2. Вероятности попадания электрона в произвольную точку y на экране $p_1(y)$ и $p_2(y)$ аналогичны распределению пуль и электронов.

⇒ никаких блужданий электрона не существует

3. Полная вероятность $p_{12}(y)$ аналогична классических пуль:
интерференционная картина исчезла !

Но если выключить свет, интерференция появится снова.

⇒ Процесс наблюдения оказывает влияние на распределение электронов на экране.

Квантово-механический принцип: измерения интерферируют с состояниями микрообъектов

Соотношение неопределённостей

если проекция импульса частицы на ось x измеряется с неопределённостью Δp_x , то и проекция радиус-вектора на эту ось не может быть одновременно измерена с точностью меньшей $\Delta x \sim \hbar/\Delta p_x$

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar, \quad \Delta p_y \Delta y \geq \hbar, \quad \Delta p_z \Delta z \geq \hbar$$

Не существует способа, который позволил бы провести измерение пассивно, не изменив импульс частицы

$$\delta p_x \delta x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \delta p_y \delta y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \delta p_z \delta z \geq \frac{\hbar}{2}$$

$\delta p_x, \delta p_y, \delta p_z$ – среднеквадратичные отклонения проекций импульса
 $\delta x, \delta y, \delta z$ – среднеквадратичные отклонения проекций радиус-вектора

Замечание 1

Постоянная Планка имеет размерность действия J

$$[\hbar] = [p][x] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$$

$$[\hbar] = [E][t] = \text{Дж} \cdot \text{с}$$

Следствие: \hbar - элементарное количество действия, единица действия в атомном мире

Замечание 2

Действие $J = \hbar/2$ = произведение двух величин, имеющих:

- ✓ геометрическую природу (x),
- ✓ динамическую природу (p)

В квантовой физике:

это **взаимодополняющие переменные**.

В классической физике:

это **канонически сопряжённые пары**.

Задача 1

Согласно гипотезе де Бройля
любой частице с ненулевой
массой покоя m и импульсом p
МОЖНО ПОСТАВИТЬ В СООТВЕТСТВИЕ
волну:

$$\Psi(\vec{r}, t) = C e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)}$$
$$C = \text{const}$$

Получите уравнение движения
для свободной нерелятивистской
частицы, описываемой волной де
Бройля.

В классическом случае

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

В квантовом случае -
плоская волна де Бройля

$$\Psi(\vec{r}, t) = C e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)}$$
$$\vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad E = \hbar\omega$$

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

дисперсионное
соотношение

Продифференцируем волну один раз по t

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} C e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)} = -i\omega \Psi(\vec{r}, t)$$

И ДВАЖДЫ ПО \mathbf{r}

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi(\vec{r}, t) = \Delta C e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - Et)}$$
$$= (i)^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \Psi(\vec{r}, t) = -k^2 \Psi$$

Сопоставим эти два уравнения с дисперсионным соотношением

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \hbar\omega \Psi(\vec{r}, t) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Psi(\vec{r}, t) \end{array} \right.$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t)$$